

碩士學位論文

삼대작도 불능 문제의 해결 시도에  
대한 역사적 고찰

指導教授 朴 鎭 圓



濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

姜 炅 勳

2004年 8月


# 삼대작도 불능 문제의 해결 시도에 대한 역사적 고찰

指導教授 朴 鎭 圓

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2004年 5月 日

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

 제주대학교 중앙도서관  
提出者 강 경 훈

姜昶勳의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

2004年 7月 日

審 查 委 員 長 \_\_\_\_\_ 印

審 查 委 員 \_\_\_\_\_ 印

審 查 委 員 \_\_\_\_\_ 印

<抄錄>

## 삼대작도 불능 문제의 해결 시도에 대한 역사적 고찰

姜 炅 勳

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

指導教授 朴 鎮 圓

그리스인들이 작도에 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 이용하여 수행했던 이유는 ‘가장 완전한 도형은 직선과 원이며, 그래서 신은 이 둘을 중히 여긴다’라는 믿음 때문이었다. 이러한 믿음을 배경으로, 그리스인들은 작도의 도구를 오직 ‘직선과 원’만을 그릴 수 있는 ‘자와 컴퍼스’에 국한시켰다. 이러한 배경 하에서 자와 컴퍼스를 사용한 3대 작도 문제를 해결하려는 많은 노력이 기울여져 왔고 이 과정에서 여러 결과들이 쏟아져 나왔으며 결국 수학 전반에 매우 중요한 영향을 끼쳤다.

본 논문에서는, 고대 그리스에서부터 유래된 3대 작도 불능 문제의 해결 시도에 대한 수학자들의 노력을 제시하였다.

이러한 노력들을 재구성하여 중등수학교실에 실제로 적용시킴으로써 수학을 공리적으로 전개된 완성된 것으로 가르치는 형식주의의 결함을 극복하고 학생들에게 수학의 인간다운 면을 부각시켜 수학에 대한 즐거움과 흥미를 직접적으로 체험하게 하는 계기를 제공할 수 있을 것이다.

---

\* 본 논문은 2004학년도 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

# 목 차

## <抄錄>

I. 서론 .....	1
1. 연구의 필요성 및 목적 .....	1
2. 역사적 배경 .....	2
II. 본론 .....	5
1. 배경 .....	5
2. 정육면체 배적문제 .....	7
1) 유래 .....	7
2) 첫 번째 성과: 히포크라테스 .....	7
3) 두 번째 성과: 아르키타스 .....	8
4) 세 번째 성과: 메나이크무스 .....	10
5) 네 번째 성과: 플라톤이 고안한 배적장치 .....	13
6) 다섯 번째 성과: 디오클레스의 시소이드 .....	15
3. 각의 삼등분 문제 .....	18
1) 첫 번째 성과: 기울임 문제 .....	18
2) 두 번째 성과: 히피아스 .....	19
3) 세 번째 성과: 아르키메데스의 시도 .....	20
4) 네 번째 성과: 삼입방법 .....	21
5) 다섯 번째 성과: 니코메데스의 콘코이드 .....	23
6) 여섯 번째 성과: 원추곡선을 이용한 각의 삼등분 .....	24
7) 일곱 번째 성과: 토마워크를 이용한 각의 삼등분 .....	28
8) 여덟 번째 성과: 뒤러 .....	29

9) 아홉 번째 성과: T모양의 삼등분자 고안 .....	30
10) 열 번째 성과: 데카르트의 방법 .....	30
4. 원적문제 .....	34
1) 유래 .....	34
2) 안티폰의 시도 .....	35
3) 브뤼손의 방법 .....	38
4) 히피아 곡선 .....	40
5) 아르키메데스의 연구 .....	42
6) 아르키메데스의 나선을 이용한 방법 .....	45
7) 실진법 .....	46
8) 초승달 꼴 넓이 구하기 .....	53
9) 근사구장법 .....	59
5. 3대 작도 문제의 해결 .....	63
<b>Ⅲ. 결론 및 제언</b> .....	<b>65</b>
참고문헌 .....	67
<b>&lt;Abstract&gt;</b> .....	<b>68</b>



## 그림 차례

<그림 1> 아르키타스의 그림 .....	9
<그림 6> 플라톤의 배적장치 .....	14

<그림 7> 디오클레스의 시소이드 .....	16
<그림 9> Quadratrix .....	19
<그림 12> 니코메데스의 콘코이드 .....	23
<그림 14> 파푸스의 그림 .....	26
<그림 16> 토마호크 .....	28
<그림 18> T 모양의 삼등분 자 .....	30
<그림 30> 원적곡선 .....	40
<그림 34> 아르키메데스의 나선 .....	45

# I. 서론

## 1. 연구의 필요성 및 목적

수학교과와 특성상 수학교과서의 내용이 너무나 형식적이고 연역적인 논리로 체계화 되어있기 때문에 대부분 학생들은 수학이 어렵다고 생각하게 된다. 수학 내용이 논리적 이론으로 전개되어 있어서, 수학의 발견과 창안으로 발전하고 있으며 타 교과와의 관계 속에서 변화하고 있다든지 또는 수학은 실제생활에 응용할 수 있다는 유용성과 인간 삶의 광범위한 분야에서 활용할 수 있다는 언급이 없게 된다. 따라서 학생들은 수학에 대한 매력이나 호기심을 갖지 못하고 수학을 딱딱하고 지루한 교과로만 생각하게 된다.

그러나 수학은 오랜 역사를 통해 많은 수학자들에 의해 창조되어 왔으며 직관적인 추측으로 이론들을 만들어 증명하고, 검토와 검증의 과정을 거쳐 수학적 이론들이 체계적으로 정리되어져 왔고, 또한 지금도 그렇게 창안되고 있다. 수학의 역사를 되돌아보면 수학의 발견과 창조는 인류의 삶과 상상 속에서 태어났으며 인간의 삶에 영향을 주고받으면서 변화하고 확대되어 왔다. 그렇지만 학교에서의 수학교육은 연역적으로 구성된 완성된 체계로서의 수학 교과서를 가르치게 된다. 이런 연역적 교재를 절대적으로 믿고 학생들을 교육하게 된다면 진정한 수학을 알려 주지 못하고 피상적인 수학을 지도하게 되며 따라서 학생들은 수학 학습에 있어서 흥미와 활력이 떨어지고 수학을 골동품처럼 생각하게 될 것이다. 이러한 완성된 체계의 교과서를 중심으로 지도할 때의 학습의 결점을 해결하기 위해서는 수학의 발달과정에 따라 수학의 개념을 폭 넓게 이해할 수 있도록 교재를 재구성하는 학습지도 방법이 필요하다.

중등학교에서 다루는 초등기하 부분은 수학의 여러 내용 중에서도 특히 대부분의 학생들이 흥미를 느끼지 못하는 부분이다. 따라서 이 부분의 지도에 있어서는 학생들의 흥미와 관심을 유발시킬 수 있는 내용의 도입이 무엇보다 중요하다고

생각된다. 이러한 관점에서 3대 작도 문제를 해결하려는 과정과 그 과정에서 파생된 많은 결과들은 이 부분의 지도에 많은 도움을 줄 수 있으리라고 생각된다. 2000년 동안 이루어진 수많은 연구와 여러 결과들, 그리고 그 속에서의 수학자들의 다양한 인간적인 모습들을 현장 학교교실에 적용시켰을 때 학생들이 마치 수학을 발견하는 과정에서의 장면들을 그 현장에서 경험하는 듯한 느낌을 받을 수 있으며 스스로 수학적 개념들을 만들고 구성해 볼 수 있는 창의적인 사고활동을 이루어 낼 수 있으리라고 기대된다.

## 2. 역사적 배경

### 1) 정육면체 배적문제

정육면체의 배적에 대한 문제는 신화적인 왕 미노스(Minos)가 그의 아들 글라우쿠스(Glaucus)를 위해 세운 묘비의 크기에 불만스러워 했다고 표현하는 대사에서 그 문제가 출현했다는 증거가 있다.

최초의 실질적인 진보는 기원전 440년경 히포크라테스가 이 문제를 각각의 길이가  $s$ 와  $2s$ 인 두 선분 사이에 두 비례중항을 작도하는 것으로 변형한 것이다. 그리고 히포크라테스가 이 변형을 만든 이후 정육면체의 배적에 대한 문제를 풀기 위한 그 후의 시도는 결국 두 선분 사이의 비례중항을 작도하는 것이 되어 버렸다. 이에 대해 가장 놀랄 만한 초기의 것 중 하나는 기원전 400년경 아르키타스에 의해 주어진 고등 기하학적 해였다. 그의 해는 직원기둥, 내부의 직경이 0인 원환체, 직원뿔의 교점을 구하는 데 근거하고 있다. 이 해가 바로 기하학이 일찍 발전되었다는 흔하지 않는 증거를 주고 있다. 에우독소스(기원전 370년경)에 의한 해는 분실되었고 메나이크무스(기원전 350년경)는 이 문제에 대한 두가지 해를



주었는데 아마도 그 해를 발견하기 위해 원추곡선을 고안한 듯 하다. 그 이후에 에라토스테네스(기원전 230년경)와 거의 같은 시기의 니코메데스에 의한 해가 있었고 그 뒤를 이어 아폴로니우스가 또 다른 해를 주었다. 디오클레스는 이 문제를 풀기 위해 시소이드곡선(질주선)을 발견했으며 보다 최근에는 고등 평면곡선을 이용한 많은 해가 발견되었다.

## 2) 각의 삼등분 문제

유클리드 도구를 가지고 주어진 선분을 다등분 하는 것은 간단한 문제였으므로 고대 그리스인들은 각을 다등분 하는 유사한 문제를 풀려고 하다가 이 문제에 부딪힌 것 같다. 아니면 이 문제는 정9각형을 작도하려다가 발생했을지 모른다. 왜냐하면 이 작도에서  $60^\circ$ 의 각을 삼등분 해야 하기 때문이다.

그리스인은 처음에는 삼등분 문제를 다루면서 그것은 기울음문제(verging problem)라고 불리는 문제로 변형한 것처럼 보인다. 그리고 여기에서 삽입원리(insertion problem)가 등장한다. 각의 삼등분 문제로부터 변형된 기울음 문제를 해결하기 위해 여러 가지 고차의 평면곡선들이 발견되었다. 이 중 가장 오래된 것의 하나가 니코메데스(기원전 240년경)에 의해 발명된 콘코이드(conchoid: 나선선)이다.

임의의 일반각은 원추곡선을 이용하여 삼등분 할 수 있다. 초기 그리스인들은 원추곡선을 이용하는 방법에 익숙하지 않았으며 이러한 종류의 초기의 증명은 파푸스(약 300년경)에 의해 주어졌는데 그는 원추곡선의 초점과 준선의 성질을 이용하였다.

임의의 각을 삼등분하는 것 뿐만 아니라 같은 크기로 다등분할 수 있는 초월곡선이 있다. 그러한 곡선중에는 쿼드라트릭스(Quadratrix)와 아르키메데스의 나선도 있다.

세월이 흐르면서 각의 삼등분 문제를 풀기 위해 여러 가지 기계장치, 결합장치,

합성 컴퍼스 등이 고안되었다. 그 중 가장 중요한 도구는 토마위크(tomahawk)라고 불리는 것이다. 토마위크의 발명자는 알려져 있지 않지만 그 도구가 1835년 어떤 책에서 설명되고 있다.

