碩士學位論文

水準別 授業에서 先修學習이 學業 成就度에 미치는 影響에 관한 研究

-中學校 2學年 圖形의 性質을 中心으로-

指導敎授 玄 進 五

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

姜 尙 辰

2000年 8月

水準別 授業에서 先修學習이 學業 成就度에 미치는 影響에 관한 硏究

-中學校 2學年 圖形의 性質을 中心으로-

指導敎授 玄 進 五

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2000年 5月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 姜 尙 辰

姜尙辰의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

2000年 7月 日

審査委員長 印

審 査 委 員 印

審 査 委 員 印

<초록>

水準別 授業에서 先修學習이 學業 成就度에 미치는 影響에 관한 硏究

- 中學校 2學年 圖形의 性質을 中心으로 -

姜 尙 辰

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 玄 進 五

본 연구의 목적은 중학교 2학년 수준별 수업에서 도형의 성질을 중심으로 선수학습이 학업성취도에 어느 정도 연관성이 있는지 알아보고자 하였다.

이를 위하여 본 연구에서는 보통반 학생들 중 실험반에 본시 수업에 앞서 이미 배워서 알고 있어야할 내용을 중심으로 선수학습지를 제작하여 먼저 활용하고 선수학습이 학업성취도에 미치는 영향을 조사하였다.

연구의 결과는 선수학습이 보통반 학생들에게도 대체적으로 긍정적인 효과가 있음을 확인할 수 있었다. 또한 선수학습을 통한 적극적인 학습의 전이가 학습에 대한 성취동기 부여와 흥미를 유발시켜 학업성취에 영향을 미친다는 것을 알 수 있었다.

< 目 次 >

표 목 차

Ⅰ.서 론

1. 연구의 필요성

사회의 기술적 요구의 증가와 과학의 발달과 더불어 여러 가지 학습상황에서 수학을 필요로 하는 분야가 많아지고 있다. 자연과학은 물론 공학, 경제학, 의학 등에서도 점점 수학의 중요성이 증대되고 있다. 그렇기 때문에 일선 학교에서도 중요과목, 특히 수학과목에 대한 많은 시간을 배려하고 있지만, 저학년에서 고학년으로 올라 갈수록 수학의 개개인의 학력차는 커져 점점 수학을 기피하는 학생이 많아지고 있다. 이러한 이유 중의 하나는 학생들이 학교 수업에서 배워야할 수업내용이 학생들의 능력수준별로 구성되어 있지 못하고, 한 학급 집단 내에 존재하는 학생들간의 심각한 학습 능력의 개인차가 고려되지 않은 채 이루어지는 획일화된 수업방식이 많은 학생들에게 부담과 학습의 결손을 초래하고 있는 실정이다. 또 다른 한 요인으로 누적되는 선수학습 결손이 교과에 따라 차이가 있겠지만, 수학교과와 같은 계통성과 위계성이 강한 교과에는 더욱 심하다고 생각된다.

박화열(1993)에 따르면 고등학교 교육과정은 중학교 과정까지의 선수학습 결손이 학생들에게 고등학교에서의 치료과정이 없는 한 더욱더 학습결손이 누적되고 있고, 이러한 누적현상은 학습의욕 상실과 그 자신의 지적, 정의적 열등의식을 초래하고 후속학습에서 가속적으로 학습결손과 학습의욕의 상실, 자기 열등감과 정서적 부적응을 누적시키게 된다고 지적하고 있다. 이러한 관점에서 볼 때, 수학교과에서 학생들로 하여금 동기부여와 흥미를 유발시킬 수 있는 방안이 연구되어야 한다. 특히 중학교 수학교과 지도에 있어서 도형 영역은 제 6차 교육과정 전체 내용 408시간 중 160시간으로 약 40% 가까이 차지하고 있는 실정이다. 이러한 내용은 제 7차 교육과정에도 전체적으로 동일하게 구성되어 있다. 이처럼 수학교육에서 도형영역은 매우 중요한 영역이며 실제 수업에서 다루는 양을 보아도 큰

비중을 차지하고 있다. 기하학적 개념은 수학의 다른 여러 분야의 개념과 밀접하게 관련되어 있어서 기하학적 개념을 도입하면 쉽게 접근되고 이해하는데 도움이 되는 수학분야가 많다. 또 기하문제는 그 해결방법이 다양하게 때문에 학생들로 하여금 창조적으로 사고하게 하고 스스로 생각하는 힘을 기르는데 효과적일 수 있다. 그래서 수학적 능력을 높이는 방법은 학력에 상응하는 증명문제를 끈기있게 자력으로 풀어보는 일이라고 해서 증명문제를 강조하고 있다. 그러나 현재의 실정은 증명문제를 기피하고 있으며 증명에 매우 약하다는 지적을 받고 있는 상태이다. 이런 문제점을 조금이나마 해소하고 적극적인 교수학습 과정이 이루어질 수 있는 분위기 조성을 위해 선수학습을 강화할 필요성을 느꼈다.

2. 연구의 목적

중학교 기하는 초등학교에서 배운 도형과 측도에 대한 내용을 발전시켜 평면에서의 논증기하를 완성하는 것으로 볼 수 있다. 중학교에서는 초등학교에서 학습한 직관적인 도형과 측도를 바탕으로, 1학년에서는 조작적 활동이나 직관적 취급을 중심으로 한 도형에 대한 직관적 통찰 능력을 키우고, 2,3학년에서는 수학적 추론의 의의와 방법을 이해하고, 논리적으로 표현하는 능력을 키우는데 있다. 또한 중학교에서의 증명은 엄격한 논리 전개보다는 이유를 조리있게 설명할 수 있도록 하는 것이 도형분야의 일반적인 수업목표이다. 그러나 기하영역에 있어서 증명을 이용하여 명제나 정리를 교수-학습하는 일은 이전까지 방정식을 푼다든가, 그래프로 나타낸다든가, 아니면 해를 구하는 문제와는 전혀 다른 형태의 수학적 사고력을 요하는 도형문제로의 전환은 학생들에게 많은 거부감과 이해에 상당한 어려움을 제공하고 있는 것이 현 실정이다. 기하영역은 학생들이 논리적인 사고력과 도형 문제의 해결력을 기르는데 적합한 내용이지만, 기호에 의한 서술과 이유의 서술을 포함하는 증명쓰기는 학생들에게 매우 생소한 내용으로 이런 학습 환경의 변화는 보통이하 수준의 학생들은 쉽게 받아들이지 않으므로 어렵고 하기 싫은 분야이다.

그래서 이런 문제를 학생이 입장에서 생각해 볼 때 흥미를 느끼며 관심을 가지고 좀더 쉽게 접근하여 적극적으로 자기 주도적인 학습이 이루어지도록 하기 위하여 교육부에서 강조하고 있는 학습의 개인차를 고려한 수준별 수업을 위해 학교 자체적으로 기존의 반 편성은 그대로 유지하되 2개의 반을 하나로 묶어 심화반, 보통반 2개 수준으로 구분하고 반을 편성하여 수학교과에 대한 이동식 수업을 실시하였다.

이에 본 연구는 수준별 이동식 수업으로 편성된 보통반 학급에서 이미 학습한 내용 중 '선수학습지'를 제작 활용하여 중학교 2학년 수학 도형이 성질에 대한 선수학습이 본시 수업에 있어서 형성평가의 문제 해결력 향상에 효과가 있을 것인가를 확인하고 도형 단원에 대한 심리적 기피현상을 해소하며 학생들로 하여금 적극적인 교수학습과정에 참여와 더 나아가 수학교과에 대한 학습동기 유발과 흥미를 유도해보고자 하는데 그 목적이 있다.

3. 연구의 제한점

본 연구의 결과를 교육 현장에 적용함에 있어 몇 가지 제한점이 있다.

1) 연구 대상을 제주시내 1개 여자중학교에서 수준별 이동식 수업으로 인해 편성된 심화반, 보통반 중에 보통반 3개 학급으로 한정했기 때문에 보편적인 해석에는 유의해야 한다.

2) 본 연구의 학습범위는 중학교 8종 교과서 (박배훈외 1인 1998)의 영역 중 단원Ⅶ. 도형의 성질로 한정한다.

3) 본 연구에 사용된 평가 문항은 표준화된 검사지가 아닌 연구자가 제작한 검사지를 사용했다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 용어의 정의

1) 수준별 : 교수 학습 현장에서 수업을 받을 수 있는 능력 정도를 말한다.

2) 이동 수업 : 수준별로 지정된 다른 교실로 이동해 받는 수업을 말한다.

3) 수준별 교육과정 : 학생들이 학교 수업에서 배워야 할 교육(수업)내용이 학생들의 능력 수준별로 개발된 상태의 교육과정을 말한다.

4) 보통반, 심화반 : 수준별 이동 수업을 위하여 수학과 성취도에 따라 상위반은 심화반, 하위반은 보통반으로 학교 자체적으로 명명한 것을 말한다.

5) 선수학습 : 어떤 학습과제의 학습을 위해 미리 학습 또는 습득하고 있어야할 학습, 주어지는 시간에 배우게 될 학습과제의 성격상 위계적으로 하위에 해당하는 과제나 목표를 성공적으로 습득하고 있으면 본 학습과제의 학습이 용이하게 된다. 이때, 위계상 하위에 속하는 과제의 습득을 선수학습이라 한다.

2. 수준별 반편성

학교에서 수행되는 능력별 반편성은 기본적으로 학교간 능력별 편성, 학교 능력별 편성, 학급 내 능력별 편성등 3가지 형태로 생각할 수 있다. 학교간 능력별 편성은 학생들의 지능이나 학업성적에 의하여 인문계, 실업계 고등학교처럼 각기 다른 학교로 보내지는 것을 말하고, 학교내 능력별 편성은 지능이나 학업성적에 의하여 단일학교 내의 여러 학급으로 분류되는 것을 말하며, 학급내 능력별 편성은 한 학급내의 학생들을 어떤 영역이나 소집단으로 나누어 운영하는 방법을 말한다.

능력별 반편성의 본래 의도는 교수 방법과 교육 내용의 기본적인 변화를 위하

여 학생들을 분류하는 수단으로 제안된 것이며, 능력별로 집단을 편성하는 것을 지지하는 사람들은 각기 다른 수업의 실제와 수업 내용으로 인하여 모든 능력 수준의 아동들의 성취도가 높아지리라고 가정을 하고 있으나, 많은 연구들이 초점을 맞추고 있어서 아직은 미지수이고 교육의 실제에서 그 효과성을 평가하기란 그리 쉽지 않을 일이다.

능력별 집단 편성은 여러 가지 문제점에서 찬성론과 반대론이 각기 뚜렷하게 주장되지만 교과별 수준별 반편성 특히, 개인차가 심한 수학이나 영어 교과의 수준별 반편성은 학생의 개인차가 감소되며, 교사는 지도 내용, 지도 방법, 지도 자료 등을 학생의 수준에 맞게 다룰 수 있어서 학력 향상을 기대할 수 있으며, 학생은 열등감이나 패배감을 극복할 수 있게되어 학업성취도를 높일 수 있다.

능력별 집단 편성이 학생의 자아 태도, 사회적 지각에 어떤 영향을 미치고 있는가를 연구한 결과는 능력별 집단 편성은 학생의 자아에 대한 지각에 영향을 주고, 사회적 생활, 자신에 대한 무력감과 존중감, 그리고 다른 학생들에 대한 태도를 갖게 하는데 영향을 준다고 하였다. 그리고 능력별 집단 편성이 시행될 때 성적이 평균이하인 학생들은 자아 개념에 손상을 입게되며 특히 여학생의 경우는 남학생보다 더욱 심하다고 하였다.

3. 수준별 이동수업

수준별 이동수업은 학습자를 존중하여 학습자가 학습 수준을 스스로 선택하여 자유로운 방법으로 수업에 참여할 수 있는 허용적 학습 분위기와 이러한 학습환경을 토대로 수준별 이동수업의 개별화, 개성화, 자율화를 추구하며 보통 보충과정, 기본과정, 심화과정의 3단계로 이루어진다. 이러한 수준별 이동 수업을 운영함에 있어서 창의성 함양을 위한 각 단계별 교사의 역할은 다음과 같다.

1) 보충과정

보충과정에서 하위 수준의 학습자도 그들 나름대로의 기준에서 새로운 생각이

나 작품이면 창의적인 것으로 인정해야 하며 교사가 이를 등한시해서는 안된다. 수업시간에 이를 뒷받침하기 위하여는 다음과 같은 점들에 주의 해야 한다.

(1) 학습자가 충분히 소화할 수 있는 내용을 상세히 제시하여 기초, 기본교육을 우선 실시

(2) 충분한 학습 시간, 적당한 학습 분량

(3) 구체적 자료제시로 직관적 사고 유발

(4) 허용적 교실 분위기와 교사와 학생간의 상호작용의 활성화

(5) 자신감이나 의지력 형성 등의 정의적 내용 육성 등이 필요

2) 기본과정

교사와 학생의 상호작용을 유지하면서 자기 주도적 학습을 할 수 있는 기반을 마련하며 자신감을 갖고 지속적으로 자유분방한 사고활동이 전개되도록 유도하기 위하여 유의할 점은 다음과 같다.

(1) 이 집단은 초보수준의 반성적 사고를 할 수 있기 때문에 이러한 사고활동을 하기 위한 내용의 구성

(2) 교과서 수준이상의 심화적 내용을 어느 정도 제공하고 자기 주도적 학습을 할 수 있는 계획 수립

(3) 교사와 학생의 상호작용을 수평적 위치로 전개

(4) 교과서의 기본내용 학습 후 발전과정에서 자기 주도적 학습 유도

(5) 학습자가 교사의 교수내용에 비판적 자세를 통하여 창의성 유도

3) 심화과정

지나친 개별학습으로 자기 중심적 태도가 형성되지 않도록 주의하면서 본격적인 자기 주도적 학습이 전개될 수 있도록 계획을 수립하며 다음과 같은 점에 유의해야 한다.