비록 유클리드 도구만을 가지고 임의의 각이 정확하게 삼등분되지 않지만 이러한 도구를 가지고 놀랄 만큼 근사적인 삼등분을 수행할 수 있다. 한 훌륭한 예가 1525년에 유명한 부식동판 제작자이며 화가인 뒤러(Albrecht Durer)가 만든 작도이다.

### 3) 원적 문제

기원전 1800년 경의 이집트인은 정사각형의 한변을 주어진 원의 직경의  $\frac{8}{9}$ 로 취함으로써 이 문제를 해결했다. 이 문제와 관련하여 알려진 최초의 그리스인은 아낙스고라스(기원전 499~427)인데 그의 공헌은 무엇이었는지는 알려져 있지 않다. 아낙스고라스와 동시대인이었던 키오스의 히포크라테스는 두 원호로 에워싸인 어떤 특별한 활꼴을 정사각형으로 만드는데 성공했는데 아마 자신의 연구가 원적의 문제를 푸는 실마리가 될 것을 기대했던 것 같다. 그후 몇 년뒤에 엘리스의 히피아스(기원전 425년경)가 쿼드라트릭스(Quadratrix)로 알려진 곡선을 발명했다. 이 곡선은 각의 삼등분과 원적의 문제를 모두 해결하게 했지만 이 곡선을 원적의 문제에 처음으로 이용한 사람에 대해서는 설이 분분하다.

원적 문제에 대한 가장 우아한 답이 아르키메데스의 나선에 의해 주어질 수 있는데 흔히 아르키메데스가 실제로 이 목적을 위해 나선을 만들었다고 전해진다.

## II. 본 론

### 1. 배경

#### 1) 작도의 시초

눈금 없는 자와 컴퍼스만을 유한 번 사용하여 주어진 조건을 만족하는 도형을 그리는 것을 작도라고 한다. 오랜 세월 동안 작도에 관한 문제는 많은 수학자들의 관심을 받아왔다. 고대 그리스인들은 까다로운 조건을 내걸고 작도라는 것을 했던 이유는, ‘가장 완전한 도형은 직선과 원이며, 그래서 신은 이 둘을 중히 여긴다’라는 믿음 때문이었다. 이러한 믿음을 배경으로, 그리스인들은 작도의 도구를 오직 ‘직선과 원’만을 그릴 수 있는 ‘자와 컴퍼스’에 국한시켰던 것이다.



#### 2) 눈금 없는 자를 사용하게 된 이유(사회·문화적인 측면)

아테네를 중심으로 한 옛 그리스의 도시국가들은 민주주의가 처음으로 시작된 곳으로 유명하다. 그러나 그 민주주의는 노예를 제외한 소수의 자유시민들만의 민주주의였다. 온갖 생산 활동을 비롯하여 자녀의 교육까지 모두 노예에게 맡긴 채 시민들은 아무런 생활의 걱정 없이 마음껏 자유를 누렸다.

이런 때 사람들이 취하는 태도는 대체로 두 가지가 있다. 하나는 성경 속의 ‘소돔과 고모라’처럼 육체적인 쾌락에 빠지는 것, 또 하나는 드문 일이긴 하지만 머리를 쓰는 지적인 사색을 통해 마음의 기쁨을 찾는 것이다. 그리스인들은 후자의 길을 택했다. 그들은 오직 알고자 하는 욕망을 채우기 위해 낮에는 ‘아골라(광장)’에서, 밤에는 부유한 자의 거실에서 포도주 잔을 기울이며 시간 가는 줄 모르고

대화를 즐겼다.

그러나 이런 때 포도주는 취하기 위해서가 아니라 말하는 입술을 적당히 적시는 정도로, 그리고 대화는 감정에 치우치거나 우리 식의 정답이 아닌 조용히 이치를 따져 상대방을 굴복시키는 일종의 게임이었다.

그리스 시민은 노동을 멸시하였다. 그런 일은 노예가 하는 것으로 치부했던 것이다. 따라서 수학 중에서도 길이나 넓이를 재는 따위의 측량술은 노예들이나 하는 노동이자 천한 기술이었다. 실용적인 계산술도 마찬가지로 취급되었다. 그래서 자녀들에게 산수를 가르치는 교사의 역할은 노예의 몫이었다. 시민들의 ‘고상한’ 정신은 구체적으로 어떤 쓰임새가 있는 것이 아니라 오히려 그런 구차한 목적을 떠난 지식 그 자체를 가만히 앉아서 탐구하는 일을 즐겼다. 그러다 보니 제한된 조건 내에서 결과에 이르는 ‘멋있는’ 놀이에 가치를 두게 되었다.

우리가 기하 시간에 배우는 ‘증명’도 이런 정신에서 나온 것이다. 도형을 작도하는 데 눈금 없는 자를 사용해야 한다는 조건을 내세운 것도 이런 귀족적인 발상에서 나왔다. ‘작도를 할 때에는 길이를 나타내는 눈금을 읽지 말라’는 지금의 규칙은 눈금을 읽는 행위는 노예들이 치르는 계산술과 관계있는 일로 간주해 계산을 일체 배척해 버린 옛 그리스의 전통을 그대로 따르고 있는 셈이다.

### 3) 당시의 컴퍼스와 지금 컴퍼스의 차이

오늘날 사용하고 있는 컴퍼스를 이용해서 점 O를 중심으로 하고 선분 AB를 반지름으로 하는 원을 작도하는 것은 쉬운 일이다.

컴퍼스의 두 다리를 각각 점 A, B에 대어 선분 AB의 길이를 잰 후 컴퍼스를 들어서 한쪽다리를 점 O에 고정시키고 원을 그리기만 하면 된다. 이렇듯 오늘날의 컴퍼스는 종이에서 페더라도 두 다리가 이루는 각이 변하지 않아서 선분의 길이를 옮길 수 있다. 그러나 고대의 컴퍼스는 일단 컴퍼스의 한 다리가 종이로부터 떨어지면 접히게 되어 있었다. 이러한 이유에서 고대의 컴퍼스를 접히는 컴퍼스라 부른다.

## 2. 정육면체 배적문제

### 1) 유래

배적 문제의 시작에 대해서는 두 가지 설이 있다. 하나는 고대 그리스 시인으로 부터 비롯되었다는 것이다. 미노스왕이 그의 아들 글라우쿠스를 위해 세운 묘비의 크기에 불만스러워했다고 표현한 대사에서 그 문제가 나타났다고 한다. 미노스는 묘비의 크기를 두 배로 하라고 그 시인에게 명령했는데, 이 때 시인은 묘비의 각 변의 길이를 두 배함으로써 묘비를 두 배로 만들 수 있다고 말하였다. 이 잘못된 생각이 기하학자들로 하여금 부피만 두 배로 늘리는 것이 어떻게 가능한가 하는 문제에 빠져들게 하였다.

또 다른 설은 다음과 같다. 그리스 문화의 절정기로 소위 '페리클레스 시대'라고 불리던 그리스의 평화는 기원전 431년에 아테네와 스파르타 사이에 펠로폰네소스 전쟁의 시작으로 막을 내리게 된다. 처음에는 아테네가 승리하는 듯하였으나 개전 2년 만에 지도자 페리클레스를 페스트로 잃었을 뿐만 아니라 아테네 인구의  $\frac{1}{4}$ 이 죽었다. 시민들은 그들의 신인 아폴로 신에게 이 병의 퇴치를 기원하자. “정육면체로 된 아폴로 신전의 제단의 부피를 두 배로 하면 소원을 들어주겠다.”라는 신탁을 받았다. 아테네 사람들은 석공을 시켜 원래 제단의 각 변의 길이를 두 배로 하여 새로운 제단을 만들었으나 페스트는 없어지지 않았다. 왜냐하면 그건 바로 새로 만든 제단의 부피는 두 배가 아니라 여덟 배가 되었기 때문이다.

### 2) 첫 번째 성과: 히포크라테스(기원전 5세기 중엽)<sup>2)</sup>

히포크라테스는 배적 문제를 다음과 같이 변형시켰다.

---

2) 한인기, “교사를 위한 수학사”, 경문사: p 81~82, 2003

<문제1>

밑면이  $a^2$  이고 높이가  $b$  인 직육면체가 주어졌을 때, 같은 부피를 가지는 정육면체를 작도하여라.

<문제1>에서 구하는 정육면체의 한변의 길이를  $x$  라면,  $x^3 = a^2b$  를 만족하는  $x$  를 작도해야 한다. 히포크라테스는 방정식  $x^3 = a^2b$  의 해가 <문제 2>에서와 같은 두 비례 중항을 구하는 문제와 동치임을 밝혔다.

<문제2>

길이가  $a, b$  인 선분에 대해,  $a : x = x : y = y : b$  인  $x, y$  를 작도하여라.

비례식  $a : x = x : y$  에서  $x^2 = ay$ ,  $x : y = y : b$  에서  $y^2 = bx$  를 얻을 수 있다.

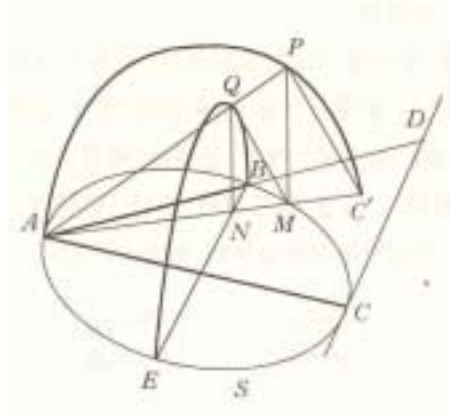
<문제 1>과 <문제 2>에서  $b$  대신  $2a$  를 대입하면,  $x^3 = 2a^2$  이 된다. 결국, 배적 문제의 해결은 길이가  $a, b$  인 주어진 선분을 이용하여  $a : x = x : y = y : b$  를 만족시키는  $x$  를 작도하는 문제로 귀착되었다.

3) 두 번째 성과: 아르키타스(기원전 약 428~365)<sup>3)</sup>

$\overline{AB} < \overline{AC}$  인  $\overline{AB}, \overline{AC}$  가 주어지면(그림1), 점  $B$  를 지나는 지름이  $\overline{AC}$  인 원을 작도할 수 있다.

---

3) 한인기, “교사를 위한 수학사”, 경문사 : p 82~83, 2003



<그림 1> 아르키타스의 그림

<그림 1>은 다음 세 개의 도형을 포함하고 있다.

- ① 밑면이  $S$ 인 원기둥;
- ② 점  $C$ 에서의 원  $S$ 에 대한 접선과  $\overrightarrow{AB}$ 의 교점을  $D$ 라 할 때, 모선이  $\overline{AD}$ 이고 축이  $\overline{AC}$ 인 원뿔. 즉, 직각삼각형  $ACD$ 를  $\overline{AC}$ 를 중심으로 회전하여 얻어진 직원뿔;
- ③ 원  $S$ 를  $\overline{AC}$ 를 중심으로  $90^\circ$ 만큼 회전시킨 원을  $S'$ 이라 할 때, 원  $S$ 의 평면에 직교하고 점  $A$ 를 지나는 축을 따라 원  $S'$ 를 회전시켜 얻은 원환체 (Torus).