(1) 구체적 자료보다는 추상적 자료 준비

(2) 교수학습 활동의 전 과정이 자기 주도적으로 계획

(3) 교과서 수준이상의 심화적 자료나 현장 중심, 미래지향적 자료 제공 등으

로 나름대로의 결과 도출 유도

(4) 정보 수집 방법의 안내

4. 선행 수준별 이동수업 연구에 나타난 시사점

1) 수준별 반 편성은 교과 시간 운영상 학급 수와 교사 수가 일정한 요건을 갖출 때에만 실효성이 있으므로 학교 실정에 맞게 재정립할 필요가 있다.

2) 수준별 반 편성은 인성 교육의 측면에서 역기능을 내포하고 있어 이를 보완할 수 있는 방법의 강구가 필요하다.

3) 수준별 반 편성은 해당 교과의 교사 전원이 열린교육에 대한 전문지식과 경험을 풍부하게 축적하고 있어야 하며, 교사간에 협력체제가 이루어질 수 있는 인간 관계의 형성이 전제되어야 한다. 그렇지 못할 경우에 초래될 수밖에 없는 여러 가지 부작용과 혼란에 대하여 깊은 성찰이 필요하다.

4) 수준별 이동수업을 하기 전에 먼저 학급 내에서 수준별 수업경험을 충분히 쌓은 다음에 수준별 반 편성을 시도하는 것이 우선되어야 할 것이다.

5)교과별 이동수업 전담교사 협의회가 결성되어야 하겠고, 협의회를 통하여 각종 정보 교환은 물론, 학습자료 공동 제작활용 등이 이루어져야 할 것이다.

6) 이동수업을 전담하는 교사에게는 학습자료 제작 개발과 교재 연구에 많은 시간이 소요되므로 업무 및 수업 시수 경감이 선행되어야 한다.

7) 기본 시설이 구비된 과목별 전담 교실이 마련되어야 하겠으며, 적어도 학습자료를 제작할 수 있는 교재 연구실은 갖춰져 있어야 한다.

5. 선수학습과 학업성취

Bloom은 학교에서 가르치는 많은 교과목은 지적 출발점 행동이 얼마나 갖추어져 있느냐에 따라 본 단원 학습의 성패가 달라진다는 사실을 밝히고 있다. 즉 선수학습 능력이 잘 갖추어져 있는 학습자는 새로운 단원의 학습에 무난히 학습

성취도가 높을 것이고, 그렇지 못한 학습자는 실패할 가능성이 높다고 볼 수 있을 것이다. 따라서 한 학습 과제의 실패는 그 학습과제와 관련된 다른 후속 학습 과제의 학습에 크게 영향을 줌으로써, 각 단원의 수업목표를 성공적으로 학습할 수 있도록 출발점 행동을 보충해 주는 일은 대단히 중요하다. Bloom은 이러한 지적 출발점 행동에 대한 연구를 종합한 결론에서 다음과 같이 말하고 있다.

" 지적 출발점 행동은 한 개 혹은 그 이상의 학습과제에 나타나는 성적의 변이, 즉 개인차를 약 50% 정도 결정한다."

이처럼 출발점 행동이 학업 성취에 미치는 영향을 고려해 볼 때 그 의미는 매우 크다고 볼 수 있다.

또 Decocco는 학습을 위한 학습이라는 학습태도와 출발점 행동에서 "새로운 과업을 학습하려고 할 때 그와 비슷한 일을 이전에 연습한 일이 있으면 우리의 학습능력이 증가되는 것을 흔히 볼 수 있다."고 말하고 있다. 즉, 한 학습과업을 수행하는 동안에 얻어지는 일반화 혹은 전이 가치가 있는 사항의 학습은 다음 단계의 학습을 위한 학습이 되는 것이다. 그러므로 학습을 위한 학습은 출발점 행동의 두 요인이 되지 않을 수 없다. 또 정의적 출발점행동도 학업 성취와 깊은 관련을 갖고 있는데, 정의적 출발점 행동과 관련된 것 중 흥미와 성적 사이의 관계에 관한 연구는 일반적으로 상관이 +.20에서 +.50 사이에 이르며 학습에 대한 정도와 성적과의 관계에 관한 많은 연구에서도 학교 성적이 극단에 있는 학생에게는 태도의 성적에서 분명한 관계가 있다고 밝혀지고 있다. 이 정의적 출발점 행동퐈 학업 성취의 관계에 있어서도 Bloom은 학교 학습에 관련된 흥미, 태도, 자아개념, 일반적 동기 문제에 관한 연구들을 종합해 본 결과에 기초해서 정의적 출발점 행동이 학습 과제의 성적 변인 즉, 개인차가 25% 결정된다고 결론짓고 있다.

이렇게 이론적으로 학교 학습에 있어서 개인차를 생기게 하는 원인 중 지적 출발점 행동과 정의적 출발점 행동을 적절히 통제할 수 있다면 개인차의 성적 변인의 약 75%를 줄일 수 있다. 그래서 학업성적에서 개인차 변인을 지적 시발행동, 정의적 시발행동, 교수의 질 등 세 변인으로 보고 이에 대한 내용을 간단히 고찰해보면 다음과 같이 요약할 수 있다.

1) 지적 시발행동

지적 시발행동은 학습해야 할 학습과제를 성취하기 위해서 필연적으로 알아야 할 어떤 선수학습 내용을 말한다. 학교에서의 교수학습은 그 성질상 어떤 지적 성질을 띤 선수학습에서 이루어진다. 대개의 교과는 여러 개의 학습과제로 구성되어 있으며 이 과제들은 어느 것을 먼저 배우고 어느 것을 나중에 배워야 적절할지 교과의 구조에 따라서 계통화 되어 있다. 또한 계통화된 학습단위로 구성되어 있다는 것은 선수 단위의 학습을 성취하지 않고서는 후속하는 학습단위의 학습이 불가능한 관계를 말한다.

2) 정의적 시발행동

학습자가 학습을 시작하기 전에 학습하려고 하는 학습과제에 대한 일반적으로 지니고 있는 흥미, 태도, 자아개념, 동기 등을 통틀어 지칭한다. 학생은 학습과제에 관련된 자기의 능력에 대한 태도나 흥미보다 인간 심층에 자리잡고 있는 개인의 자아개념이나 성격의 복합체라고 규정할 수 있다. 한 개인이 새로운 학습과제에 부딪혔을 때 이전의 학습에서의 긍정적 태도나 긍정적 자아개념을 갖고 있다면 새로운 과제에 대하여 자신감과 열성을 가지고 대하게 되지만 부정적 태도나 부정적 자아개념을 가지고 있다면 실패를 염려하거나 혐오감을 갖고 대하게 될 것을 상상할 수 있다.

3) 교사의 길

Bloom은 교사의 길을 결정하는 요인으로 단서, 참여, 강화를 말하고 있다. 단서를 주기 위해서 가장 중요한 방법은 단서의 다양화, 단서의 개별화, 학습 과제 속에 학습요소를 위계적 질서를 갖도록 조직해서 단서가를 높이는 일이고, 참여에 있어서는 외연적 참여보다는 내재적 참여와 연습의 중요성을 강조하고 있다. 강화는 교수과정에서 제시되는 단서에 반응하도록 충동한다. 다양한 강화 방법을 생각할 수 있으나 학습을 하고 난 후 시험을 보고 그 결과를 알려주는 것은 자기성취도에 관한 지식을 갖게 함으로써 중요한 feed back의 효과가 있으며 최근

평가 이론에서 형성평가를 강조하는 것은 그 역할이 강조인자로서 이용되고 있기 때문이다.

6. 학습의 전이와 학습 동기를 유발시키는 방법

1) 학습의 전이

학교교육 중에서도 전학기 또는 전학년까지의 학습은 현재의 학습을 보다 용이하게 만들어 줄 수 있어야 한다. 이처럼 선행학습이 그 후의 새로운 학습에 미치는 영향 또는 효과를 학습의 전이라고 한다. 이 학습의 전이가 갖는 의의는 학교에서 배운 것이 후일의 생활에서 전혀 활용되지 못한다면 학교교육은 그 존재의 이유를 상실하고 말 것이다.

이러한 전이의 효과는 전혀 상반된 두 가지의 결과로 나타난다. 예를 들어 영어를 잘하는 사람이 불어를 공부할 때는 영어를 모르는 사람이 불어를 공부할 때보다 힘이 덜 들고, 반대로 영어를 알 듯 말 듯한 사람이 불어를 공부할 때는 영어를 전혀 모르는 사람보다도 힘이 더 들고 시간도 더 걸리게 된다. 이런 경우 전자를 적극적전이(정적전이)의 효과라 하고 후자를 소극적전이(부적전이)라고 한다. 그래서 학습의 전이가 보다 효과적이고 적극적으로 나타나기 위한 조건을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 학습 자료의 유사성: 전학습과 새로운 학습에서 다루는 학습자료간의 유사성이 높으면 적극적 전이가 일어난다.

(2) 반응이 유사성: 어떤 자극에 대한 반응이 같거나 유사할 때에는 다른 자극이라도 그 자극간에는 적극적 전이가 일어난다. 즉 학습자료가 다르더라도 결과가 같으면 학습자료 사이에 적극적 전이가 일어난다.

(3) 학습간의 시간: 선행학습과 후행 학습간의 시간적 간격 짧을수록 적극적인 전이가 이루어진다. 물론 학습간의 시간이 너무 길면 전이가 일어나지 않을 수도 있다.

(4) 학습의 정도 : 선행학습의 정도가 새로운 학습의 전이도에 크게 영향을

미친다. 즉 선행학습이 충분히 이루어질수록 그것에 뒤따르는 학습에 크게 전이 된다.

(5) 학습자의 능력: 학습자의 지적 능력 또한 전이에서 커다란 역할을 한다. 일반적으로 지능이 높을수록 적극적 전이가 잘 일어난다고 할 수 있다.

2) 동기 유발을 시키는 방법

인간의 기본적 특성의 하나가 그 주위의 세계를 알려는 요구이며 이와 같은 요구가 인간이 학습하려는 행동을 일으키게 하는 학습동기의 원천이 된다. 그것이 학습동기이든, 아니든 간에 어떤 행동이 일어나게 되고 일어난 행동이 진행되고 지속되게 하고 그 행동이 보다 강하게 일어나게 하고 그와 같은 행동을 그치게 하는 동기가 되는 원인이 있기에 행동이 진행된다. 학습이 반복연습을 통하던 강화에 의해서건 아니면 그것이 행동을 통해서 이루어진다면 이와 같은 동기란 학습에 중요한 원동력이 된다. 더욱이 학습효과가 학습활동의 과정에서 일어나는 행동통제의 결과라면 학습활동을 보다 적극화하여 학습효과를 높이기 위해서는 학생들에 대한 학습동기의 유발이 그 무엇보다 중요하다.

(1) 학습동기의 개념

Morgan 과 King는 동기란 유기체 내에서 어떤 목표를 향한 행동을 일으키는 원동력이라고 정의하고 있다. 행동을 일으키는 원동력이라는 개념 속에는 유기체 내면의 동기적 상태, 이러한 상태가 행동을 유발하거나 방향을 결정지으며, 행동이 목표로 향하게 하는 세 가지 면을 포함하며 목표가 달성되면 행동은 그친다고 설명하고 있다. 이와 같은 동기의 측면은 곧 동기의 기능 즉 시발적 •지행적 •지속적 •강화적 기능을 가리키는 것이다.

학습에 작용하는 동기로서 학습동기 또는 성취동기를 들 수 있다. 분명히 동기화된 학생들은 유목적적이고 정력적으로 학습을 수행해 나간다. 그러나 학생들은 실제로 계획된 학습의 장에서는 동기가 강하게 유발되지 않을 때가 많다. 그러기 때문에 교사가 학생들을 동기화된 상태로 이끌어 나갈 수 있다고 한다면 그는 벌써 그의 전문적 역할의 반 이상을 수행하고 있는 자라고 할 수 있을 것이

다. 성취동기란 도전적인 과제를 성취함으로써 만족을 얻으려고 하는 요구로 인간의 동기체제 중의 한 요인이다.

(2)동기유발의 방법

동기유발을 위한 구체적인 방법에 앞서 우리는 동기를 개체 내에서부터 동기 지어진 것과 개체의 외부로부터 동기 지어진 즉, 내적 동기와 외적 동기로 나누어 생각해 볼 필요가 있다. 내적 동기란 긴장의 해결이 학습과정 그 자체를 해결함으로써 가능해질 때 일어나는 활동경험으로서 활동 그 자체가 보수를 제공해 주는 것이다. 즉 어떤 과업을 성취함으로써 어느 정도의 만족과 쾌감을 누릴 수 있는 것을 말한다.

외적 동기는 그와 반대로 자신의 학습과제를 성취해야 할 이유가 외부에 있을 때의 동기이며, 예컨대 좋은 성적을 얻어야 할 이유가 부모를 즐겁게 하는 데서 왔다면 그것은 곧 외적 동기에 의한 학습의 수행이다.

내적 동기이든 외적 동기이든 간에, 동기는 학습을 진행시키고 촉진시킨다. 그러나 확실히 외적 동기는 내적 동기보다 약하거나 거칠거나 혹은 학습행동을 비정상적인 방법으로 이끄는 수가 많다. 그래서 학생들이 학습에 미치는 효과적인 학습의 동기를 유발시키는 방법을 살펴보면 다음과 같다.

① 효과적인 학습동기는 학습의 목표를 개인적 욕구와 결부시켜 주는 방법이다, 개인적 욕구란 분류하기에 따라 생리적 욕구와 사회적 욕구로 혹은 기본적 욕구와 이차적 욕구로 구분된다. 이 때 학습장면에서 목표와 관련 지워지는 학습동기는 소속욕, 승인욕, 성취욕과 같은 사회적 욕구가 더 효과적인 경우가 많다. 특히 목표를 구체화하여 욕구와 관련 지워 주는 것이 보다 효과적이 된다.

② 목표를 뚜렷하게 인식시켜 주는 것은 학습동기를 유발시키는데 크게 도움이 된다. 학습동기는 학습목표와 결부된 동기인 만큼 학습목표를 학생들에게 실감있게 인식시키는 것이 무엇보다 앞서야 한다. 특히 학습목표는 학생들에게 구체적이고 실제적인 것으로 제시되어야 그 목표에 개인의 욕구를 투사시키기가 쉽다. 추상적이거나 관념적인 목표, 그리고 학생들의 성숙수준이나 능력에 맞지 않는 목표는 학습동기유발에 별로 도움이 되지 못한다.

③ 개인의 흥미나 적성에 부합된 학습과제일수록 학습동기유발에 도움이 된

다. 흥미란 어떤 특정대상이나 활동을 보다 구체적으로 부각시켜 적극적으로 선택하고 추구하는 정서적인 태도이다. 흥미는 선택된 대상에 강한 동기를 유발케 하는 동인으로 작용하므로 흥미나 적성에 부합된 학습과제일수록 강한 학습동기가 유발되며 이 동기는 내적 동기로서 흥미가 변화하지 않는 한 강하게 작용한다.

④ 자신의 학습결과에 대한 정보는 학습동기유발에 도움이 된다. 어떤 문제를 성공적으로 끝내면 만족과 쾌감이 따라와 강화되며 계속되는 다음 과제에 대한 학습동기가 강하게 유발된다. 과제가 비록 종결되지 않더라도 그때까지의 학습결과에 대한 정보의 제공은 학습동기의 지속과 강화에 도움이 된다.

⑤ 칭찬이나 상은 학습동기유발에 효과적인 방법이다. 이 경우에 보수가 지나치게 외적 동기로 작용함으로써 나타나는 부작용을 경계해야 한다.

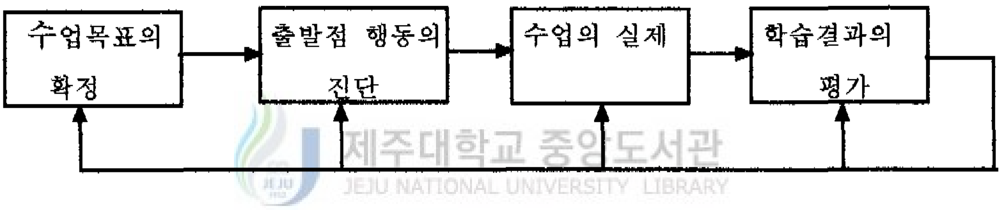
⑥ 긍정적 자기개념의 형성을 돕는 것은 학습동기유발에 도움이 된다. 학생들에게 긍정적 자기 개념을 갖도록 도와주는 것은 학습동기를 유발하는 직접적 방법은 아니라 하더라도 대단히 중요한 임무이다. 보다 많은 학생의 성취수준은 자기 자신이 할 수 있다고 생각하는 과업 내지 과업수준의 한계를 크게 벗어나지 못하고 있다. 그래서 긍정적 자기개념은 자신감을 높여주고 학습동기를 강화시킬 수 있는 성격적 바탕이 된다.

⑦ 부분해답은 학습동기유발에 도움이 된다. 적절한 시기에 부분적인 해답을 주어 문제해결에 대한 긴장감을 적절히 조절하고 관심이 지속적으로 가해질 수 있도록 하는 것이 학습에 도움이 된다.

⑧ 경쟁심의 적절한 활용은 학습 동기 유발에 도움을 준다. 경쟁심은 승인의 욕구, 자기과시의 욕구와 관계되는 것으로 학습 동기 유발의 방법이기도 하다. 그러나 개인간의 경쟁은 왕왕 인간관계를 해치고 협동심을 저해하는 부작용도 있음을 생각해 볼 수 있으므로 간접적인 경쟁을 통한 동기화가 사회성교육을 포함한 인간교육이라는 차원에서 보다 바람직한 것으로 본다.

7. Glaser의 수업모형

사람이 사람을 가르치는 일은 본질적으로 복잡한 일이다. 왜냐하면 가르친 결과로서의 학습은 학습자에게만 일어날 수 있으며, 따라서 학습의 열쇠는 학습자가 쥐고 있기 때문이다. 가르치려는 사람의 간절한 의도에도 불구하고, 정작 배워야 할 사람은 짓궂게도 하품만 하고 있을 수도 있고, 엉뚱하게도 가르치려는 것이 아닌 것을 학습할 수도 있다. 이러한 본질적인 어려움에도 불구하고, 가르치고 배우는 과정을 좀 더 분명히 하며 가르치는 일에 따르는 계획과 준비와 가르치려는 자의 태도를 다시 한 번 가다듬어 학생들의 행동에 어떤 변화를 일으키도록 하는 노력이 필요하다. 그래서 수학과 학습에 있어 학습 부진에 대한 해결방안의 하나로 Glaser의 수업모형을 살펴보고자 한다. Glaser의 수업모형을 도식화하면 다음과 같이 표현할 수 있다.



feed back선

교수과정에 관한 여러 원리나 법칙을 체계적으로 담고 있으면서도 그 자체가 간결하게 표시되어 있는 Glaser의 수업모형은 한 학습 단원의 수업목표가 설정되면 이 수업 목표의 달성을 위하여 학생들에게 필수적으로 요청되는 선수 학습의 정도와 양상이 정확히 진단되어야 하고, 그에 따라 학생들에게 어떤 교수 학습 활동이 이루어져야 할 것인가가 처방되고 최종적으로 그 학습지도의 성과가 평가되어야 한다. 이러한 수업모형에 따라 목표 지향적인 교육활동이 이루어지도록 단원 또는 영역별 과제를 분석하여 체계화하고 교수 학습 목표를 상세화하여 목표에 따라 다양한 평가를 제작하여야 한다.

1) 수업목표의 확정

교수·학습 과정을 생각할 때 가장 주의 깊게 명심하여야 할 것이 수업목표이다. 수업 목표가 분명하게 진술할 때 비로소 목표 달성에 가장 알맞은 수업 활동, 수업 매체, 수업 자료를 선택할 수 있고 수업이 끝난 후의 평가도 객관적으로 이루어질 수 있기 때문이다. 즉 수업이 끝난 후 학생들이 수업목표의 도달 정도를 행동으로 표시함으로써 제 3자가 이를 관찰할 수 있을 정도로 구체적인 용어로 표시하여 제시한다. 그래야만 학생들이 목표에 몇 %나 도달하였는지를 알 수 있기 때문이다.

그래서 수업목표는 교육과정에서 의도하고 있는 목표를 성취시킬 수 있도록 하기 위해서 교육과정에 부합되어야 하고, 학생들이 학습에 있어서 무엇을 학습해야 하는지 무엇을 학습하고 있는지를 분명히 인식하여 학습을 하고자 하는 동기를 유발시켜 목표 지향적인 노력을 할 수 있도록 해야 한다. 또한 수업목표는 객관적인 평가의 준거로 작용하여 수업이 끝났을 때 수업을 통하여 학생들이 어느 정도 주어진 목표를 성취했는가를 알아보는 기준이 되도록 한다.

2) 출발점 행동의 진단

한 새로운 단원이나 학습 과제를 학습하려는 출발선상에서 학습자가 가지고 있는 지식, 기능, 태도 등을 의미하며 투입 행동 또는 출발점 행동이라고도 한다. 즉, 특정학습에 돌입하기 위하여 갖추어져 있어야 할 선수학습을 의미한다. 수업목표가 설정되면 학생들의 현재의 학습 수준이 먼저 진단되고, 수업목표와 현재의 학습 수준의 격차를 메우기 위하여 어떤 학습지도가 어디서부터 출발되어야 할 것인가에 대한 처방이 내려져야 한다. 이때, 출발점 행동에서 학습 결함의 발견과 학습 결함의 처치가 이루어져야 한다.

(1) 학습결함의 발견: 선행학습의 불충분한 학생들은 새 단원의 수업의 출발점에서 이미 상당한 학습 결함을 지닌 채 수업에 임하게 된다. 이 때, 단원이 시작되기 전에 그 단원의 학습에 전제되어야할 학습요소로 짜여진 기초 학습진단 검사를 통해 선수 학습 결함의 정도를 파악한다.

(2) 학습 결함의 처치 : 선수학습에서 결함을 가진 학생들은 다음 단계의 학습의 출발점에서 이미 학습결함을 지닌 채 출발하게 된다. 이 때, 학습 결함을 처치하기 위한 가장 좋은 방법은 교사에 의한 기본적인 선수 학습 내용을 직접 지도하는 것이다. 선수학습 내용은 전학년 또는 하급학교에서의 학습내용을 본 단원에서 배울 내용과 연계하여 지도한다.

3) 수업의 실제

교수•학습 과정에서 가장 핵심이라고 할 수 있는 것이 수업의 실제 단계이다. 수업의 실제 단계에서 학습자들에게 주어진 학습 목표를 성취시키기 위하여 제공되는 여러 활동을 계획하는 것을 수업전략이라 한다. 즉 수업전략을 수립하는 일은 어떻게 하면 보다 쉽고 능률적으로 가르칠 것인가에 관한 구체적인 계획을 마련하는 활동인 것이다.

일반적으로 수업 활동은 도입과 전개 그리고 정리 단계로 나누어지는데 각 단계별로 무엇을 어떻게 할 것인가를 치밀하게 수립해야한다. 그래서 각 단계별로 고려사항을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 도입의 활동

도입 단계는 본 수업이 시작되는 단계로 비교적 짧은 시간 안에 이루어진다. 이 단계에서는 학습자로 하여금 학습에 대한 동기 유발을 위해 다양한 방법으로 학습자의 관심과 흥미를 불러일으킬 수 있도록 하며, 학습자가 성취해야 할 학습 목표를 구체적이고도 분명하게 제시해 주어야 하고 본시 수업에서 다룰 학습 과제와 관련 있는 과거의 학습 경험들을 회상시키거나 재생시켜 주는 활동이 이루어져야 한다. 이 때 선수학습과 본시학습이 관련성을 잘 결부시켜 주어야 한다.

(2) 수업의 본 활동

전개단계는 수업의 중심 활동으로 실제 본시 수업의 대부분은 이 단계에 해당된다. 전개에서는 학습 과제의 내용을 학생들에게 제시하고 다양한 학습 자료의 투입과 학습자의 적극적인 수업 참여로 주어진 수업목표를 달성하기 위한 교수•학습 활동이 이루어진다.

(3) 정리 활동

정리단계는 학습지도의 결론 부분이다. 이 단계에서는 학습할 내용을 요약정리하고 강화시키며 일반화시킬 수 있도록 한다. 즉 학습 과제에 대한 요약•정리와 학습한 내용은 연습을 통해 분명히 인식할 수 있도록 강화시키며 수업시간에 다루지 못했던 내용을 추가로 제시하여 학습자들의 학습 욕구를 충족시키고, 다음 시간에 학습할 내용이나 주제를 이번 수업 시간에 배운 것과 관련지어 제시하는 활동이다.

4) 학습결과의 평가

수업 목표를 학습자가 달성했는가를 확인하기 위한 평가에는 형성평가와 총괄평가가 있다 .

(1) 형성평가 : 수업이 진행되고 있는 상태에서 진행과정이 올바른지를 확인하는 평가이다. 교수•학습의 과정 중에 가르치고 배우는 내용을 학습자가 얼마나 잘 이해하고 있는지를 수시로 점검함으로써 교수•학습 과정을 개선하는데 기여하기 때문에 중요하다. 즉, 학습 진행 속도의 조절, 학습자의 학습동기 유발, 학습곤란점의 진단과 해결, 그리고 학습지도방법의 개선을 위한 기능을 제공한다.

(2) 총괄평가 : 교수•학습이 끝난 다음 교수목표 도달 상황을 종합적으로 판단하는 평가이다. 학습자의 성적을 산출하기 위해서 실시되는 평가로서 한 대단원의 수업이 종결되거나 또는 정기고사와 같은 시기에 실시한다. 이때 총괄평가는 선수학습 진단평가보다 질적인 면에서 교수 학습 목표에 더욱 부합되고 타당도가 높아야 하며, 양적인 면에서도 훨씬 많은 분량의 문항이 필요하다. 이 총괄평가는 수업계획의 성패 또는 효능도를 밝히기 위한 평가이다. 이러한 평가를 통해 얻어진 결과를 분석하여 다음 수업과정 작성시 각 단계별로 부족한 부분에 feed back를 가해 효율적인 수업모형이 되도록 힘써야 한다.

Ⅲ. 선수학습 내용

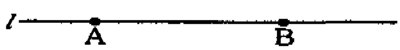
1. 점, 선, 면의 정의

모양, 크기를 갖지 않고 위치만을 정해주는 것을 점이라고 한다. 점이 지나간 자리를 선이라 하고 선이 움직여 이루어진 자리를 면이라고 한다. 이 점, 선, 면을 가리켜서 도형의 기본요소라고 한다.

평면기하학의 기본 개념으로서 점, 직선을 기본 대상으로 삼고 있으며, (점이 직선) 위에 있다, (점이 두 점) 사이에 놓여 있다, 포개다(합동)을 기본 관계로 하여 이 5개는 용어는 무정의 용어로 해서 정의하지 않고 사용한다.

1) 직선AB : 두 점 A와 B를 지나는 직선을 말한다.

기호: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BA}$, 직선 l



(1) 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나 뿐이다. 두 점이 오직 한 직선을 결정한다.

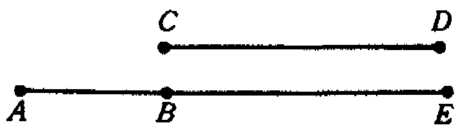
(2) 한 점 P를 지나는 직선은 무수히 많다.

2) 선분AB : 직선 AB의 점 A에서 점 B 까지의 부분을 말한다.