이제, ①, ②, ③의 세 도형의 교점을  $P$ 라 하고, 점  $P$ 를 원  $S$ 의 평면에 사영시킨 점을  $M$ 이라 하자. 점  $P$ 가 원기둥의 표면에 속하므로, 점  $M$ 은 원  $S$ 에 속한다. 점  $B$ 를 지나 지름  $\overline{AC}$ 에 직교하는 현  $\overline{BE}$ 를 작도하고,  $\overline{BE}$ 의 점  $N$ 으로 사영되는  $\overline{AP}$ 의 점을  $Q$ 라 하자. 이때, 점  $E, Q, B$ 는 ②의 직원뿔의 절단면인 원에 속하므로,  $\overline{AQ} = \overline{AB}$ 이고,

$\overline{QN}^2 = \overline{EN} \cdot \overline{NB} = \overline{AN} \cdot \overline{NM}$  이다. 즉,  $Q$ 는 지름이  $\overline{AM}$ 인 원에 속하고,  $\angle AQM = 90^\circ$  이다.

<그림 1>에서 반원  $APC'$ 을 ③에서 얻어진 원환체의 일부라 하면,  $\overline{AC'}$ 은 반원  $APC'$ 의 지름이고,  $\angle APC' = 90^\circ$  이다. 그러므로  $\overline{QM} \parallel \overline{PC'}$  이다.

마지막으로 반원  $APC'$ 을 보면,  $\triangle APC'$ ,  $\triangle APM$ ,  $\triangle AQM$ 이 직각삼각형이고, 서로 닮음이므로,

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC'}}$$

그런데  $\overline{AQ} = \overline{AB}$ 이므로,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC'}}$$

따라서 얻어진 비례식은 히포크라테스의 <문제 2>의 비례식

$a : x = x : y = y : b$ 와 같다.

만약  $\overline{AC'} = 2\overline{AB}$ 이면,  $\overline{AM}^3 = 2\overline{AB}^3$ 을 얻을 수 있다.

### <의의>

이 문제는 원추곡선이 수학의 영역으로 들어오게 된 계기가 되었으며, 원추곡선은 자와 컴퍼스를 이용하여 해결할 수 없는 고대 수학의 많은 문제를 해결하는 중요한 도구가 되었다.

### 3) 세 번째 성과: 메나에크무스(기원전 4세기경)

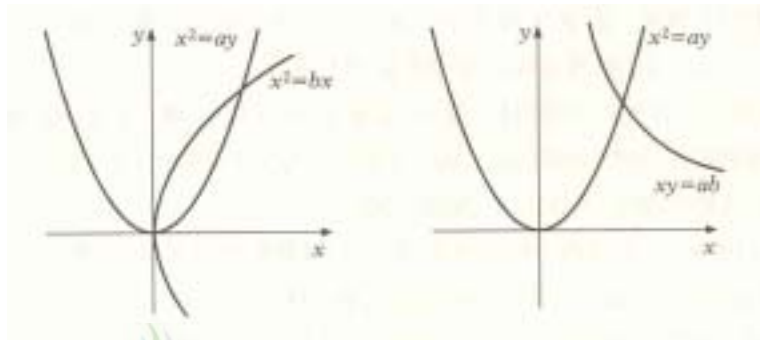
히포크라테스의 <문제 2>에 의하면, 배적 문제를 해결하기 위해선 비례식  $a : x = x : y = y : b$ 을 만족시키는 선분  $x, y$ 를 작도해야 한다. 현대적인 의미로



보면, 비례식을 만족시키는  $x, y$  는 다음 연립방정식들로 부터 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = bx \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 = ay \\ xy = ab \end{cases}$$

첫 번째 연립방정식의 해는 두 포물선의 교점이 되며<그림 2>, 두 번째 연립방정식의 해는 포물선과 쌍곡선의 교점<그림 3>이다.



<그림 2>

제주대학교 중앙도서관  
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

<그림 3>

메나에크무스는 <그림 2>와 <그림 3>의 두가지 해를 모두 제시하였는데, 그는 원뿔의 절단을 이용하여 포물선과 쌍곡선을 얻을 수 있었다.

## 참 고

### ◆ 원추곡선의 발견<sup>4)</sup>

그리스의 수학은 철학 학파와 자연과학 학파의 논쟁에 의해 발달하였다. 플라톤으로 대표되는 철학 학파는 수학의 대상이 감각적인 사물과 이데아 사이의 중간적인 자리를 차지하는 것으로 생각했다. 참된 존재는 이데아에만 있다고 생각하였다. 수학을 관념론적인 개념으로 파악했던 플라톤 학파는 해가 존재하는 한 수학의 정리는 진리라고 생각했다.

이를 비판한 것이 에우독소스의 자연과학적인 수학 학파의 관점이었다. 에우독소스의 제자였던 메나에크무스(Menaechmus, B.C. 375 ~ 325)는 “이등변삼각형이 존재한다는 것을 증명하려면 정의를 내리는 것만으로는 충분하지 않다. 먼저 만든 다음에 그것이 조건을 만족하고 있는지를 조사하지 않으면 안 된다”고 생각했다. 이러한 메나에크무스의 관점은 유클리드의 『원론』에도 반영되었다.

이렇듯 철학학파는 정의에 의해 수학적 사실을 인정할 반면 메나에크무스는 실제로 작도를 해본 다음에야 수학적 사실을 진리로 받아들였다. 이러한 메나에크무스의 성향은 3대 작도 문제를 대함에도 여전히 나타났다. 당시 그리스인들에게 3대 작도문제의 해결은 사회적 이슈였고, 메나에크무스가 3대 작도 문제에 관심을 기울인 것은 당연한 일이었다. 3대 작도 문제 중 “주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체를 작도하는 배적문제”를 해결하는 과정에서 원뿔곡선이 발견되었다.

히포크라테스가 배적문제에서 시도한 연립방정식에 착안하여 메나에크무스는 이러한 방정식을 만족하는 곡선을 작도하려고 시도했다. 자와 컴퍼스만으로는 방정식을 만족하는 것을 작도할 수 없었던 메나에크무스는 고심하다가 원뿔을 절단해

4) 남호영 외, “원뿔곡선 지도방안 -구체물과 프로그램을 중심으로-”, 수학사랑: p 1~3, 2002

보기에 이른 것이다. 메나에크무스는 기원전 350년경에 다음 사실을 발견했다고 한다.

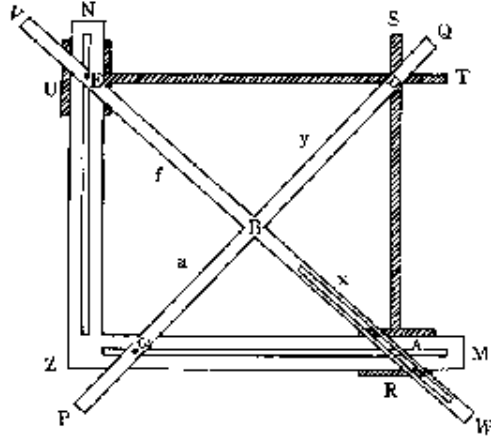
“꼭지각이 직각인 원뿔을 모선에 대해서 수직인 평면으로 잘라낼 때 생긴 곡선은 두 방정식  $x^2 = sy$ ,  $y^2 = 2sx$  을 만족하고, 꼭지각이 둔각인 원뿔을 모선에 대해서 수직인 평면으로 잘라낼 때 생긴 곡선은 방정식  $xy = 2s^2$ 을 만족한다.”

이렇듯 비례증항으로부터 유도되는 방정식을 만족하는 곡선을 원뿔을 절단해서 만들어낸 메나에크무스는 여기서 멈추지 않았다. 당시 그리스인들에게는 원을 사영하면 볼 수 있는 모양이라 알려진 타원은 꼭지각이 예각인 직원뿔의 모선에 수직인 평면으로 잘라내어 만들 수 있음을 보였다.

#### 4) 네 번째 성과 : 플라톤이 고안한 정육면체 배적(倍積)장치

고정된 직각  $\angle NZM$  및 움직일 수 있는 직교의 십자형 B-VW, PQ를 생각한다. 또한 2개의 변 RS 및 TU가 고정된 직각의 2개의 팔에 수직으로 미끄러지도록 되어있다. GB=a 및 BE=f 가 지정된 길이가 되도록 십자형 위에 2개의 고정점 E 와 G를 선택한다.

점 E 와 G가 각각 MZ 및 NZ위에 오도록 십자형을 고정하고, 변 TU와 RS를 미끄러지도록 해 직사각형 ADEZ의 꼭지점 A, D, E를 십자형의 팔 BW, BQ, BV가 지나갈 만한 위치에 장치 전체를 갖다 놓을 수 있다. 그와 같은 배치는  $f > a$  라면 항상 가능하다.



<그림 6> 플라톤의 배적장치

[설명]

$AB=x$ ,  $BD=y$  라 하면 세 개의 삼각형  $\triangle ABG$ ,  $\triangle DBA$ ,  $\triangle EBD$  는 합동  
이므로

$$a : x = x : y = y : f$$

$$\therefore x^2 = ay, y^2 = fx$$

$x^4 = a^2y^2$  에서  $y^2 = fx$  를 대입하면,  $x^4 = a^2fx \therefore x^3 = a^2f$

이 장치에서  $f=2a$  로 한다면  $x^3=2a^3$  이고 따라서  $x=\sqrt[3]{2}a$  이다.

<의의>

플라톤은 "수학이란 기계의 힘을 빌리지 않고 사유에 의해서, 즉 자와 콤파스만을 사용하여 문제 해결을 해야만 의의가 있다."라고 해서 끝내 자신의 해결방법에 만족하지 않았다.

## 5) 다섯 번째 성과: 디오클레스(기원전 180년경)의 시소이드 곡선5)

디오클레스는 배적문제를 풀기 위해 시소이드 곡선을 발명했다. 일반 시소이드 곡선은 다음과 같이 정의된다.

### <정의 1>

$C_1, C_2$ 가 두 주어진 곡선이고  $O$ 가 고정점이라 하자. 또,  $P_1, P_2$ 가  $O$ 를 지나는 직선과 주어진 곡선들과의 교점이라 하자.

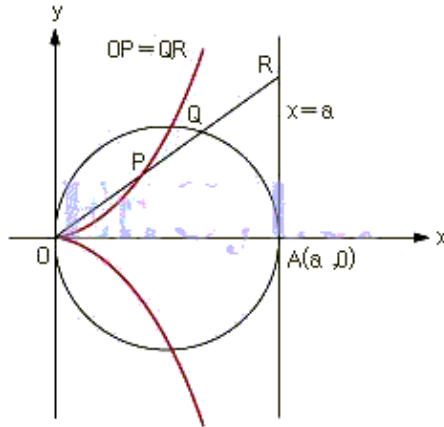
이때,  $OP=OR-OQ=QR$ 인 이 직선 위의  $P$ 의 자취를 극(極, pole)  $O$ 에 대한  $C_1$ 과  $C_2$ 의 시소이드라고 부른다.

### <정의2 >

$C_1$ 이 원이고,  $C_2$ 가  $A$ 에서  $C_1$ 가 접하고,  $O$ 가  $C_1$  위의  $A$ 의 대심점(對心點, antipodal point)<sup>6)</sup>인 경우에 극  $O$ 에 대한  $C_1$ 과  $C_2$ 의 시소이드가 디오클레스의 시소이드(cissoid of Diocles)이라 한다.