기호: $\overline{AB}$, $\overline{BA}$

(1) 두 점A, B와 AB 위의 A와 B 사이에 있는 점들로 이루어진 도형

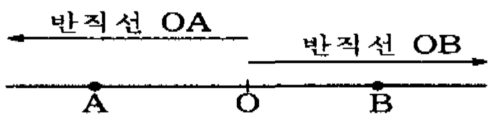
(2) 임의의 두 선분 AB, CD 에 대하여 B가 A와 E 사이에 있고, 선분 CD와 선분 BE가 합동인 점 E 가 유일하게 존재한다.



위의 내용은 "임의의 선분 AB는 한 주어진 선분 CD 와 합동인 선분 BE 에 의해서 연장될 수 있다."라고 표현할 수 있다.

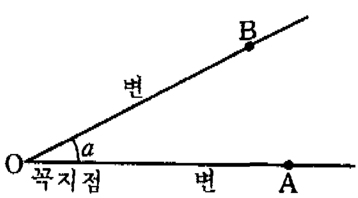
3) 반직선 OA : 직선 AB 위에 한 점 O를 잡으면 직선은 두 부분으로 나누어 진다. 이때, 각 부분을 반직선이라고 한다.

기 호: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$

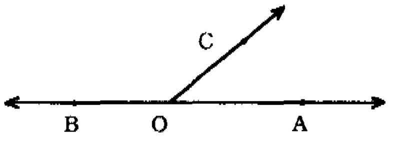


2. 각

한 점 O를 끝점으로 하는 두 반직선 OA, OB가 있고, A, O, B가 한 직선 위에 있지 않다고 하자. 두 개의 반직선으로 이루어지는 도형을 각이라고 한다. $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 로 이루어지는 각을 기호로 $\angle AOB$ 또는 $\angle BOA$ 와 같이 나타낸다. 만약 꼭지점 O에 대해 오직 한 각만이 주어졌다면, 간혹 $\angle O$ 라고도 쓴다. $\angle AOB$ 에서 점 O를 각의 꼭지점, 두 반직선 OA, OB를 각의 변이라 한다.



(1) 두 각 $\angle AOC$ 와 $\angle BOC$ 가 공통변 $\overrightarrow{OC}$ 를 갖는 또 다른 두 변 $\overrightarrow{OB}$ 와 $\overrightarrow{OA}$ 가 반대 방향의 반직선을 이루면 이 각들은 서로 보각이라고 한다.



(2) $\angle AOC$ 와 그의 보각이 크기가 같으면 그것은 직각이다.

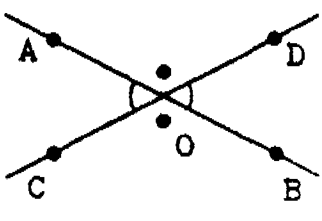
(3) 모든 직각은 서로 합동이다.

1) 맞꼭지각

두 직선 AB, CD가 한 점 O에서 만나 생기는 네 각 중 서로 마주보는 한 쌍의 각을 맞꼭지각이라 한다.

$\angle AOC$ 와 $\angle BOD$, $\angle AOD$ 와 $\angle BOC$ 는 서로 맞꼭지각이다.

맞꼭지각의 크기는 서로 같다.

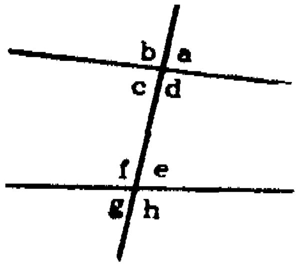


2) 동위각

두 직선과 한 직선이 만날 때 같은 위치관계에 있는 각 쌍의 두 각을 동위각이라 한다.

$\angle a$ 와 $\angle e$, $\angle b$ 와 $\angle f$

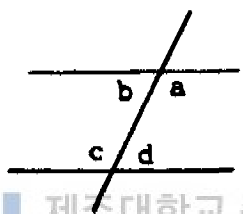
$\angle c$ 와 $\angle g$, $\angle d$ 와 $\angle h$



3) 엇각

두 직선과 한 직선이 만날 때, 서로 엇갈린 위치 관계에 있는 각 쌍의 두 각을 엇각이라 한다.

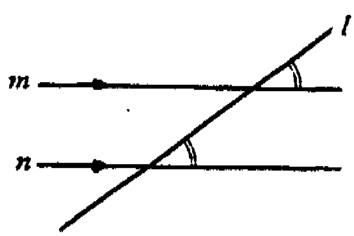
$\angle a$ 와 $\angle c$, $\angle b$ 와 $\angle d$



4) 평행선과 동위각

(1) 평행선이 한 직선과 만날 때 동위각의 크기는 서로 같다.

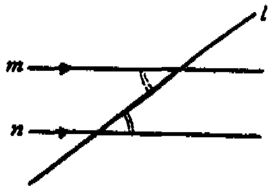
(2) 동위각의 크기가 서로 같은 두 직선은 평행하다.



5) 평행선과 엇각

(1) 평행선이 한 직선과 만날 때 엇각의 크기는 같다.

(2) 엇각의 크기가 서로 같은 두 직선은 평행하다.



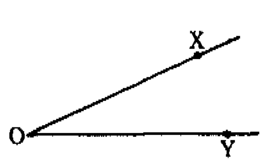
3. 작도

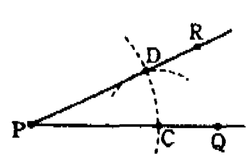
유클리드시대 이래 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그렸다. 자는 두 점을 연결하는 선분을 그리거나 선분을 연장하는 데 사용하고, 컴퍼스는 선분의 길이를 옮기거나 원을 그리는 데 사용한다. 이와 같이 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그리는 것을 작도라고 한다.

여기서 이들 두 도구만을 사용하여 각이나 선분과 관련된 기본적인 작도 방법을 몇 가지 확인해 보고자 한다.

1) 주어진 각과 크기가 같은 각 작도하기

(방법) 주어진 각 $\angle XOY$ 와 반직선 PQ 가 있다고 하자. 먼저 점 O를 중심으로 하는 원을 그려 각 변과의 만나는 교점을 각각 A, B라고 한다.



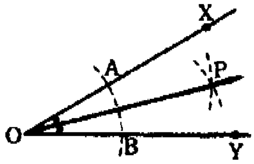


점 P를 중심으로 하고 $\overline{OA}$ 를 반지름으로 하는 원을 그려 $\overrightarrow{PQ}$ 와 만나는 점을 C 라고 한다. 점 C를 중심으로 하고, $\overline{AB}$ 를 반지름으로 하는 원을 그려 원

과 만나는 교점을 D라 한다. 이때, 점 P와 D를 지나는 반직선 PR을 그으면 $\angle RPQ = \angle XOY$ 이다.

2) 각의 이등분선 작도하기

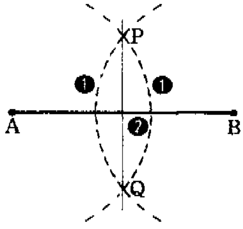
(방법) 각 $\angle A$ 가 주어져 있을 때, 점 A를 중심으로 하는 적당한 원을 그려 각의 변과 만나는 점을 각각 B, C 라 하자.



두 점 B, C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 같은 두 원을 그려서 그 교점을 D라 한다. 이때, 두 점 A, D를 잇는 반직선 $\overrightarrow{AD}$ 가 $\angle A$의 이등분선이다.

3)선분 AB의 수직이등분선 작도하기

(방법) 선분의 끝점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 같은 두 원을 그려서 그 교점을 각각 P, Q라고 하자. 여기서 두 점 P, Q를 잇는 직선을 긋는다. 이 때, $\overleftrightarrow{PQ}$ 는 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선이다.



4. 삼각형

1) 삼각형의 정의

일직선 위에 있지 않는 세 점 A, B, C에 의해 이루어진 도형을 삼각형ABC라고 한다. 기호로 $\triangle ABC$ 이라고 나타낸다.

(1) 각의 의한 삼각형의 분류

① 예각삼각형: 모든 각이 예각인 삼각형

② 직각삼각형: 한 내각의 크기가 직각인 삼각형

③ 둔각삼각형: 한 내각의 크기가 둔각인 삼각형

(2) 변의 의한 삼각형의 분류

① 부등변삼각형: 세 변의 길이가 서로 같지 않은 삼각형

② 이등변삼각형: 두 변의 길이가 같은 삼각형

③ 정삼각형: 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형

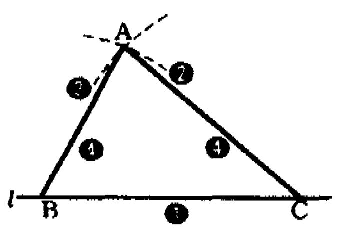
2) 삼각형의 작도

(1) 세 선분의 길이가 주어졌을 때

(방법) ① 한 직선 l 을 긋고, 그 위에 a 의 길이와 같은 선분 BC를 잡는다.

② 점 B와 C를 중심으로 하고 각각 c, b 를 반지름으로 하는 원을 그려 만나는 교점을 A라고 한다.

③ A와 B, 점 A와 C를 이으면 $\triangle ABC$ 가 구하는 삼각형이다.

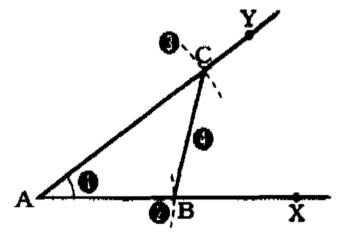


(2) 두 변의 길이와 끼인각이 크기가 주어졌을 때

(방법) ① $\angle A$ 와 같은 크기의 $\angle XAY$ 를 작도한다.

② 점 A를 중심으로 하고 각각 c , b 를 반지름으로 하는 원을 그려서 변 AX와의 교점을 B라고 하고 변 AY와의 교점을 C라고 한다.

③ 점 B, C를 이으면 $\triangle ABC$ 가 구하는 삼각형이다.

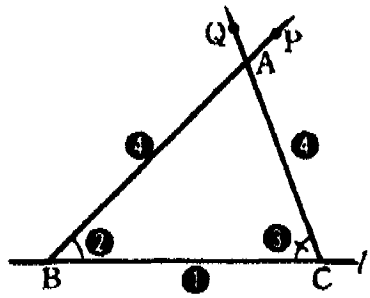


(3) 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어질 때

(방법) ① 한 직선 l 위에 a 와 같은 길이의 선분 BC를 잡는다.

② $\angle B$ 와 크기가 같은 $\angle CBP$ 와 $\angle C$ 와 크기가 같은 $\angle BCQ$ 를 작도한다.

③ $\overrightarrow{BP}$와 $\overrightarrow{CQ}$의 교점을 A라고 하면, $\triangle ABC$가 구하는 삼각형이다.



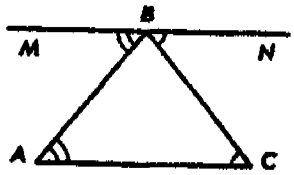
3) 삼각형의 기본 성질

(정리1) 삼각형의 3개의 내각의 합은 180^{o}이다.

(증명) 점 B를 지나 직선 AC에 평행인 직선을 긋자.

변 BC에 대하여 점M은 점 A와 같은 쪽에 있도록 잡고 변 AB에 대

하여 점 N은 점 C와 같은 쪽에 있도록 잡자.

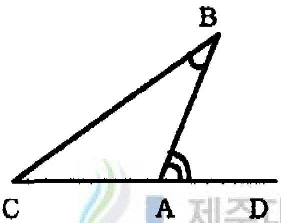


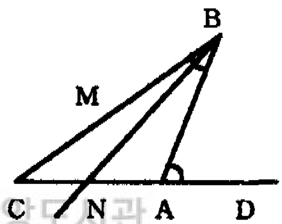
이 때, $\angle A = \angle MBA$, $\angle C = \angle NBC$.

$\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle MBA + \angle ABC + \angle NBC = 180^{o}$

(정리2) 삼각형의 외각은 이와 인접하지 않은 삼각형의 각각의 각보다 크다

(증명) 삼각형 ABC의 외각 BAD에 대해, $\angle BAD > \angle B$임을 보이자.





각 B와 BAD는 $\overline{CB}$, $\overline{AD}$가 $\overline{AB}$와 만나서 생기는 엇각이다.

직선 AD와 직선 BC가 만나므로, $\angle B \neq \angle BAD$ 이다.

그러므로 $\angle BAD < \angle B$이거나 $\angle BAD > \angle B$이다.

이 때, 첫 번째 경우가 불가능하다는 것을 증명하여 보자.

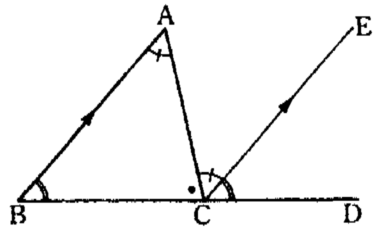
실제로 $\angle BAD < \angle B$라고 가정하면, 각 B의 내부 반직선 BM이 존재하여 $\angle ABM = \angle BAD$ 이다.

이 반직선은 선분 AC와 어떤 점 N에서 만난다. ; 모순

따라서 $\angle BAD > \angle B$ 이다.

(정리3)삼각형의 한 외각의 크기는 이것과 이웃하지 않는 두 내각의 합과 같다.

(증명)



$\triangle ABC$에서 변 BC의 연장선 위에 한 점 D를 잡고, 점 C에서 변BA에 평행인 직선 CE를 그으면 $\overline{AB} // \overline{EC}$이므로

$\angle A = \angle ACE$ (엇각), $\angle B = \angle ECD$ (동위각)

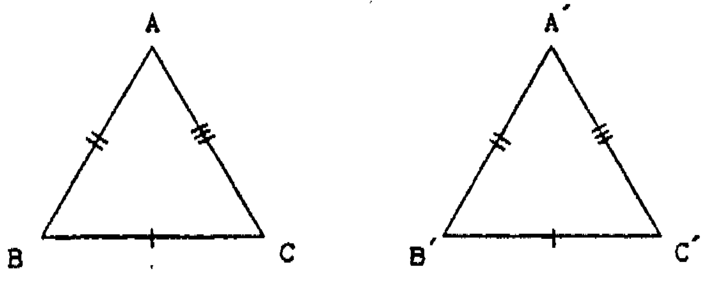
이 때, $\angle ACD = \angle ACE + \angle ECD = \angle A + \angle B$

따라서 삼각형에서 한 외각의 크기는 이것과 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

4) 삼각형의 합동조건

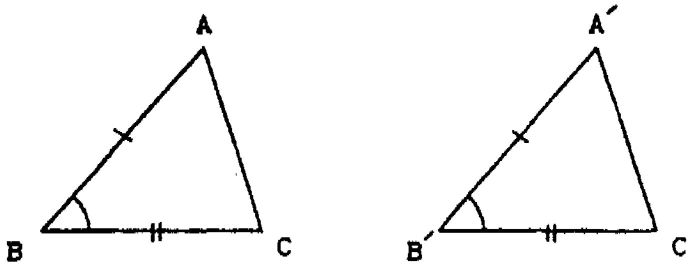
(1) 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때 (SSS합동)

즉, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$



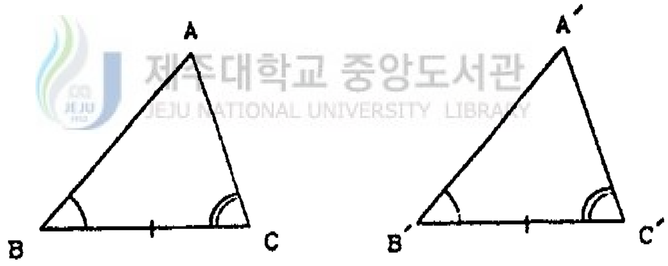
(2) 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 합동)

즉 $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, $\angle B=\angle B'$



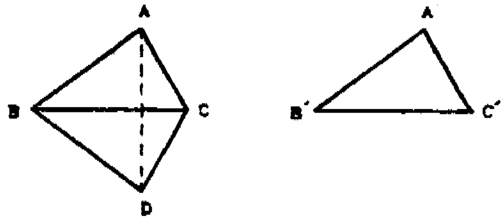
(3) 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝각의 크기가 각각 같을 때 (ASA합동)

즉 $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$



(정리4) 두 개의 삼각형 ABC, A′B′C′에 있어서 $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, $\overline{CA}=\overline{C'A'}$, $\overline{AB}=\overline{B'A'}$이면 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$이다. (SSS합동)

(증명) 변 BC에 대한 점 A의 반대쪽에 반직선 CD를 $\angle B'C'A'=\angle BCD$도록 긋고, 점 D를 $\overline{C'A'}=\overline{CD}$ 도록 잡아서 선분BD를 잇는다.



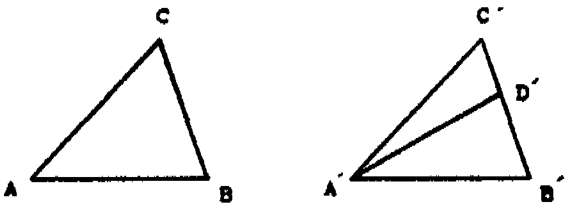
삼각형 ABD에 있어서 $\overline{AB}=\overline{A'B'}=\overline{BD}$ 이므로 $\angle BAD=\angle BDA$ 또 삼각형 ACD에 있어서 $\overline{AC}=\overline{A'C'}=\overline{CD}$이므로 $\angle CAD=\angle ADC$. 그런데 직선AD가 점 C를 지날 때는 $\angle BAC=\angle B'A'C'$이고 따라서 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$, 그렇지 않을 때는 직선 AD는 동시에 각 BAC 각 BDC의 내부에 있거나 또는 동시에 그 외부에 있다.

$\angle BAD=\angle BDA$, $\angle CAD=\angle CDA$ 이므로 $\angle BAC=\angle B'A'C'$이고 따라서 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$이다.

(정리5) 2개의 삼각형ABC, A'B'C'에 있어서 $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ 이고 $\angle BAC=\angle B'A'C'$이면 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$이다. (SAS합동)

(증명) 다른 두 쌍의 각은 각각 같으므로 $\overline{BC}=\overline{B'C'}$인 것만을 증명하면 된다. 지금 $\overline{BC}=\overline{B'C'}$가 아니라고 가정하고 직선 B'C'상에서 점 B'로부터 선분 B'D'를 $\overline{BC}=\overline{B'D'}$되게 잡으면 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'D'$에 있어서 $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{BC}=\overline{B'D'}$이고 $\angle ABC=\angle A'B'D'$이므로 $\angle BAD=\angle B'A'D'$

이다.

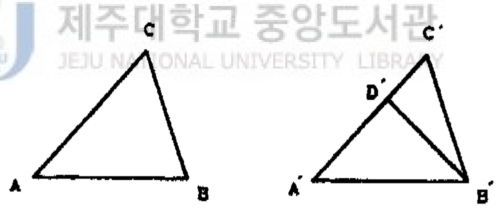


그러므로 $\angle BAC$와 같은 두 개의 각 $\angle B'A'C'$, $\angle B'A'D'$를 직선 A'B'의 같은 쪽에 잡을 수 있게 되고 이것은 모순이므로

따라서 $\overline{BC} = \overline{B'C'}$이다.

(정리6) 두 삼각형 ABC, A'B'C'에 있어서 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle CBA = \angle C'B'A'$ 이면 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ 이다.(ASA합동)

(증명) 두 변 $\overline{AC}$, $\overline{A'C'}$가 합동이 아니라고 하고 직선 A'C'상에서 점 A'로부터 점 C'쪽에 선분 A'D'를 선분 AC와 합동이 되게 잡는다.



그러면 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'D'$에 있어서 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'D'}$이고 $\angle BAC = \angle B'A'D'$이므로 $\angle ABC = \angle A'B'D'$이다.

따라서 $\angle ABC$와 합동인 각을 변B'A'의 같은 쪽에 $\angle A'B'C'$ 및 $\angle A'B'D'$인 2개를 잡을 수 있게 되는 셈이다. 이것은 모순이므로 $\overline{AC} = \overline{A'C'}$이다.

$\triangle ABD$, $\triangle A'B'C'$에 있어서 $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$이고 $\angle BAC = \angle B'A'C'$이므로 두 삼각형은 합동이다.

5. 증명방법 및 기하학적 문제해결

1) 증명의 뜻

증명의 개념은 수학의 연구에서 대단히 중요하다. Smith와 Henderson은 '증명의 개념은 수학에서 중추적인 개념들 중의 하나이다. 증명은 우리가 개념의 함의를 검증하도록 하고, 나아가 개념들의 관계를 확립하게 하며, 새로운 지식의 발견을 이끈다'라고 말하고 있다.

또한 수학 사전에는 증명을 다음과 같이 정의하고 있다.

"어떤 명제가 참임을 밝히는 논리적 추론, 또는 분명히 입증되었거나 또는 기하학적으로 인정된 공리에 따라 가정된 논리적 과정에 의해 증명해야 할 것을 보이는 과정."

즉, 주어진 정보, 정의, 정리 등의 형태에서 자료를 얻을 수 있어야 하며, 이들 자료를 이용하여 명확한 결론을 이끌어 낼 수 있어야 한다는 것이다.

현재 지도되고 있는 중학교 2학년 교과서에 실려있는 증명의 정의를 몇 가지 알아보면 다음과 같다.

"명제가 참인 것을 밝히기 위하여, 가정에서 출발하여 이미 알고 있는 도형의 성질을 이용해서 결론으로 이끈 것이다. 이와 같이, 어떤 명제가 참인 것을 밝히는 것" (구광조, 지학사)

"어떤 참인 명제의 가정에서 출발하여 기본이 되는 성질이나, 이미 옳다고 밝혀진 성질을 바탕으로 조리있게 결론으로 이끌어 가는 설명" (박두일외, 교학사)

"어떤 사실이 성립하는 이유를 실험이나 경험에 따르지 않고, 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 밝혀진 성질들을 이용하여 가정에서 결론으로 정확하게 설명하는 것" (김연식외, 동아출판사)

"이미 잘 알려진 사실이나 성질 등을 이용하여 어떤 명제의 가정에서 결론으로 이끌어내는 과정을 설명하는 것" (박배훈외, 교학사)

위와 같이 여러 수학자들의 견해를 종합해 보면, 증명은 어떤 명제가 참임을 보이기 위해 가정에서 논리적인 과정을 통해 결론을 유도하는 것이며, 증명은 새로운 발견을 이끌 수 있고, 어떤 진실에 대한 마음을 확신시켜 믿음을 낳게 하며, 형식화에 기여하고, 또한 어떤 증명은 수학의 발전에 따라 변화할 수 있는 살아있는 과정임을 알 수 있다.

2) 증명방법

기하의 문제를 풀이하는 방법은 여러 가지 형태로 나타날 수 있으나 크게 종합적 방법과 분석적 방법으로 나눌 수 있다.

문제풀이에서 출발점이 주어진 것이라면, 그러한 방법을 종합적 방법이라 부르며, 이 경우에 문제를 풀기 위해 주어진 것들은 문제의 구하는 것(답)을 얻기 위해 계속해서 변형된다. 한편, 문제해결의 출발점이 구하는 것이면, 이러한 방법은 분석적 방법이라고 부른다. 이 경우에는 구하는 것을 계속 변형시켜 주어진 것으로부터 얻기 쉬운 형태로 바꾼다. 분석적 방법에는 1)상승분석, 2)하강분석 3)대수적 방법 등이 있다.

(1) 종합적 방법

종합적 방법은 주어진 조건으로부터 우리가 원하는 새로운 결론을 이끌어 내는 문제 풀이 방법을 말한다. 주어진 조건으로부터 논리적인 추론을 통해서 얻을 수 있는 정보를 "추가 정보"라고 하면, 종합적 방법의 본질은 문제의 주어진 조건에서 새로운 결론(추가 정보)을 얻고, 다시금 얻어진 추가 정보나 주어진 조건으로부터 두 번째 추가 정보를 얻는 과정을 되풀이해서 결국엔, 우리들이 구하려는 값이나 증명하려는 것을 직접적으로 얻을 수 있는 명제에까지 도달하는 것이다. 이때, 학습자들이 가지고 있는 기존 지식들이 큰 역할을 한다. 이것을 도식화하면 다음과 같다.

주어진 것 ⇒ 추가정보 ⇒ ... ⇒ 결론(구하는 답)

기존의 알고 있는 수학적 지식이나 절차들을 활용

일반적으로, 종합적 방법은 다음과 같은 두 가지 형태로 사용된다. (1) 어렵지 않은 문제를 풀 때, (2) 어려운 문제의 풀이를 종합적인 방법으로 기술할 때.

문제의 풀이를 읽으면서, 학생들에게는 다음과 같은 물음들이 생겨난다. 왜 증명과정에서 두 점을 연결하는 보조선을 그어야 하는가? 왜 두 개의 삼각형을 가지고 보는가? 등등. 이러한 것들은 종합적인 방법, 그리고 문제풀이의 종합적인 기술 방법의 단점을 분명하게 드러내고 있다. 즉, 문제 해결 과정에 대한 근거를 제시해 주지 못한다는 것이다.

종합적인 방법을 '분석'으로부터 분리하여 독립적으로 사용한다면, 문제해결에 있어서 그리 효과적이지 못한다. 논리적인 측면에서 본다면, 이 방법은 주어진 조건들, 이미 알려진 수학적 사실들로부터 출발하여 중간 결과들을 거쳐 결국엔 우리가 증명하려는 것에 도달하기 때문에 연역적인 논리 전개 방법의 중요한 구성 요소라고 볼 수 있다.

문제해결에 대한 종합적인 진술은 간단, 명료하기 때문에 수학적 이론의 진술이나 교과서, 혹은 참고 도서 등의 기술에 많이 사용된다. 그러나, 이와 같은 방식으로 그대로 학습 내용을 전달하는 것은 효과적이지 못하며, 간혹 수학은 인위적이고, 이해하기 어려운 것이 되고 만다. 그래서 종합적인 방법을 통해서는 보조선을 긋거나, 증명 과정에 대한 계획을 탐색할 때 동기 부여가 거의 불가능하기 때문에 학생들에게 수학이 더욱 인위적이고, 어려운 교과로 받아들인다.

이러한 종합적인 방법의 단점을 요약해보면, 문제해결 탐색의 근거를 제시해 주지 못하며, 다른 방식으로 하지 않고, 왜 그렇게 했는가?에 대한 답을 주지 못하고, 우리가 구하는 목표(답)을 향해 갈 때, 주어진 것과 구하는 것 사이에서 나타나는 많은 추가 정보들 중에서 필요한 것을 고르는 데 어려움이 있다.

(2) 분석적 방법

① 상승분석

상승분석에서 문제해결의 출발점은 증명하거나 찾으려는 결론이다. 이 문제해결 방법의 본질은 구하려는 결론에 대한 충분조건을 찾고, 얻어진 충분조건에 대해서 다시금 충분조건을 구하는 등등의 과정을 반복한다. 즉, 어떤 명제A가 성립한다는 것을 보이기 위해, 명제 A에 대한 충분조건 B를 찾고, 명제 B가 성립한다는 것을 보이기 위해 충분조건 C를 구하는 등등의 과정을 거듭하여, 주어진 조건이나, 기존의 수학적 지식으로부터 쉽게 유도할 수 있는 명제가 얻어질 때까지 이러한 과정을 반복한다. 이것을 도식하면,

구하는 것(결론) ⇐ 중간명제 ⇐ • • • ⇐ 명제(문제의 주어진 것이나 기존의 수학적 지식으로부터 쉽게 유도할 수 있는 명제)

② 하강분석

하강분석은 상승분석과 마찬가지로 문제해결의 출발점이 우리가 구해야 하는 결론이다. 상승분석에서는 탐색과정에서 결론에 대한 충분조건을 찾았지만, 하강분석에서는 결론에 대한 필요조건, 즉 우리가 원하는 결론에서 또 다른 새로운 결론을 구하는 과정을 반복하게 된다. 하강분석에는 불완전분석과 귀류법이 있다.