5) 이우영 외, “수학사”, 경문사, : p.114~115

6) 구(球)에서 한 지름의 양쪽 끝의 두 점. 구(球)에서 한 지름의 양쪽 끝의 두 점. 즉 구의 중심을 지나는 지름선이 구면 위에서 대칭을 이루는 두 점을 서로 다른 대심점 또는 대척점(對蹠點)이라 한다.  $P$ 의 대심점을  $P'$ 로 표시할때 구면삼각형  $ABC$ 에 대하여 구면삼각형  $A'B'C'$ 를 대심삼각형이라 한다. 대심삼각형은 본래의 구면삼각형과 반대방향으로 합동(合同)이 된다. 다음 정리를 보속의 대심점 정리라고 한다. <를 구면 위에서 정의된 2개의 연속함수라고 할 때,  $(P)=(P')$ ,  $(P)=(P')$ 를 만족시키는 점  $P$ 가 위에 반드시 존재한다.>



<그림 7> 디오클레이드의 시소이드

<보조정리 1>

$O$ 가 원점이고  $OA$ 가 양의  $x$ -축이라 하면 디오클레스의 시소이드의 직교좌표 방정식은  $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$  (단,  $a$ 는  $C_1$ 의 반경)이다. 그에 대응하는 극 방정식이  $r = 2a \sin \theta \tan \theta$ 이다.

<증명>

위의 <그림 7>에서  $r = QR = AQ \tan \theta = 2a \tan \theta$ 이다.

그래서  $r = 2a \left(\frac{y}{r}\right) \left(\frac{y}{x}\right)$  이고, 즉  $r^2 x = 2a y^2$ 이다.

<정리 1>

양의  $y$ -축 위에  $OD = n(OA)$  가 되는 점  $D$ 를 표시하고  $DA$ 가 시소이드와  $P$ 에서 만난다고 하자. 또  $OP$ 가  $Q$ 에서  $C_2$ 와 만난다고 하자.

이때  $(AQ)^3 = n(OA)^3$ 이다. 그리고  $n=2$ 일때가 배적문제의 해가 된다.

<증명>

위의 <그림 7>에서  $P$ 의 좌표를  $(x, y)$ 로 표시하면

$$\frac{(AQ)^3}{(OA)^3} = \frac{y^3}{x^3} = \frac{y}{2a-x} =$$

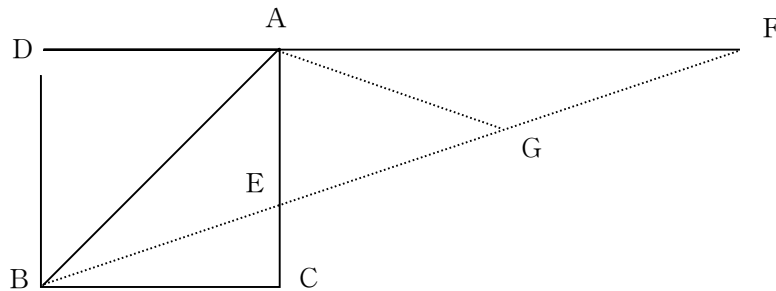
$\frac{RP}{RA} = \frac{OD}{OA} = n$ , 여기서  $R$ 은  $P$ 에서  $OA$ 에 내린 수선의 발이다. 그리고

$n=2$ 일때는  $\frac{(AQ)^3}{(OA)^3} = \frac{y^3}{x^3} = 2$ 이므로 배적문제의 해가 된다.



### 3. 각의 삼등분 문제

#### 1) 첫 번째 성과: 기울임 문제



<그림 8>

#### <해설>

임의의 예각  $ABC$  를 한 직사각형  $BCAD$  의 대각선  $BA$  와 변  $BC$  사이의 각으로 취하자<그림 8> 그런 다음  $B$  를 지나면서  $CA$  와  $E$  에서 만나고  $DA$  의 연장선 위의 한점  $F$  에서 만나면서  $EF=2(BA)$  인 직선을 살펴보면,  $G$  가  $EF$  의 중점이면

$$EG = GF = GA = BA$$

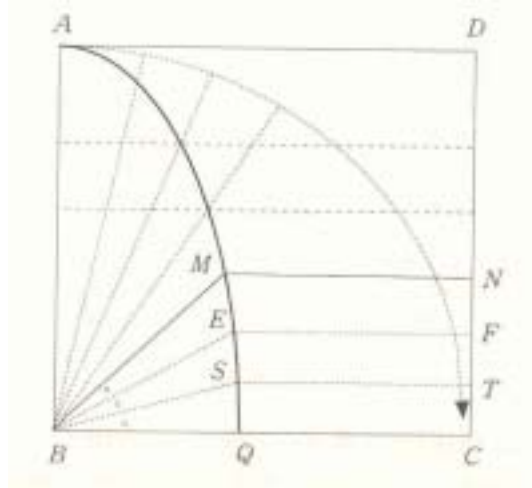
이고 따라서

$$\angle ABG < \angle AGB < \angle GAF + \angle GFA = 2 \angle GFA = 2 \angle GBC$$

이고  $BEF$  는 각  $ABC$  를 삼등분한다. E라서 각의 삼등분 문제는  $AC$  와  $DA$  의 연장선 사이에 있으면서 길이가  $2(BA)$  인 선분  $EF$  를 작도하는 문제로 바뀌어 진다.



2) 두 번째 성과: 히피아스(기원전 5세기경)



<그림 9> 원적곡선(Quadratrix)

히피아스는 각의 삼등분 문제를 해결하기 위해, 초월곡선인 원적곡선(Quadratrix)을 사용했다. 원적곡선은 다음과 같이 정의된다.

<정의 3>

정사각형  $ABCD$ 에서 ①  $\overline{AD}$ 를  $\overline{BC}$ 와 평행하게  $\overline{BC}$ 로 이동시키고, ②  $\overline{AB}$ 를 점  $B$ 를 중심으로 시계 방향으로  $\overline{BC}$ 로 회전시킨다<그림 9>. 이때 이동 ①과 ②는 동시에 시작되며 같은 속도로 이동 및 회전이 이루어진다. ①과 ②의 자취의 교점을 연결한 곡선  $AQ$ 를 원적곡선이라 부른다.

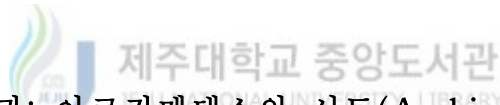
<정리 2>

원적곡선을 이용한 각의 3등분 방법

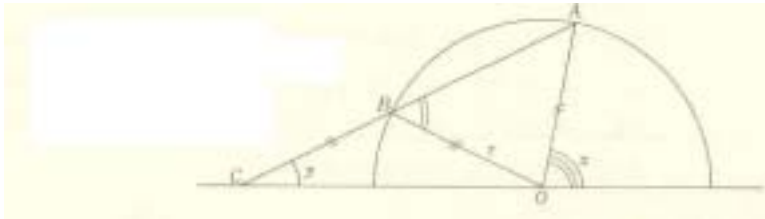
<해설>

<그림 9>에서  $\angle MBQ$ 를 3등분한다고 하자.  $\overline{BC}$ 에 평행하도록  $\overline{MN}$ 을 작도한 후에,  $\overline{NC}$ 를 3등분하는 점  $F, T$ 를 잡자.  $\overline{BC}$ 에 평행하도록  $\overline{EF}, \overline{ST}$ 를 작도하면,  $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}$ 가  $\angle MBQ$ 를 3등분하는 반직선이 되며, 따라서  $\angle SBQ = \angle EBS = \angle MBE$ 이다.

◆ 히피아스의 방법은 자와 콤파스만을 사용해야 한다는 조건에 맞지 않는다는 이유로 실격당했다.



3) 세 번째 성과: 아르키메데스의 시도(Archimedes, B.C. 287~212)



<그림 10>

임의의 각  $x$ 를 만들고, 이 각의 밑변을 왼쪽으로 연장하여  $O$ 를 중심으로 역시

임의의 반지름으로 반원을 그린다. 그리하여 선분  $BC$ 의 길이가 반지름과 같아  
지도록 자를 대고 직선  $AC$ 를 그으면  $x$ 의  $\frac{1}{3}$ 의 크기에 해당하는  $y$ 를 작도할  
수 있다.

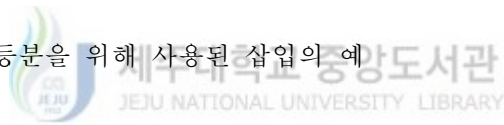
#### 4) 네 번째 성과: 삼입 방법<sup>7)</sup>

##### <정의 4>

삼입이란, 어떤 선분을 작도하는 것인데, 이 선분의 끝점이 주어진 두 선에 속  
하고, 선분(혹은 연장선)이 주어진 점을 지나도록 작도하는 것을 말한다.

##### <예제 1>

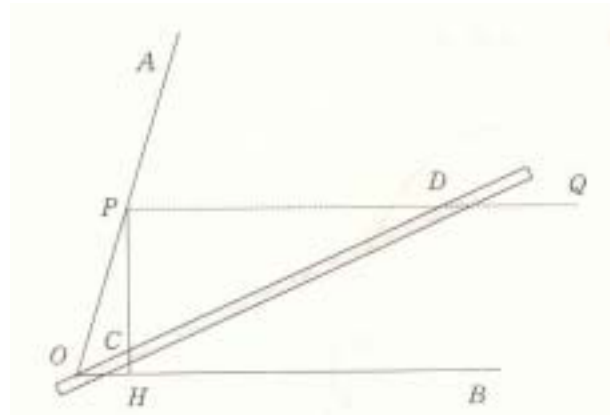
각  $\angle ABC$ 의 3등분을 위해 사용된 삼입의 예



##### <해설>

각  $AOB$ 의 변  $OA$ 에 임의의 점  $P$ 를 잡고, 점  $P$ 를 지나 변  $OB$ 와 평행한  
직선  $PQ$ 를 작도하고, 점  $P$ 에서 변  $OB$ 에 수선  $PH$ 를 긋자. 그리고 자에 두  
점 사이의 거리가  $\overline{OP}$ 의 두배가 되는 점  $C, D$ 를 표기하자( $\overline{CD}$ 가 삼입하는 선  
분임). 이제 점  $C$ 가 수선  $PH$ 에 속하고, 점  $D$ 가 직선  $PQ$ 에 놓이고,  $\overleftrightarrow{CD}$ 가  
점  $O$ 를 지나도록 삼입하자.<그림 11>

7) 한인기, “교사를 위한 수학사, 경문사: p.86~87

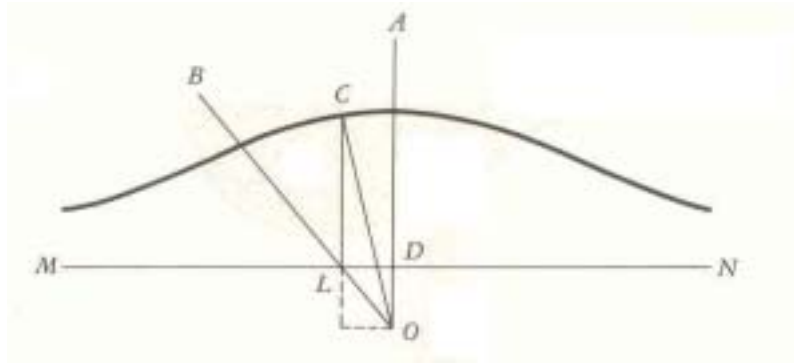


<그림 11>

이때,  $\angle AOD = 2\angle DOB$  임을, 즉 각  $DOB$ 가 각  $AOB$ 의  $\frac{1}{3}$  임을 증명할 수 있다.  $\overline{PD} \parallel \overline{OB}$  이므로,  $\angle DOB = \angle PDO$  이다. 한편,  $\overline{CD}$ 의 중점을  $M$ 이라 하면,  $\overline{PM}$ 은 직각삼각형  $PCD$ 의 중선이 된다. 그러므로  $\overline{PM} = \overline{MC} = \overline{MD}$  이고,  $\angle PDO = \angle MPD$  이다.