㈀ 불완전분석

불완전분석에서는 우리가 증명하려는(구하려는) 결론이 옳다고 가정하고, 그 결론을 변형시켜 다른 새로운 결론을 얻는 변형을 계속하여, 문제의 주어진 조건이나 기존의 지식으로부터 쉽게 유도할 수 있는 결론을 유도하거나; 구하려는 결론을 이미 알고 있는 수학적 지식을 이용해 다른 방식으로 구하여, 참이라고 가정한 주어진 결론과 비교하여 이미 새로운 결론을 유도한다. 그러나, 이 결론을 증명할 수 있다고 해서, 처음에 주어진 결론이 항상 참이라고 (증명할 수 있다.) 말할 수는 없기 때문에 이러한 분석을 불완전 분석이라고 한다.

가령, A라는 명제를 증명한다고 하자. 이때, 이 명제 A가 옳다고 가정하고, 이 명제로부터 새로운 결론 B를 그리고 또 다시 C, D, • • •, X 등등을 유도하는데, 최종적으로 얻은 결론 X는 주어진 조건이나 기존의 수학적 지식으로부터 쉽게 유도할 수 있는 것(즉, 참인지 거짓인지 알 수 있는)이어야 한다. 이때, 몇 가지 가능성이 발생한다.

㉠ 틀린 결론, 즉 모순이 발생하는 경우, 이때는 우리의 가정 (결론 A가 옳다)이 잘못되었다는 것을 의미한다. 즉 어떤 명제가 거짓임을 증명하는 하나의 방법으로써 불완전분석이 이용될 수 있다.

㉡ 올바른 결론이 유도되었을 경우, 이 경우에는 반대방향으로의 논리전개가 가능한가를 더 살펴보아야 한다. 즉 모든 명제가 가역적이면, A는 올바른 것이고, 이로부터 문제의 증명(풀이)을 유도할 수 있다. 얻어진 명제들 중에서 비가역적인 것이 있으면, 불완전분석에 의해서는 풀이 방법을 찾을 수 없다는 것을 의미하기 때문에, 다른 문제해결 방법을 찾아야 한다. 즉, 이 불완전분석에 의해 문제해결 방법을 찾는 것이 막혀버리게 된다.

(ㄴ)귀류법

귀류법은 전통적으로 다양한 기하 문제의 증명에 많이 사용된 방법들 중의 하나이다. 귀류법은 증명하려는 명제가 거짓이라는 가정에서부터 문제 풀이가 시작된다. 가정(구하는 결론이 거짓이라는)과 이미 알고 있는 기하학적 지식으로부터 새로운 결론(필요조건)을 구하고, 또 다시 새로운 결론을 얻는 과정을 계속하여, 우리가 이미 알고 있는 기하학적 사실이나 문제에서 주어진 것들에 모순되는 결론을 유도함으로써, 우리들의 처음 가정이 잘못됨을 보여, 주어진 명제가 참임을 증명하는 것이다.

(3) 대수적 방법

대수적 방법으로 문제를 풀 때 우선, 문제의 조건을 이해하고, 구하는 미지의 값을 문자로 치환하여, 다른 미지수들과 주어지는 것들을 선택된 미지수로 나타내고, 방정식이나 연립방정식을 세워서 문제를 푼다.

3) 효율적인 증명 지도 방법에 대한 고찰

수학교육의 중요한 목표인 수학적 사고력 신장에 있어서 증명은 중요하고 미래 사회에 적응할 수 있는 힘을 길러줄 수 있다. 여기서 수학적 사고력의 신장을 위하여 추론 능력이 길러져야 하는데, 도형의 성질을 연역적으로 증명하는 것은 필수적인 내용중의 하나이다. 그래서 도형을 효율적으로 증명하기 위해 인지해야

할 사항을 알아보면 다음과 같다.

(1) 용어의 정확한 정의 알기

용어의 불분명한 정의가 일으키는 혼동을 피하기 위해, 용어의 정확한 정의를 알도록 한다. 정의와 성질을 정확하게 구분하도록 한다.

(2) 증명의 뜻 및 방법 익히기

일반적으로 받아들여진 공리. 정의, 이미 증명된 정리, 약속된 논리 등을 이용하여 당연스럽게 받아들였던 사실적인 성질등이 참임을 구체적으로 설명하고 보는 활동을 통하여 증명의 뜻을 알고 증명하는 방법을 익힌다. 또 문제를 그림이나 표 등으로 나타내는 방법도 문제의 이해를 위한 좋은 방법이 될 수 있다. 수학이 갖고 있는 추상을 직접 눈으로 볼 수 있게 그림으로 표현하는 방법은 개념의 이해에서도 강조 되어온 방법이다.

문제를 이해하는데 있어서 가정과 결론의 구분이 중요하고 또한 증명의 방향을 생각하기 위한 수단적인 것이므로 증명하는 방향, 과정에 중점을 두어야 한다.

(3) 이미 증명된 정리는 다른 명제를 증명할 때 활용할 수 있도록 그 내용의 이해에 중점을 둔다.

6. 도형영역의 학년별 내용분석

1) 내용체계표

<표1> 초등학교 도형영역 내용분석

내용 / 학년	기본도형	평면도형	입체도형
초등학교 1학년		• 모양의 특징알기 (삼각형,사각형,원)	• 모양의 특징알기 (기둥, 구, 직육면체)
2학년	• 선분, 직선	• 구성요소 (삼각형, 사각형)	• 구성요소(직육면체) • 여러가지 물건의 모양 알아보기
3학년	• 각, 직각	• 직각삼각형 • 이등변삼각형 • 정삼각형, 직사각형 • 정다각형, 원의 성질	
4학년	• 수직,평행 • 평행선의 성질	• 예각, 둔각삼각형 • 삼각형의 내각의 합 • 평면도형의 둘레와 넓이 • 사각형의 성질	
5학년	• 예각, 둔각	• 도형의 합동, 대칭 (대칭이동, 선대칭,점대칭, 평면도형의 대칭성)	• 직육면체, 정육면체의 겨냥도와 전개도
6학년		• 도형의 닮음 • 원의 넓이,원주,부채꼴의 넓이, 호의 길이	• 기둥의 겉넓이와 부피 • 각뿔, 원뿔, 회전체, 구

<표2> 중학교 도형영역 내용분석

내용 / 학년	기본도형	평면도형	입체도형	도형의 관찰
중학교 1학년	• 점, 선 ,면, 각 • 점, 직선, 평면의 위치관계 • 평행선의 성질	• 삼각형의 결정조건 • 도형의 합동 • 삼각형의 합동조건 • 원의 기본 성질 • 다각형 • 부채꼴의 넓이와 호의 길이	• 다면체 • 회전체 • 입체도형의 겉넓이와 부피	• 단일폐곡선 • 선형도형의 성질 • 뫼비우스의 띠 • 오일러의 공식
2학년		• 삼각형의 성질 • 사각형의 성질 • 도형의 닮음 • 닮음의 응용	• 입체도형의 닮음 • 닮음의 활용	
3학년		• 피타고라스의 정리 • 원의 성질 • 삼각비의 활용		

위의 내용 체계표를 통해 확인할 수 있는 사실은 다음과 같다.

(1) 초등학교 저학년에서는 도형에 관한 용어를 설명하는 데 있어서 아주 구체적이고 사실적으로 제시된다.

(2) 초등학교 고학년에서는 저학년에서 배운 기본적인 정의를 통해 아주 간단한 성질을 이끌어 내고 있다.

(3) 중학교 1학년에서는 기본도형, 평면도형, 입체도형, 도형의 관찰 등 모든 부분을 골고루 다루고 있으며, 직관적인 고찰을 통해 기본 도형의 성질을 파악하여 증명에의 기초가 되게 하며, 도형의 위계적 성질도 증명없이 간단히 취급하고 있다.

(4) 2학년에서는 앞에서 배운 도형의 성질과 논리적 사고를 통해 추론의 의의와 방법을 이해하고 논리적으로 표현하는 능력을 키우는 데 있으며, 닮음의 활

용처럼 일상생활의 장면에서 적용을 시도하고 있다.

(5) 3학년에서는 1,2학년 때 배운 삼각형의 성질을 통해 피타고라스의 정리를 증명과 더불어 제시하고 있고, 직관이나 수학적 추론에 의하여 원의 성질을 고찰하고 논리적으로 사고하고 표현하는 능력을 신장시킬 수 있도록 하였으며, 삼각비의 정의와 이에 대한 이해, 응용도 다루고 있다.

Ⅳ. 연구의 설계

1. 연구의 대상

제주시내 S여자중학교 2학년 6개 반을 3개 군으로 나눠 각 군별로 심화반, 보통반 2개 수준으로 수준별 이동식 수업을 위한 반 편성을 한 후 보통반 3개 학급 114명을 대상으로 하였다.

구분	1군		2군		3군	
	심화반	보통반	심화반	보통반	심화반	보통반
인원	38	38	37	38	37	38

2. 수준별 이동수업을 위한 반 편성

1) 본래의 학급 1・2반을 1군, 3・4반을 2군, 5・6반을 3군으로 구분하였다.

2) 각 군을 학업성취도에 따라 보통반과 심화반 2개의 수준으로 구분하여 각각 3개 반씩 편성하였다.

3) 수준별 반 편성 작업의 기초로 1차 반 편성은 수준별 이동식 수업 안내 가

정 통신문을 발송하고 학생들이 희망하는 반 신청서를 접수하여 반 편성을 실시하였으나 심화반인 경우 매우 수준이 높은 단계로 인식하여 많은 학생들이 심화반 신청을 기피하고 보통반으로 지원하는 현상이 두드러졌다. 그래서 1학년말 고사 수학성적을 참조하여 중간점수 이상의 학생을 심화반으로, 그 아래 점수의 학생을 보통반으로 신청하도록 교과지도교사와의 상담을 통하여 인원수를 재조정하여 학급을 편성하였다.

4) 학급의 재편성은 학생들의 학습 성취 욕구를 충족시키기 위하여 1년간 반을 고정시키지 않고 정기고사가 끝난 후 5월, 7월, 10월 학급을 다시 재편성 운영하였다. 그리고 학급을 재편성할 때 다른 반으로 옮기기를 원하는 학생은 교과담당교사와 상의하여 가능한 범위 내에서 학생의 희망을 최대한 수용하여 편성하였다.

3. 연구의 기간 및 절차

1) 기간: 1999년 3월 ~ 2000년 2월 (1년간)

2) 자료 수집 및 문제 분석: 1999년 3월 ~ 1999년 9월 30일

3) 연구실행: 1999년 10월 1일 ~ 1999년 11월 31일

4) 결과 분석: 1999년 12월 1일 ~ 2000년 3월 31일

4. 연구의 개요

본 연구는 실험반 1,2와 비교반을 구분하여 세 집단의 1학기말 성적을 기준으로 동질성을 확인하였다. 다음으로 소단원별로 교재를 분석하여 본시 수업에 앞서 활용할 선수학습 요소를 발췌하여 선수학습지를 제작하고 이를 이용하여 선수학습을 지도한 집단과 일반적인 교사 주도에 의하여 기존의 수업방식으로 지도한 집단 간의 형성평가를 실시하고 그 효과를 분산분석을 통해 비교 분석하였다. 형성평가는 소단원이 끝나는 시점을 기준으로 하고 시험을 실시하였다.

1) 교재 분석

현행 중학교 2학년 도형의 성질 단원에 대한 교과서 및 교사용 지도서를 참고하여 교재를 분석하였다.

<표 3 > Ⅵ.도형의 성질[(주)교학사, 중학교 수학2]

단 원		차시	교과서 쪽수	지도내용	용어와 기호
1. 명제와 증명	§1. 명제와 정의	1~2	192~195	• 명제, 증명, 정리, 정의의 뜻 • 명제 p→q에서의 가정과 결론 • 명제 p→q의 역	명제, 가정, 결론, p→q, 역
	§2. 정리와 증명	3	196~198	• 용어의 정의 • p→q • 증명 • 정리의 뜻	증명, 정리
	연습문제	4	199	• 명제의 참, 거짓 및 가정, 결론, 명제의 역	
2. 삼각형의 성질	§1. 이등변삼각형	5~6	200~203	• 이등변삼각형의 뜻 • 이등변삼각형과 밑각에 대한 성질	이등변삼각형, 꼭지각, 밑변, 밑각
	§2. 직각삼각형	7~8	204~206	• 직각이등변삼각형의 뜻 • 직각삼각형의 합동조건 및 이에 관련된 성질	빗변
	§3. 삼각형의 외심과 내심	9~10	207~214	• 외접원, 내접원의 뜻 • 외접다각형, 내접다각형의 뜻	외접, 내접, 외접원, 내접원, 외심, 내심
	연습문제	11	215	• 이등변삼각형과 직각삼각형의 합동조건	
3. 사각형의 성질	§1. 평행사변형	12~13	216~222	• 평행사변형의 성질 • 평행사변형이 되는 조건	평행사변형 □ABCD
	§2. 여러 가지 사각형	14~16	223~229	• 직사각형, 마름모, 정사각형의 성질 • 사다리꼴, 등변사다리꼴의 성질	직사각형, 마름모, 정사각형, 등변사다리꼴
	연습문제	17	230	• 여러 가지 사각형에 대한 성질 및 활용	
기초 확인 문제 종합 확인 문제 종합 심화 문제 평가문제		18~20	231~234	• 명제, 삼각형의 성질, 사각형의 성질에 대한 종합적인 문제	

2) 교재분석 및 선수학습 요소 추출

교재 분석을 통해 선수학습지를 만드는 선수학습 요소를 추출하여 목록으로 분류하였다.