한편,  $\overline{CD} = 2\overline{PO}$  이므로,  $\overline{PO} = \overline{DM} = \overline{PM}$  이다. 그러므로  $\triangle POM$ 은 이등변 삼각형이고,  $\angle PMO = \angle POM$  이다. 이로부터,  $\angle POM = 2\angle PDO$  이고,  $\angle POM = 2\angle DOB$  를 얻는다.

5) 다섯 번째 성과: 니코메데스(기원전 240년경)의 콘코이드  
(conchoid: 나선)



<그림 12> 니코메데스의 콘코이드

<정의 5>

$c$ 가 한직선이고,  $O$ 가  $c$  위에 있지 않은 임의의 점이라고 하자.  $c$  위의 한점  $P$ 에 대하여  $OP$ 의 연장선 위에 일정한 길이  $k$ 를 갖는  $PQ$ 를 표시하자. 그러면  $P$ 가  $c$ 를 따라 움직일 때  $Q$ 의 자취가 극  $O$ 와 상수  $k$ 에 대한  $c$ 의 콘코이드이다.

<예제 2>

콘코이드를 이용한 각의 삼등분

<해설>

콘코이드를 그릴 수 있는 도구를 고안해 내는 것은 그리 어렵지 않고, 또 그 도

구를 가지고 우리는 쉽게 각을 삼등분 할 수 있다. 이제  $AOB$  를 임의의 예각이라 하자. <그림 12>에서처럼  $OA$  에 수선  $MN$ 을 그릴 때  $OA, OB$ 와 만나는 점을 각각  $D$ 와  $L$ 이라 하자. 그런 다음 극  $O$ 와 상수  $2(OL)$ 에 대한  $MN$ 의 콘코이드를 그린다. 또  $L$ 을 지나서  $OA$ 와 평행인 직선을 그릴 때 콘코이드와 만나는 점을  $c$ 라 하자. 그러면  $OC$ 가 각  $AOB$ 를 삼등분한다.

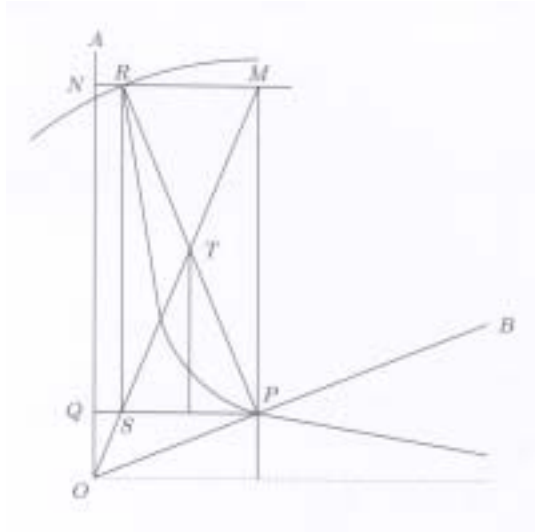
### 6) 여섯 번째 성과: 원추곡선을 이용한 각의 삼등분<sup>8)</sup>

원추곡선을 이용하면 일반각이 쉽게 삼등분 된다. 다음은 이에 관한 작도이다.

#### <정리 3>

각이  $AOB$ 가 주어졌다고 하자. 중심이  $O$ 이고  $OA$ 를 한 점근선으로 각는 직각 쌍곡선의 한 분지(分枝)를 그리고  $OB$ 와 만나는 점을  $P$ 라 하자. 또 중심이  $P$ 이고 반경이  $2(PO)$ 인 원을 그리고 쌍곡선과 만나는 교점을  $R$ 이라 하자. 이때,  $PM$ 이  $OA$ 와 평행하고  $RM$ 이  $OA$ 와 수직이 되는 교점  $M$ 을 작도하면  $OM$ 이 각  $AOB$ 를 삼등분하게 된다.

8) 이우영 외 역, “수학사”, 경문사: p.115~116, 1995



<그림 13>

<증명>

$Q$ 와  $N$ 을 각각  $P$ 와  $M$ 에서  $OA$ 에 내린 수선의 발이라 하고  $PQ$ 와  $OM$ 의 교점을  $S$ 라 하자.  $P, R$ 이 쌍곡선 위에 있으므로

$$\overline{OQ} \cdot \overline{PQ} = \overline{ON} \cdot \overline{NR} \text{이다. 따라서 } \overline{NR} = \frac{\overline{OQ} \cdot \overline{PQ}}{\overline{ON}} \text{이다. 그리고 삼각형}$$

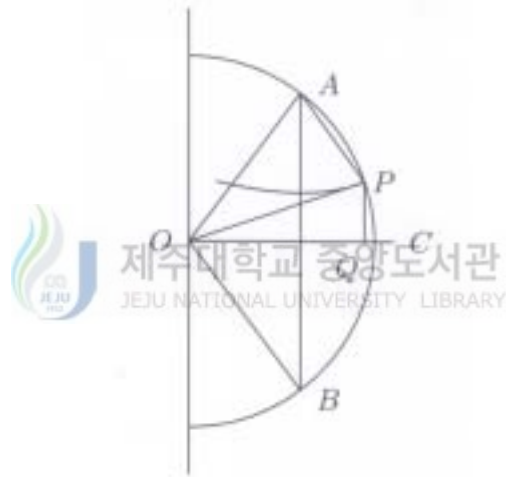
$$OQS \text{와 삼각형 } ONM \text{이 닮은 삼각형이므로 } \overline{QS} = \frac{\overline{OQ} \cdot \overline{PQ}}{\overline{ON}} \text{이다.}$$

따라서  $\overline{NR} = \overline{QS}$ 이므로 사각형  $RMPS$ 는 직사각형이다.  $T$ 를 직사각형  $RMPS$ 의 중심이라 하면, 대각선의 길이  $\overline{PR}$ 은  $\overline{OP}$ 의 두배이므로 삼각형  $TOP$ 는 이등변삼각형이다. 따라서  $\angle MOP = \angle TOP = \angle PTO$ 이고, 또  $\angle PTO$ 는  $\angle AOM$ 의 두배이므로 증명되었다.

파푸스는 원추곡선을 이용하여 다음과 같은 방법으로 각의 삼등분 문제를 해결하였다.

**<정리 4> : 파푸스(300년경)의 인용**

각  $AOB$ 를 원의 중심각으로 취하고  $OC$ 를 각  $AOB$ 의 이등분선이라 하자. 이제 초점이  $A$ 이고 준선이  $OC$ 이며 이심률이 2인 쌍곡선의 한 분지를 그리고 이 쌍곡선이  $AB$ 와 만나는 점을  $P$ 라 하자. 그러면  $OP$ 는 각  $AOB$ 를 삼등분하게 된다.



<그림 14> 파푸스의 그림

**<증명>**

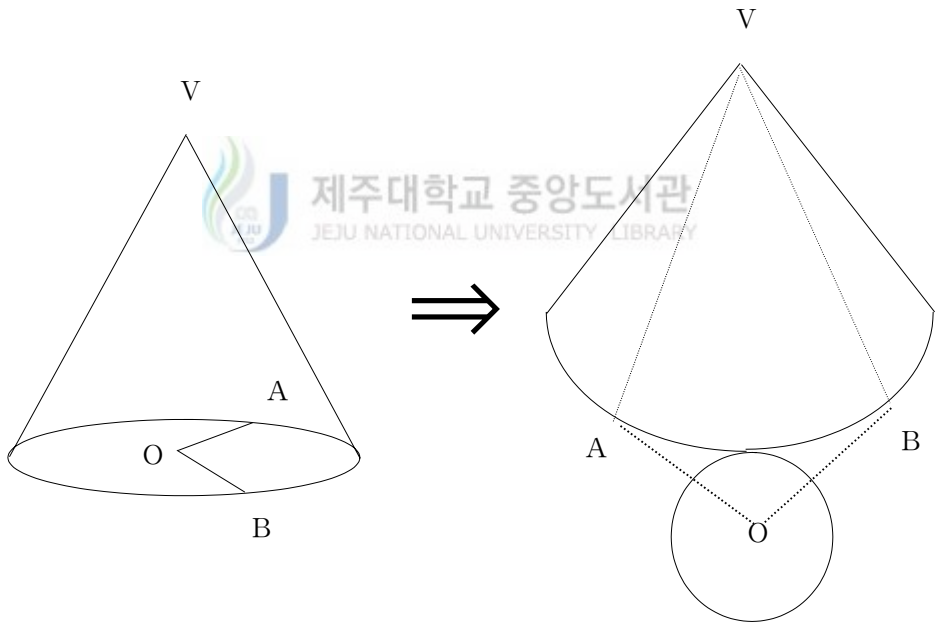
$P$ 에서  $OC$ 에 내린 수선의 발을  $Q$ 라 하자. 그러면  $A$ 가 쌍곡선의 초점이고  $OC$ 가 준선이며 이심률이 2이므로  $AP=2PQ$ 이다. 따라서  $\angle AOP=2\angle POQ$ 이고 결국  $\angle AOB=3\angle AOP$ 이다. 그러면  $AP$ 는 각  $AOB$ 를 삼등분하게 된다.



참 고

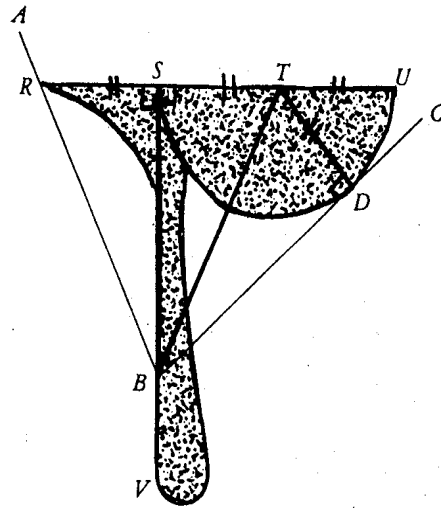
오브리(Aubry)의 시도 (1896년)

비탈높이가 밑면의 반경의 세 배인 직원뿔을 생각해 보자. 우선 그 직원뿔의 밑면의 원주 위에 삼등분하고자 하는 각과 동일한 중심각  $AOB$ 의 호  $AB$ 를 표시 하자. 종이로 그 원뿔을 감아서 종이위에 두 점  $A, B$ 와 원추의 꼭지점  $V$ 를 표시하자. 그런 다음 종이를 펴면 각  $AVB$ 가 각  $AOB$ 의  $\frac{1}{3}$ 이 된다.