<표 4 > 선수학습 요소 추출

중단원	소단원	선수학습 요소
2. 삼각형의 성질	§1. 이등변삼각형	• 이등변삼각형의 정의 • 삼각형의 합동조건 • 각의 이등분선 작도 • 선분의 수직이등분선
	§2.직각삼각형	• 삼각형의 합동조건 • 이등변삼각형의 성질 • 수선의 작도
	§3.삼각형의 외심과 내심	• 평행선의 성질 • 수직이등분선의 작도 • 각의 이등분선의 작도 • 삼각형의 합동조건 • 삼각형의 세 내각의 합
	연습문제	• 평행선의 성질 • 삼각형의 합동조건
3, 사각형의 성질	§1.평행사변형	• 평행선에 대한 성질 • 삼각형의 합동조건 • 각의 이등분선 작도 • 수선의 작도
	§2. 여러 가지 사각형	• 평행선의 성질 • 삼각형의 합동조건 • 삼각형의 성질
	연습문제	• 삼각형의 합동조건 • 평행선에 대한 성질 • 맞꼭지각에 대한 성질

5. 연구대상의 사전조사

선수학습이 도형 학습의 형성평가의 성취도에 미치는 영향을 알아보고자 하는 실험을 실시하는 데 있어서 실험대상자의 사전조사로서 2학년 1학기말고사(중간고사와 기말고사) 성적을 비교하였다. 그리고 실험반과 비교반을 선정하여 그중 실험반에 본시 수업과 연관된 선수학습의 자료를 이미 학습된 내용 중에서 발췌하고 '선수학습지'를 제작 이용하여 선수학습을 시행한 후 형성평가를 치르고 선수학습을 받지 않은 반과 비교하여 형성평가의 차이를 알아보고자 한다. 이때, 시험의 내용은 같게 하여 시험의 난이도로 인해 영향을 줄 수 있는 가능성을 배제하였다.

먼저 연구 대상 각 반의 1학기말고사 성적을 표를 통하여 비교하여 보면 다음과 같다.

<표 5 > 보통반 1학기말 성적 분포표

대상 / 급간	비교반	실험반1	실험반2
10점이상~20점미만	2	5	2
20 ~ 30	9	6	7
30 ~ 40	5	4	4
40 ~ 50	5	4	5
50 ~ 60	7	5	7
60 ~ 70	8	10	10
70 ~ 80	1	3	2
계	37	37	37

위의 <표5>에 나타난 보통반 학생들은 1학기말고사 수학교과 학년 전체 평균 60.18점을 기준했을 때 이보다 낮은 점수를 받은 구간에 속하는 학생은 전체의 약 34%에 해당됨을 확인할 수 있었다.

다음으로 각 반의 1학기말고사의 평균과 표준편차를 비교해보고 그 차이가 유의하게 나타나는지에 대해 F값과 P값을 계산하여 알아보았다.

<표 6 > 사전검사의 반별 비교

구분 / 집단별	인원수	평균	표준편차	F-value	P-value
비교반	37	44.03	17.17	0.275	0.760
실험반1	37	45.14	19.11		
실험반2	37	47.09	17.75		

본 연구에 사용된 연구대상자의 사전검사는 2학년 1학기말고사(중간고사와 기말고사의 평균)의 보통반 학생들의 수학교과 성적이다.

각 반의 1학기말고사의 차이가 통계적으로 유의할 만한 것인지에 대하여 개인용 PC의 응용프로그램인 Excel을 사용하여 분산 분석을 실시하였다. 시행 결과로서 F값이 0.275이고 P값이 0.760으로서 유의수준 5% 이내에서 1학기말고사의 평균 성적이 차이가 나지 않음을 알 수 있다.

위의 사전조사 결과를 통하여 우리는 선수학습의 효과를 알아보는 실험에 있어서 실험대상자 간의 차이가 유의하지 않음을 알 수 있다. 즉 실험대상의 차이에서 오는 결과에 대해서는 무시할 수 있으며 선수학습을 실시하는 데 있어서는 동일한 실험집단으로 간주할 수 있다.

Ⅴ. 연구 결과 검증 및 해석

1. 검증방법

이미 학습한 내용과 연관된 교과내용 부분의 진행되는 본시 수업시간마다 선수학습에 관한 내용을 발췌하여 실험반에 '선수학습지'를 제시하고 학습한 후 본시학습에 대한 출발점 행동과 학습의 전이가 잘 이루어질 수 있도록 지도한 후 소단원이 끝날 때마다 사후검사로 형성평가를 실시하였다.

형성평가의 문항은 세 집단 모두에게 학습한 기본적인 요소를 선별하여 시험문항을 작성하여 소단원별로 2번의 시험을 실시하였다. 2번에 걸쳐 시행한 시험성적을 서로 합산하여 비교반과 실험반에 대한 검증을 실시하였다.

사후검사에서 비교반 및 실험반의 검사 문항은 같게 하여 난이도의 차이로 인해 영향을 줄 수 있는 요소를 배제하였다.

2. 검증결과 및 해석

먼저 실험대상자들에 대한 사후검사 결과의 각 급간별 점수 분포를 살펴보면 다음과 표와 같다.

<표 7 > 형성평가의 도수분포표

급간 \ 반	비교반	실험반 1	실험반 2
90이상~100미만	4/4	7/7	9/9
80이상~90미만	6/10	8/15	4/13
70이상~80미만	5/15	6/21	9/22
60이상~70미만	6/21	8/29	6/28
50이상~60미만	3/24	1/30	5/33
~ 50점미만	14/38	8/38	5/38

<표7>에서 알 수 있듯이 형성평가 성적이 70점이상 급간에 속하는 학생의 수를 비교해보면 비교반보다 실험반 1, 2에서가 그룹의 학생수가 높게 나타나고 있고, 반면에 50점 미만인 그룹의 학생수는 비교반이 실험반에 비해 심지어 2배 이상으로 많은 분포를 하고 있는 것을 확인할 수 있다. 따라서 선수학습의 유무에 따라 많은 차이를 보여주고 있어 선수학습이 전체적으로 볼 때 효과적임을 나타내고 있다.

다음으로 사후검사에 대한 반별 평균과 표준편차에 대한 비교를 하여 보면 다음과 같다.

<표 8 > 사후 검사의 반별 비교

집단별 \ 구분	인원수	평균	표준편차
비교반	38	58.83	25.49
실험반1	38	69.51	20.30
실험반2	38	71.19	18.25

위의 <표8 >에서 알 수 있듯이 선수학습을 실시한 후 사후검사를 통한 실험반 1,2의 형성평가 성적이 비교반과 비교하여 보면 평균점수가 월등히 높음을 알 수 있다. 이러한 사실은 학교 정기고사 성적이 낮은 보통반 학생들에게도 선수학습한 내용이 본시 학습에 전이가 양호하게 이루어지고 있고 학습효과에 큰 영향을 미친다고 해석할 수 있다.

또한 사후검사 결과를 개인용 PC의 응용프로그램인 Excel 프로그램을 이용하여 분산분석을 통해 확인하면 다음과 같이 나타나고 있다.

<표 9 > 선수학습유무에 따른 사후 성적 차이 분산분석 비교자료

요인	제곱합	자유도	불편분산	F-value	P-value
성적간변동 (급간변동)	3412.498421	2	1706.249211	3.670	0.029
성적내변동 (급내변동)	51607.008947	111	464.928009		

위의 <표9>에서 P-value가 0.029로 형성평가 성적의 차이가 선수학습이 성적에 차이가 없다는 귀무가설을 유의수준 5%하에서 기각한다. 즉 위의 결과로서 선수학습이 유무가 형성평가에 영향을 미친다는 사실을 확인할 수 있다.

이는 계통성이 강한 수학교과에서 선수학습이 결손으로 학업성적이 부진하여 수학교과 학습을 포기하고 학습의욕을 상실한 학생들이 많은 현 실정에서 선수학습을 강화시킴으로써 학습의 전이를 높게 만들어 흥미를 유발시키고 적극적인 교수학습에의 참여를 유도할 수 있을 것이다. 또한 학생들이 수학교과 학습에 긍정적인 변화와 동기 부여가 제공되어질 수 있겠다.

Ⅵ. 결론

본 연구는 중학교 수학 교과를 학습하는 과정에서 수업시간에 학습의욕이 떨어진 보통반 학생들을 대상으로 조금이나마 지루함을 덜어주고, 수학 교과에 대한 흥미를 유발시켜보고자 하는데 그 목적이 있다. 우리는 수학교과를 지도함에 있어서 특히 도형 분야에 학생들이 어려워하고 싫어하는 경향이 높아 부담을 많이 느끼고 있음을 알고 있다. 그래서 본 연구에서는 선수학습지를 활용한 선수학습을 통해 도형 학습에 대한 학생들의 흥미를 유발시켜 그들의 부담을 덜어주고 수학 학습에 대한 성취동기를 심어주는 계기를 찾아보았다.

본 연구를 통해서 나타난 결과를 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 선수학습을 실시한 실험집단이 선수학습을 하지 않은 학습집단보다 수학교과 문제해결에 있어 효과적임이 밝혀졌다. 따라서 위계성과 계통성이 강한 수학교과에서 수학교과에 대한 학습의욕의 상실과 흥미를 잃은 학생들이 많은 현실정에서 선수학습을 강화하여 학습결손을 보충해야만 할 것이다.

둘째, 보통반 학생들에게도 선수학습을 통한 적극적인 학습의 전이가 학습에 대한 성취 동기부여와 흥미를 유발시켜 학업성취에 영향을 미친다는 것을 확인할 수 있었다.

셋째, 선수학습을 받은 실험집단 중에서도 몇몇 학생들은 학습결손이 심해 많은 선수학습자료의 투입이 이루어져야하고 그들을 개별적이든 소집단 단위이든 관심을 갖고 지속적인 지도가 있어야 할 것이다.

이상에서 우리는 선수학습이 수학 교과중 도형 학습에 있어서 보통반 학생들에게도 대체적으로 긍정적인 영향을 미침을 확인할 수 있었다. 그리고 보통반 학생들 중에서도 특히 학습부진 학생에 대한 동기 유발의 방안으로 특별한 관심을 기울여 수업시간에 소외되지 않고 함께 참여하도록 유도하기 위해 새로운 자료개발과 지도방안이 강구되어야 할 것이다.

참고문헌

1. 우정호(1999), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교출판부

2. 이우영역(1997), Euclid 기하학과 비Euclid 기하학, 경문사

3. 권영한(1989), 재미있는 이야기 수학, 전원문화사

4. 교육부(1992), 중학교 수학과 교육과정 해설, 교육부

5. 이종연, 박세천(1998), 수준별 이동수업에 의한 소집단 상호 협력 학습이 학업성취도에 미치는 영향, 대한수학교육학회논문집 제8권 2호

6. 한인기(1999), 평면기하학의 기초, 협신사

7. 박배훈, 정창현(1997), 수학2 교사용지도서, (주)교학사

8. 변영계(1999), 교수학습이론의 이해, 학지사

9. 김종서, 이영덕, 정원식(1991), 최신 교육학 개론, 교육과학사

10. 박배훈, 정창현(1994), 중학교 수학 1,2 , (주)교학사

11. 육인선(1996), 수학은 아름다워2, 동녘

12. 고영철(1995), 기하학적 도형의 증명력 신장을 위한 효율적인 교수학습 방법 개선, 한남대학교 교육대학원

13. 김영애(1995), 선수학습을 통한 도형지도에 관한 연구, 경북대학교 교육대학원

14. 이판동(1997), 중학교 도형문제해결력 신장을 위한 효율적인 지도 방안, 충북대학교 교육대학원

15. 박화열(1992), 선수학습이 형성평가의 문제해결에 미치는 영향에 관한 연구, 한국교원대학교 교육대학원

<Abstract>

A Study on Effects for Learning-Achievement of the Previous-Learning in the Differentiated Class. *

-Focus on the Nature of Figures in the 2nd Grade of Middle School-

Kang, Sang-Jin

Mathematics Education Major
Graduate School of, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by professor Hyun, Chin-Oh

The purpose of this thesis is to know how the previous-learning is connected with learning-achievement in some way, which it is focus of the nature of figures in the second grade students' differentiated class of middle school. In order to achieve this aim in this study, I gave the general class students some previous-learning sheets. Of course, the previous-learning sheets were about the contents that students learned in previous class. And I surveyed the effects of the learning-achievement in the previous-learning. First of all, it is used the previous-learning sheets for this.

I could identify that the effect of this study was that the Previous-Learning had been an affirmative effect with the general class students. It is known that the change of the active learning through the general class students. It is known that the change of the active learning through the previous-learning triggered the achievement motivation grant and interest, it was effected in learning-achievement.

---

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education. Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2000.

부 록

선수학습지 (1)

단 원	§1. 이등변삼각형	교과서	P200~203
학습목표	• 이등변삼각형의 뜻을 말할 수 있다, • 이등변삼각형의 여러 가지 성질을 말할 수 있고, 활용할 수 있다.		
선수학습 내용	1. 이등변삼각형의 정의 2. 삼각형의 합동조건		

1. 이등변삼각형의 뜻을 쓰고, 그림으로 나타내어 보시오.

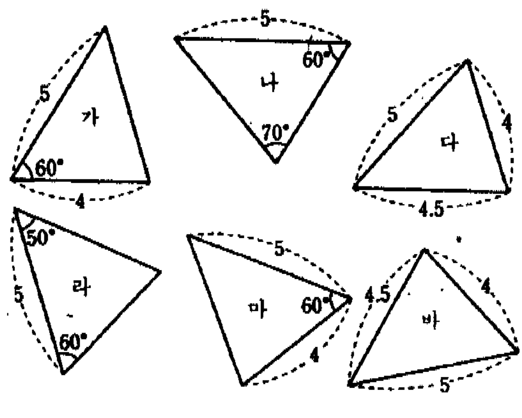
2. 삼각형의 합동조건을 써보시오.

(1)

(2)

(3)

3. 다음 그림에서 서로 합동인 삼각형을 찾아보고 합동조건을 쓰시오.