<그림 15>

7) 일곱 번째 성과: 토마호크(tomahawk)를 이용한 각의 삼등분



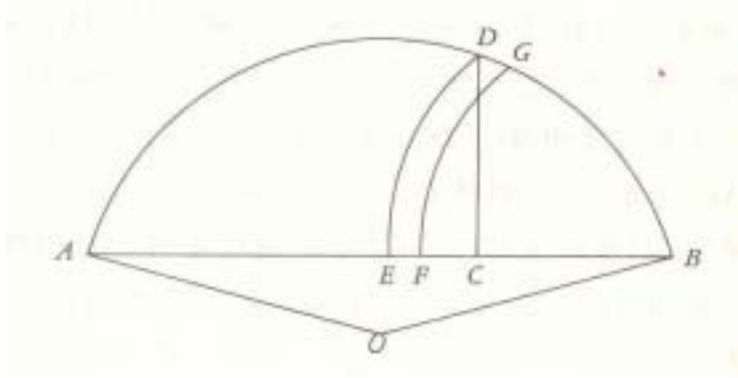
<그림 16> 토마호크

<해설>



한 선분  $RU$ 를  $S$ 와  $T$ 에서 삼등분하자<그림 16> 그런 다음  $SU$ 를 직경으로 하는 반원을 그리고  $RU$ 와 수직인 직선  $SV$ 를 그린다. 그러면 토마호크는 <그림 16>에서의 나머지 부수적인 그림과 더불어 완성된다. 토마호크를 가지고 각  $ABC$ 를 삼등분하기 위해서는  $R$ 가  $BA$  위에 오고  $SV$ 가  $B$ 를 지나고  $BC$ 가  $D$ 에서 반원과 접하도록 도구를 갖다 놓는다. 그러면 삼각형  $RSB$ ,  $TSB$ ,  $TDB$ 가 모두 합동이므로  $BS$ 와  $BT$ 는 주어진 각을 삼등분한다. 토마호크는 자와 컴퍼스를 가지고 트레이싱 페이퍼(투사지)위에 잘 그려질 수 있고, 그런 다음 그것을 주어진 각 위에 잘 조정하면 된다.

8) 여덟 번째 성과: 뒤러(Albrecht Durer, 1525년)

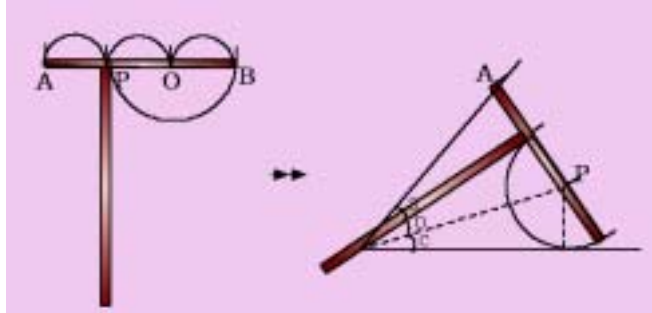


<그림 17>

<해설>

주어진 각  $AOB$ 를 원의 중심각으로 취하자<그림 17>.  $C$ 가 현  $AB$ 의 삼등분 점으로서  $B$ 와 가까운 쪽에 있는 점이라 하고  $C$ 를 지나서  $AB$ 의 수선이 원과  $D$ 에서 만난다고 하자. 이제 중심이  $B$ 이고 반경이  $BD$ 인 원호를 그릴 때 이 원호가  $AB$ 와  $E$ 에서 만난다고 하자. 또  $F$ 가  $EC$ 의 삼등분점으로서  $E$ 와 가까운 쪽에 있는 점이라고 하자. 다시 중심이  $B$ 이고 반경이  $BF$ 인 원호를 그릴 때 이 원 호가 원과  $G$ 에서 만난다고 하자. 그러면  $OG$ 는 각  $AOB$ 를 삼등분하는 근사적인 직선이 된다.

9) 아홉 번째 성과: T모양의 3등분점 자-도구 고안



<그림 18> T모양의 3등분점 자

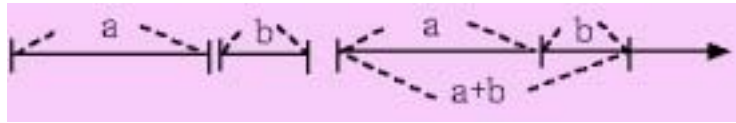
<해설>

제도에 쓰이는 T자와 같은 모양의 자와 한쪽 끝에 P를 중심으로 한 반원이 붙어 있다. 그림처럼 반원이 밑변에 접하도록 하면, 두 변이 같은 직각삼각형은 합동이라는 사실을 이용해서 a, b, c 세 각이 모두 같다는 것은 곧 증명된다. 그렇지만 이 방법도 불합격이다. 도구로 쓸 수 있는 것은 자와 컴퍼스 뿐이기 때문이다.

10) 열 번째 성과: 데카르트의 방법

<더하기>

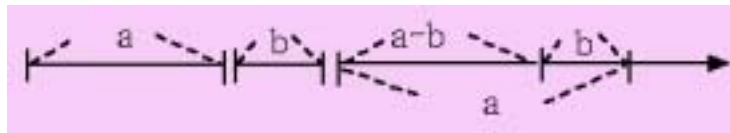
- ① 한 직선의 길이를 컴퍼스로 잰다.
- ② 다른 직선의 끝에서 그 길이를 반지름으로 하는 원을 그린다.
- ③ 연장선과 만나는 점까지 선분을 그린다.



<그림 19>

<빼기>

- ① 작은 직선의 길이를 컴퍼스로 잰다.
- ② 긴 직선의 끝에서 그 길이를 반지름으로 하는 원을 그린다.
- ③ 긴 직선의 내부와 만나는 점까지 선분을 자른다.



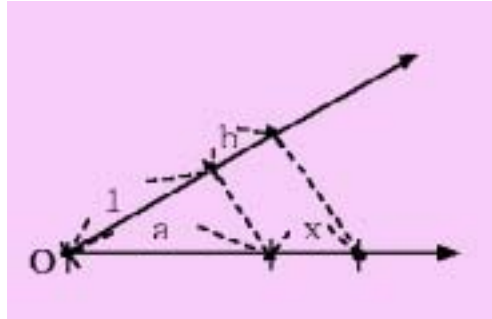
<그림 20>



◆ 곱하기와 나누기에서는 길이가 1인 크기가 필요하다. 이 길이의  $a$  배인 길이와  $b$  배인 길이가 있다고 하자.

<곱하기>

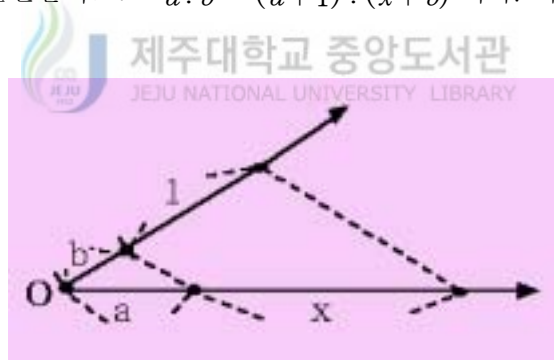
- ① 길이가  $a$  인 선분의 연장선과 크기가 1인 선분의 연장선을 긋는다.
- ② 크기가 1인 선분의 연장선에 크기가  $b$  인 길이를 더한다.
- ③ 아래 그림과 같이 평행선을 긋는다.
- ④ 두 삼각형이 닮은꼴이므로  $a:1 = (a+x):(b+1)$  이다. 따라서  $x=ab$  이다.



<그림 21>

<나누기>

- ① 길이가  $a$  인 선분의 연장선과 크기가  $b$  인 선분의 연장선을 긋는다.
- ② 크기가  $a$  인 선분의 연장선에 크기가 1 인 길이를 더한다.
- ③ 그림과 같이 평행선을 긋는다.
- ④ 두 삼각형이 닮은꼴이므로  $a : b = (a + 1) : (x + b)$  이다. 따라서  $x = \frac{b}{a}$  이다.

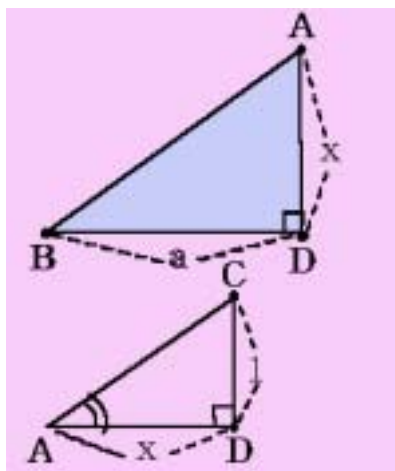


<그림 22>

<제곱근 구하기>

- ① 선분 AP를 지름으로 하는 원을 그린다.
- ② 점 A에서 거리가  $a$  인 점 O에서 수선을 그어 원과 만나는 점을 Q라 한다.
- ③ 삼각형 AOQ와 OPQ가 닮은꼴이므로  $a : x = x : 1$  이다, E라서 선분 OQ의 길

이  $x = \sqrt{a}$  이다.



<그림 23>

<의의>



데카르트는 이 작도 문제를 계기로 그때까지 도형으로만 풀려고 했던 작도 문제를 대수적으로도 바꾸어 보려는 시도가 도형과 방적식을 연결하는 해석기하학을 탄생시켰다. 그 결과 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있는 연산은 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기와 제곱근 구하기의 다섯 가지 밖에 없다는 사실을 알아냈다. 이 사실은 곧 각의 삼등분선에 관한 것을 방정식으로 나타내었을 때 가감승제와 제곱근을 구하는 계산만을 요구하는 것(1차 방정식과 2차 방정식)이면 해결이 되나 그 외의 것은 불가능하다는 것을 의미한다.

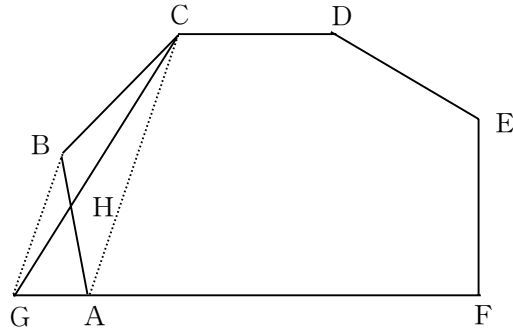
## 4. 원적문제

### 1) 유래

동양에서는 원은 하늘을 나타내고 정사각형은 땅을 나타내는 상징이었으며 또한 원과 사각형의 면적에 대하여도 잘 알고 있었다. 그러나 원과 정사각형의 크기에 관한 비교는 없었던 것과 같다. 이집트인들은 원의 넓이에 관심이 많아 파피루스에 이에 관한 기록이 있다. 그들은 반지름이 1인 원의 넓이를  $(\frac{16}{9})^2$ 으로 생각하여 원주율을 3.16049 정도의 근사값으로 하고 있었다. 그러나 이러한 실용적인 면에서의 근사값은 이성애 기반을 두는 그리스인을 만족하지는 못했을 것이다. 그리스인은 농토의 경지 정리를 위하여 곡선으로 되어 있는 농토를 사각형이나 다른 모형으로 고치려고 하였을 것이다. 아낙사고라스(Anaxagoras)는 “주어진 원과 꼭 같은 넓이를 가진 정사각형을 작도할 수 있는가?”하는 문제를 생각하였다. 이 문제를 원적문제라 한다. 즉 반지름의 길이가 1이면 원의 면적은  $\pi$ 이므로 원적 문제는  $x^2 = \pi$ 가 되는 한 변  $x$ 를 작도하는 문제이다. 이것은 곧 기준이 되는 선분이 주어질 때 그 길이의  $\sqrt{\pi}$  배가 되는 선분을 자와 컴퍼스만 이용하여 작도할 수 있는가? 하는 문제가 된다.



2) 안티폰(Antiphon, B.C 480 ~ 411)의 시도<sup>9)</sup>



<그림 24>

<해설>

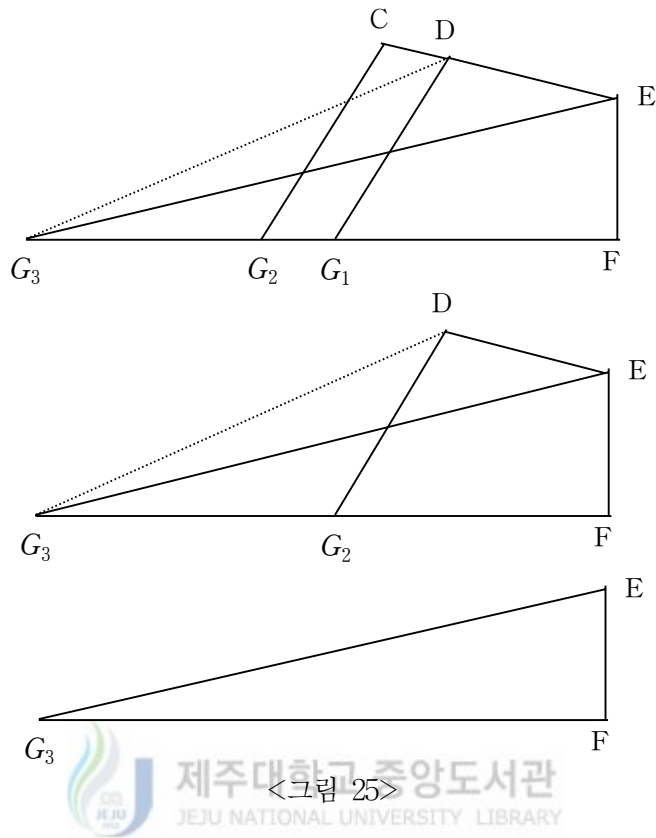
주어진 다각형과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 그리는 방법은 <그림 24>에서  $AC$ 와 나란한 직선을  $B$ 에서 긋고,  $AF$ 의 연장선과 이 직선이 만나는 점을  $B$ 에서 긋고,  $AF$ 의 연장선과 이 직선이 만나는 점을  $G$ 라 하면,  $\triangle ACG$ 의 넓이 =  $\triangle ABC$ 의 넓이라는 것을 알 수 있다.

또한, 다각형  $ABCDEF$ 는 그보다 변의 개수가 하나 적은 다각형  $GCDEF$ 의 넓이와 같다는 것을 알 수 있다. 이 사실을 일반적으로 표현한다면,

① 주어진 다각형과 같은 넓이를 갖고, 그보다 변의 개수가 하나 적은 넓이를 갖는 다각형이 존재한다. 이는 <그림 24>에서 그 가능성을 알 수 있다.

② <그림 25>의 순서를 계속한다.

9) 김용운 외, “도형이야기”, 우성: p.59~62, 1996



- ③ 결국 주어진 다각형과 같은 넓이를 갖는 삼각형을 얻는다.
- ④ 이 삼각형에서 그와 같은 넓이를 갖는 직사각형을 작도한다.
- ⑤ 이 직사각형과 같은 넓이를 갖는 정사각형의 작도는 서로 이웃하는 두 변의 비례중항을 구한다는 간단한 문제로 귀결된다.

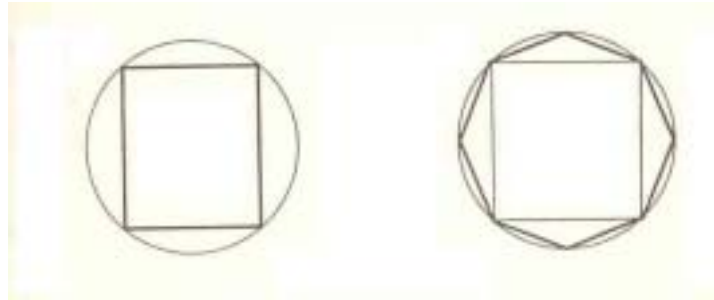
이 지식을 근거로 해서 원과 동일한 넓이를 갖는 정사각형을 작도하는 원적 문제는 주어진 원과 동일한 넓이를 갖는 다각형을 구한다는 문제로 대치된다. 이 생각을 근거로 하여 안티폰은 다음과 같이 전개하였다.

- (1) 주어진 원에 내접하는 정사각형을 그린다.<그림 26>
- (2) 이 정사각형의 각변을 밑변으로 하고, 원주상에 꼭지점을 갖는 이등변삼각형을 작도한다.<그림 27> 그 결과 내접하는 정팔각형을 얻는다.

(3) 같은 방법으로 내접 정16각형을 얻는다.

이와 같은 과정을 계속하여 반복하면,

(n) 계속  $n$  번 이런 방법을 써서 내접하는 정  $2^n$  다각형을 얻는다.



<그림 26>

<그림 27>

이와 같이 얻어진 내접  $2^n$  다각형의 넓이는  $n$  이 증가하면 점점 원의 넓이와 같아지며, 마침내 원의 면적과 내접다각형의 면적이 일치한다는 생각이다. 이 생각은 원이 극히 작은 선분의 모임이라고 생각한 것이고, 그 관점에서는 선이 작은 점으로 이루어지고 있다는 피타고라스의 생각을 이어 받았음을 알 수 있다. 그러나 이 견해는 엄밀한 논리 체계에서 받아들일 수 없음이 분명하다. (제논의 역리<sup>10)</sup> 참조)

10) 스승 파르메니데스를 변호하기 위해 엘레아의 제논이 고안한 역설(패러독스). 그 이론은 ① 다부정론(多否定論) ② 이분법(二分法) ③ 아킬레스와 거북 ④ 날아가는 화살 ⑤ 경기장 등이다. ① 다부정론은 많은 것이 존재하면 저마다 하나의 존재로서 크기를 가지지 못하므로 무한히 작고, 다른 한편으로는 하나하나가 무(無)가 아닌 이상 크기를 가지고 있으며 크기는 무한히 분할할 수 있기 때문에 무한히 크다. ② 이분법은 목적지에 가려면 중간점을 통과해야 하고 그 중간점에서 목적지까지의 중간점을 또 지나야만 하는데, 결국은 이런 식으로 해서 나오는 무한 개의 중간점을 통과할 수 없기 때문에 목적지에 도달할 수 없다. ③ 아킬레스와 거북은 아킬레스가 거북이 있던 지점을 뒤쫓아가면 그 사이에 거북은 조금 앞으로 나아가 있다. 거북이 나아가 있는 그 지점을 다시 아킬레스가 뒤쫓아가면 그 사이에 거북은 다시 조금 앞으로 나아가 있다. 이렇게 해서

논리적으로 무리가 많아서 받아들일 수는 없어도 이 방법의 핵심은 미적분의 기초 개념인 극한과 수렴의 사상에 접근되어 가고 있음에 주목해야 하고, 이런 시도가 후세에 남긴 영향이 적지 않다.

#### <한계>

이 방법의 기본 생각은 내접정다각형의 변의 수를 증가시킴으로써 원의 넓이와 내접정다각형의 넓이의 차를 무한히 작게 한다는 것이었다. 즉, 내접정  $n$  다각형의 넓이를 원의 넓이에 접근시킨다는 것이었다. 그러나 이 방법으로서는 내접정  $n$  다각형이 근사값으로서의 원의 넓이에 접근하고 있음을 알려줄 뿐이지, 실제로 그 접근해야 대상, 즉 원의 넓이는 알 수 없으므로 작도한다는 의미에서는 가치가 없다.

### 3) 브뤼손(Bryson)의 방법(B.C 4세기초 활동)



#### <해설>

브뤼손은 안티폰의 방법을 더 진전시켰다.

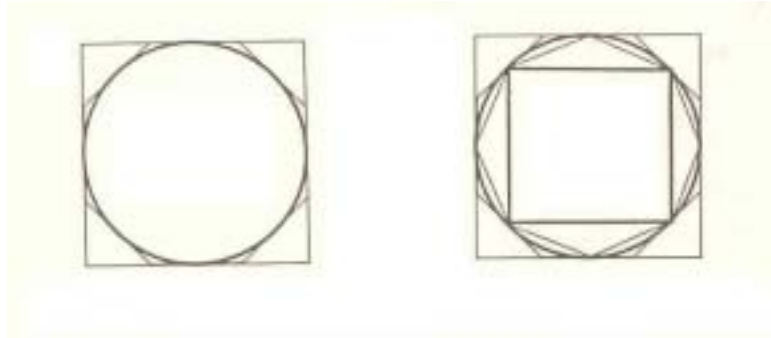
- ① 원에 외접하는 정  $2^4$  각형을 그리고, <그림 28>

-----

- ② 계속해서 외접하는 정  $2^{n+1}$  각형을 작도한다. <그림 29>

---

아킬레스는 거북에게 무한히 다가가기는 하지만 결코 따라잡을 수는 없다. ④ 날아가는 화살은 극히 짧은 순간에는 일정한 지점에 있고, 다음 순간에도 다음의 일정한 지점에 있다. 이렇게 날아가는 화살은 각 순간에는 정지해 있고, 정지가 겹쳐 쌓이면 운동은 없다. ⑤ 경기장의 내용은 불분명하다.



<그림 28>

<그림 29>

동시에 내접하는  $2^{n+1}$ 각형을 그려 가면 외접정다각형의 넓이는 변의 수가 늘어감에 따라 점차 그 크기는 작아지고, 그 반대로 내접정다각형의 넓이는 그 변의 수가 많아질수록 점차 커진다. 그리고 언제나 외접정다각형과 내접정다각형 사이에는 원이 있다. 따라서 원의 넓이는 외접정다각형과 내접정다각형의 넓이의 사이에 있는 어떤 값을 갖는다는 것이 브뤼손의 주장이다.



<한계>

브뤼손의 생각은 무한히 접근해 가는 두 개의 외접정다각형의 넓이와 외접정다각형의 넓이가 실제로도 무시해도 좋을 정도의 근사한 차이이므로 이것을 단순히 이 둘 사이의 수라고 했으나, 좀 더 큰 수를 사용하면,

$$6 < 7 < 9$$

$$6 < 8 < 9$$

이므로  $7 = 8$  이라고 할 수 없는 것은 명확하다.

<의의>

내접정  $2^{n+1}$ 각형과 외접정  $2^{n+1}$ 각형의 변의 수를 아무리 늘린다 해도, 다시 말

해서  $n$ 을 아무리 큰 수로 잡는다 해도 다음의 부등식이 성립한다.