선수학습지 (2)

단 원	§1. 이등변삼각형	교과서	P200～203
학습목표	• 이등변삼각형의 여러 가지 성질을 말할 수 있고, 활용할 수 있다.		
선수학습 내용	1. 삼각형의 합동조건 2. 각의 이등분선 작도 3. 선분의 수직이등분선 작도		

1. 삼각형의 합동조건을 그림으로 그려보시오,

(1)

(2)

(3)

2. 임의의 각을 연습장에 한 개 그리고, 그 **각의 이등분선을 작도**하고 종이를 접어서 비교하여 보시오.,

3. 임의의 선분을 연습장에 적당한 크기로 한 개 그리고, **선분의 수직이등분선을 작도**하고 종이를 접어서 비교하여 보시오.

선수학습지 (3)

단 원	§3. 삼각형의 외심과 내심	교과서	P 207 ~ 214
학습목표	• 삼각형의 외심의 정의를 말할 수 있다. • 삼각형의 여러 가지 성질과 외접원에 대해 말할 수 있다.		
선수학습 내용	1. 삼각형의 합동조건 2. 선분의 수직이등분선 작도		

1. 삼각형의 합동조건을 그림으로 나타내고 기호를 붙여 써보시오.,

(1)

(2)

(3)

2. 다음 선분의 수직이등분선을 작도하시오.

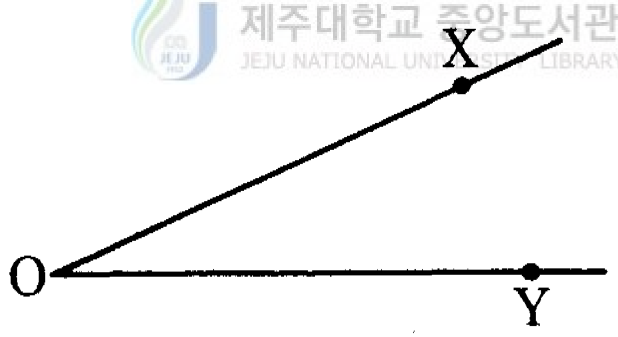
3. 임의의 삼각형을 그리고 세 변의 수직이등분선을 작도하여 보고, 직접 종이 접기를 통하여 비교하여 보시오,

선수학습지 (4)

단 원	§3. 삼각형의 외심과 내심	교과서	P 207 ~ 214
학습목표	• 삼각형의 내심의 정의를 말할 수 있다. • 삼각형의 여러 가지 성질과 내접원에 대해 말할 수 있다.		
선수학습 내용	1. 삼각형의 합동조건 2. 각의 이등분선 작도		

1. 삼각형의 합동조건을 간략하게 기호로 쓰고 말해봅시다.

2. 다음 각의 이등분선을 작도하시오,



3. 임의의 삼각형을 그리고 세 각의 이등분선을 작도하여 보고, 직접 종이 접기를 통하여 비교하여 보시오,

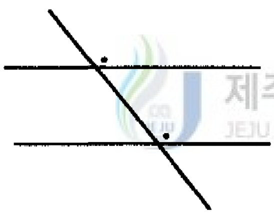
선수학습지 (5)

단　　원	§1. 평행사변형	교과서	P 216 ~ 222
학습목표	• 평행사변형의 성질을 말할 수 있다. • 평행사변형이 되는 조건을 말할 수 있다. • 평행사변형의 성질을 이용한 여러 가지 문제를 풀 수 있다.		
선수학습 내용	1. 삼각형의 합동조건 2. 평행선에 대한 성질		

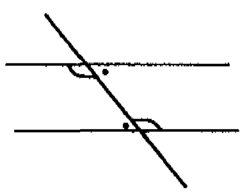
1. 삼각형의 합동 조건을 말하시오.

2. 평행선에 대한 성질을 알아봅시다.

(1) 평행선과 동위각과의 관계를 써봅시다.



(2) 평행선과 엇각과의 관계를 써봅시다.



수학과 형성평가

제 2학년　　반　　번　　이름:

1. 다음 중 명제인 것을 고르면?
   ① 이 꽃은 아름답다.　　② 저 여자는 키가 크다.
   ③ 동물을 사랑하자.　　④ $3x+1=7$
   ⑤ 사람이면 동물이다.

2. "두 직선이 평행할 때, 엇각의 크기는 서로 같다."에서 가정과 결론을 쓰시오.

   가정:
   결론:

3. 다음 명제중 역이 참인 것은?
   ① $a<b$ 이면 $ac<bc$ 이다.
   ② $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 에서 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ 이면 $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ 이다.
   ③ 두 삼각형이 서로 합동이면 두 삼각형의 넓이는 서로 같다.
   ④ 정삼각형의 한 내각의 크기는 $60°$ 이다.
   ⑤ $x=y$ 이면 $x+1=y+1$ 이다.

※ 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이면 $\angle B=\angle C$ 임을 증명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 고르시오.

(증명) $\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 하면 $\triangle ABM$, $\triangle ACM$ 에서

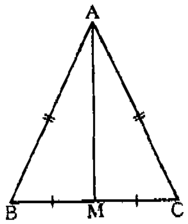
$\overline{AB} = \overline{AC}$ (가정)

$\overline{BM} = \boxed{4)}$

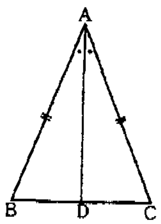
$\overline{AM}$: 공통

$\therefore \triangle ABM \equiv \triangle ACM$ (5)　　합동)

$\therefore \angle B=\angle C$



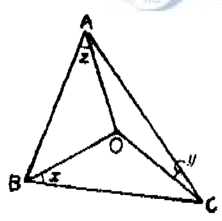
※ 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이고, $\overline{AD}$ 는 꼭지각 A의 이등분선일 때, 다음을 구하시오.



6. $\angle ADB$ 의 크기는:

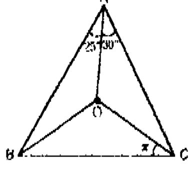
7. $\overline{BC}=10cm$ 일 때, $\overline{CD}$ 의 길이는?

8. 그림의 $\triangle ABC$ 에서 점 O 는 외심이다. 이 때, $\angle x+\angle y+\angle z$ 의 크기는?

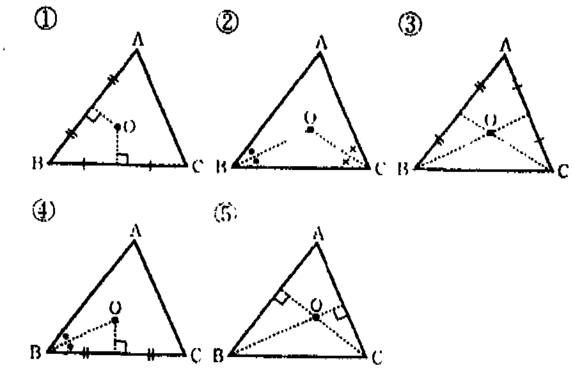


9. 그림에서 점 O는 $\triangle ABC$ 의 외심이다. 이 때, $\angle BCO$ 의 크기는?

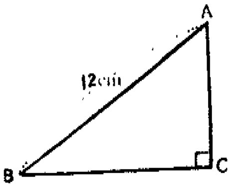
① 20° ② 25° ③ 30° ④ 35° ⑤ 40°



10. 다음 중 $\triangle ABC$ 의 외심을 작도한 것은?



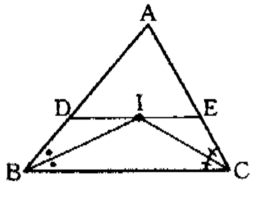
11. 다음 직각삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?



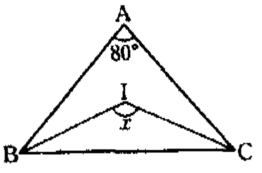
① 4cm ② 4.5cm ③ 5cm ④ 5.5cm ⑤ 6cm

12. 그림에서 점 I는 내심이고 $\overline{DE}$ 는 $\overline{BC}$ 와 평행일 때, $\triangle ADE$ 의 둘레의 길이를 구하면?

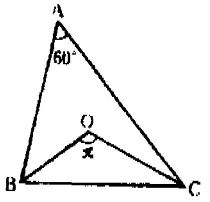
① 13 cm ② 12cm
③ 11cm ④ 10cm
⑤ 9cm



13. 그림에서 점 I는 $\triangle ABC$ 의 내심이다. 이 때, x 의 크기를 구하시오

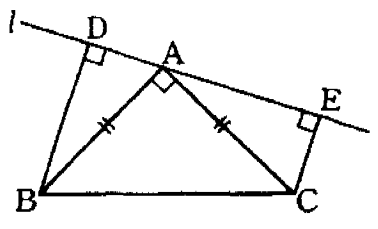


14. 그림에서 점 O는 $\triangle ABC$ 의 외심이다. 이 때, x 의 크기는?



① 105^{o} ② 110^{o} ③ 115^{o} ④ 120^{o} ⑤ 125^{o}

15. $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 직각이등변삼각형 ABC 의 직각인 꼭지점 A를 지나는 직선 l 을 긋고 B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E이고 $\overline{DB}=7cm$, $\overline{EC}=5cm$ 라 할 때, $\overline{DE}$ 의 길이를 구하시오.

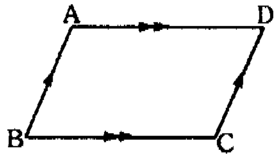


수학과 형성평가(사각형의 성질)

제 2학년 반 번 이름:

※ 다음 문제를 읽고 물음에 답하시오.

1. 그림의 □ ABCD 는 평행사변형이다. $\angle A$ 와 $\angle B$ 의 크기의 비가 3: 2 일 때, $\angle B$ 의 크기를 구하시오.



2. 다음 사각형 ABCD 중에서 평행사변형이 되지 않는 것은?

① $\overline{AB}=6cm$, $\overline{BC}=6cm$, $\overline{CD}=6cm$, $\overline{AD}=8cm$

② $\angle A=60°$, $\angle B=120°$, $\angle C=60°$, $\angle D=120°$

③ $\overline{AB}//\overline{CD}$, $\overline{AB}=6cm$, $\overline{CD}=6cm$

④ $\overline{OA}=6cm$, $\overline{OB}=8cm$, $\overline{OC}=6cm$, $\overline{OD}=8cm$

(단, O 는 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 교점)

⑤ $\overline{AB}//\overline{CD}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$

3. 사각형을 대각선에 의해서 나타내려고 한다. 옳지 않은 것은?

① 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는 사각형은 평행사변형이다.

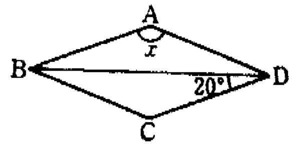
② 두 대각선의 길이가 서로 같은 사각형은 직사각형이다.

③ 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 마름모이다.

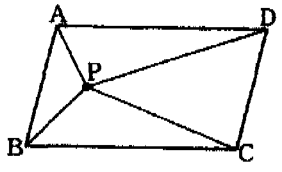
④ 두 대각선의 길이가 같고, 수직이등분하는 사각형은 정사각형이다.

⑤ 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분하는 사각형은 등변사다리꼴이다.

4. 그림의 사각형 ABCD는 마름모이다. $\angle BAD$ 의 크기를 구하여라.



5. 평행사변형 ABCD의 내부에 한 점 P를 잡고, $\triangle ABP = 8cm^2$, $\triangle BCP = 10cm^2$, $\triangle CDP = 12cm^2$ 일 때, $\triangle APD$ 의 넓이를 구하여라

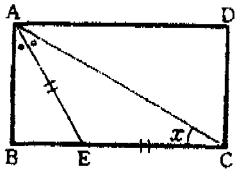


6. 사각형 ABCD에서 $\overline{AB}//\overline{DC}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$ 일 때, 다음 중 직사각형이 되기 위한 조건이 아닌 것은?

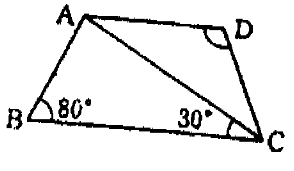
① $\angle B = 90°$ ② $\overline{AO} = \overline{BO}$

③ $\overline{OC} = \overline{OD}$ ④ $\overline{AC} = \overline{BD}$ ⑤ $\overline{AB} = \overline{AD}$

7. 직사각형 ABCD에서 $\angle BAC = \angle CAE$ 이고 $\overline{AE} = \overline{EC}$ 일 때, $\angle ACB$ 의 크기를 구하여라.



8. 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다. 이때, $\angle ADC$ 의 크기를 구하여라.

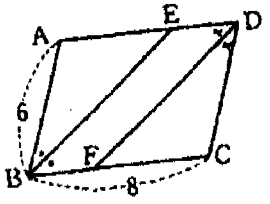


9. 다음 사각형 중에서 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하지 않는 것은?

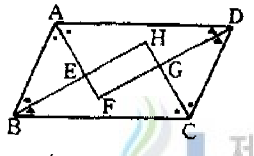
① 평행사변형　② 등변사다리꼴　③ 직사각형

④ 마름모　⑤ 정사각형

10. 평행사변형 ABCD에서 $\overline{BE}$, $\overline{DF}$ 는 각각 $\angle B$, $\angle D$ 의 이등분선이다. $\overline{AB}=6cm$, $\overline{BC}=8cm$ 일 때, $\overline{ED}$ 의 길이를 구하여라.



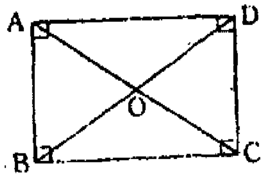
11. 평행사변형 ABCD 의 네 내각의 이등분선에 의하여 만들어지는 □EFGH는 어떤 사각형인가?



① 정사각형　② 직사각형　③ 마름모

④ 등변사다리꼴　⑤ 사다리꼴

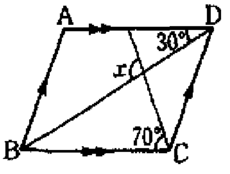
12. 직사각형ABCD에서 두 대각선 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 의 교점을 O라 하자, $\overline{BD}=8cm$일 때, $\overline{AO}$ 의 길이를 각각 구하여라.



13. 마름모ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 할 때, $\triangle ABO$ 는 어떤 삼각형인가?

※ 그림에서 $\angle x$ 의 값을 구하여라.

14.



15.