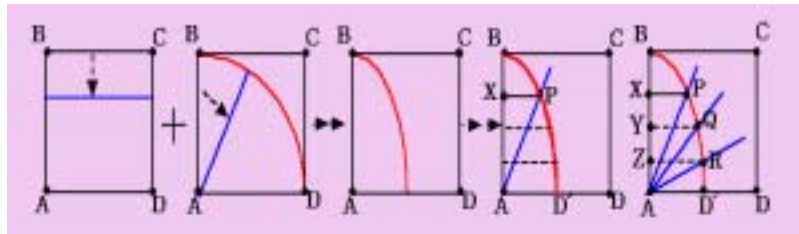
외접정  $2^{n+1}$ 각형의 넓이 > 원의 넓이 > 내접정  $2^{n+1}$ 각형의 넓이

동시에 외접정  $2^{n+1}$ 각형  $S_n$ 과 외접정  $2^{n+1}$ 각형  $s_n$ 의 차이는 얼마든지 작게 할 수 있다. 다시 말해서  $(S_n - s_n)$ 은 얼마든지 작은 수가 된다는 것이고, 해석적 기호로써 이것을 설명하자면 임의의  $\epsilon (\epsilon > 0)$ 에 대하여 정수  $N$ 이 존재하여  $n \geq N$ 이면,

$$(S_n - s_n) < \epsilon$$

그런데, 원의 넓이는 이들  $S_n$ 과  $s_n$  사이의 수이므로 원의 넓이와 이들 양자 사이의 차이는  $S_n$ 과  $s_n$ 의 차 보다 작다. 이것은 원의 넓이에 얼마든지 가까운 값을 계산해 낼 수 있음을 말하고 있는 것이다. 즉, 브뤼손의 방법은 외접다각형의 둘레를 계산해 나감으로써 안티폰의 방법이 갖는 결함을 보완하였다.

#### 4) 히피아 곡선(원적 곡선)



<그림 30> 원적곡선

#### <해설>

앞에서 각의 삼등분에 쓰였던 히피아스의 곡선을 이용하면 해결 방법이 생긴다. 먼저 예비 지식으로 다음 사실을 알고 있어야 한다. 이 곡선에는 다음과 같은 성

질이 있다는 것이 이미 알려져 있다. <그림 30>에서  $O$ 를 중심으로 하는 원호  $\widehat{AC}$ 와 변  $OC$ 의 비는  $OC$ 와  $OR$ 의 비와 같다. 식으로는

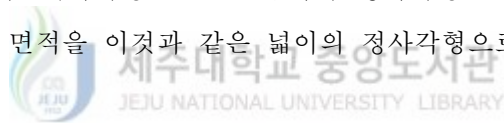
$$\widehat{AC} : \overline{OC} = \overline{OC} : \overline{OR}$$

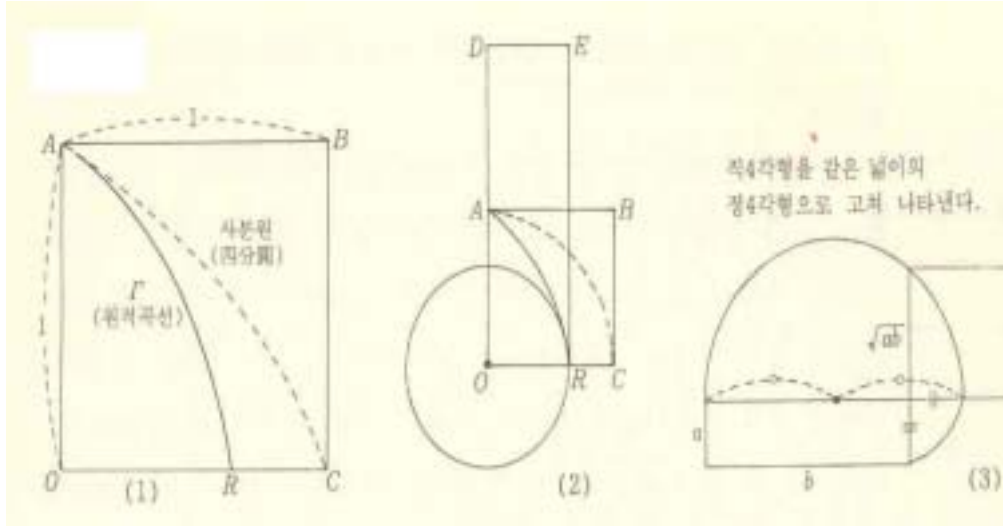
이다. 그런데, 원호  $\widehat{AC}$ 의 반지름  $\overline{OC}$ 의 길이는 1이므로  $\widehat{AC} (= \frac{\pi r}{2}, \text{원주의 } \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서 앞의 식은  $\frac{\pi}{2} : 1 = 1 : \overline{OR}$  이고 따라서

$$\overline{OR} = \frac{2}{\pi}$$

이다. 여기서,  $O$ 를 중심,  $\overline{OR} (= \frac{2}{\pi})$ 를 반지름으로 하는 원을 그리면, 그 넓이는  $\pi(\frac{2}{\pi})^2 = 2 \cdot (\frac{2}{\pi}) = 2 \cdot [1 \cdot (\frac{2}{\pi})] = 2 \cdot [\overline{AO} \cdot \overline{OR}]$ 이다.

그러므로, 이 원의 넓이는 밑변이  $\overline{OR}$ , 높이가  $\overline{AO}$ 의 2배인 직사각형  $ODER$ 의 그것과 같아진다. 직사각형을 같은 넓이의 정사각형으로 고치는 것은 간단하다. 그러므로 원의 면적을 이것과 같은 넓이의 정사각형으로 나타내는 일은 해결된 셈이다.





<그림 31>

5) 아르키메데스의 연구(근사적 연구)<sup>11)</sup>

아르키메데스는 논문 <원의 측정에 관하여>에서 <정리 5>를 제시하였다.

<정리 5>

원에 내접하는 다각형과 외접하는 다각형을 이용한  $\pi$ 의 근사값은  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ 이다.

<증명>

$n \geq 3$ 에 대해 원에 내접하는 정  $n$ 각형과 외접하는 정  $n$ 각형의 둘레를 각각

11) 한인기, “교사를 위한 수학사, 경문사: p88~90, 2003



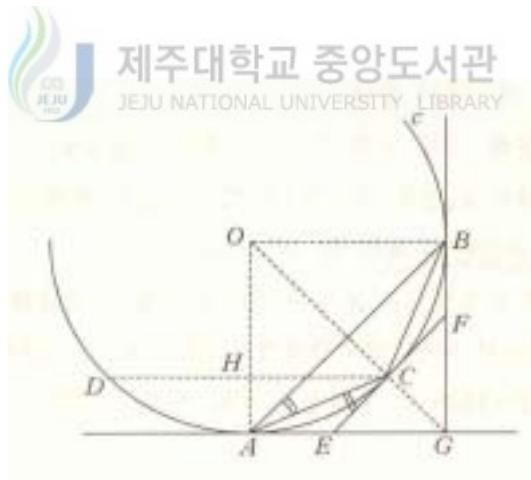
$I_n, C_n$  이라 하면, 원의 둘레는  $I_n$  과  $C_n$  사이에 속한다. 이때  $n$  을 증가시키면,  $C_n - I_n$  의 값은 점차로 감소하여,  $n$  을 크게 할수록 정확한 원의 둘레, 즉  $\pi$  값을 구할 수 있다.

$$n \geq 3 \text{ 에 대해 } I_{2n} = \sqrt{I_n \cdot C_n}, \quad C_{2n} = \frac{2C_n \cdot I_n}{C_n + I_n} \text{ 임을 보였고,}$$

$I_6 = 6, C_6 = 4\sqrt{3}$  을 초항으로 잡아,  $\pi$  의 근사값으로  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$  을 얻었다.

$$\text{이제, } I_{2n} = \sqrt{I_n \cdot C_n}, \quad C_{2n} = \frac{2C_n \cdot I_n}{C_n + I_n} \text{ 임을 증명하자.}$$

<그림 32>에서 점  $O$  는 원  $C$  의 중심이고,  $\overline{AB}$  는 원  $C$  에 내접하는 정  $n$  각형의 변이고,  $\overline{AC}$  와  $\overline{CB}$  는 내접하는 정  $2n$  각형의 변들이라 하고,  $\overline{EF}$  는 외접하는 정  $2n$  각형의 변이고,  $\overline{AG}$  는 외접하는 정  $n$  각형의 변의 절반이라 하자.



<그림 32>

그리고  $\overline{AB} = i_n, \overline{AC} = i_{2n}, \overline{EF} = c_{2n}, \overline{AG} = \frac{1}{2} c_n$  이라 하자. 삼각형  $EGC$  와  $OGA$  는 각  $G$  가 공통인 직각삼각형이므로 닮음이다.

이로부터,  $\overline{EC} : \overline{EA} = \overline{OA} : \overline{OG} = \overline{OA} : \overline{OC}$  이므로  $\overline{OA} : \overline{OG} = \overline{OC} : \overline{OG}$  이다. 한편,  $\overline{AB}$ 의 길이가 같은 현  $DC$ 를 잡자. 그러면, 삼각형  $OHC$ 와  $OAG$ 는 닮음이 된다. 이로부터,  $\overline{OC} : \overline{OG} = \overline{HC} : \overline{AG}$  이다.

얻어진 비례식들로 부터  $\overline{EC} : \overline{EG} = \overline{HC} : \overline{AG}$ .  $\overline{EG} = \overline{AG} - \overline{AE}$  이고

$$\overline{AE} = \overline{EC} \text{ 이므로, } \frac{c_{2n}}{2} : \left( \frac{c_n}{2} - \frac{c_{2n}}{2} \right) = \frac{i_n}{2} : \frac{i_n}{2} \text{ 이다. 이로부터, } c_{2n} = \frac{c_n \cdot i_n}{c_n + i_n}$$

를 얻을 수 있다. 양변에  $2n$ 을 곱하면,  $2nc_{2n} = \frac{2nc_n \cdot ni_n}{nc_n + ni_n}$  이고 이 때,

$2nc_n, nc_n, ni_n$ 은 각각  $C_{2n}, C_n, I_n$ 과 같다.

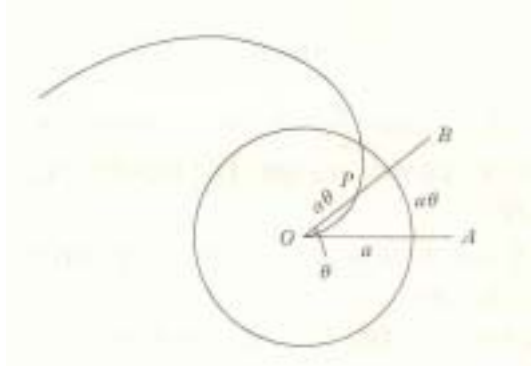
그러므로, 구하는 등식  $C_{2n} = \frac{2C_n \cdot I_n}{C_n + I_n}$ 을 얻을 수 있다.

이제,  $I_{2n} = \sqrt{I_n \cdot C_n}$ 을 증명하자.  $\triangle AEC$ 와  $\triangle ACB$ 가 닮음이므로,

$$\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AB} \text{ 이고, } i_{2n} = \sqrt{\frac{c_{2n}}{2} \cdot i_n} \text{ 이다. 양변에 } 2n \text{을 곱하면,}$$

$$2ni_{2n} = \sqrt{2nc_{2n} \cdot ni_n} \text{ 이고, 이로부터 } I_{2n} = \sqrt{I_n \cdot C_n} \text{을 얻을 수 있다.}$$

6) 아르키메데스의 나선을 이용한 방법(정확한 방법)



<그림 33> 아르키메데스의 나선

<해설>

중심이  $O$ 이고 반지름이  $a$ 인 원을 작도하고, 점  $O$ 를 중심으로 아르키메데스의 나선을 작도하자.

각  $AOB$ 를  $\theta$ 라 하면,  $\widehat{AB} = a\theta$ 이다. 한편, 점  $P$ 는 아르키메데스의 나선에 속하므로,  $\overline{OP} = a\theta$ 이다. 이때,  $\theta$ 를 직각으로 잡으면,  $\frac{\pi a}{2}$ 가 된다. 한편, 반지름이  $a$ 인 원의 넓이는  $\pi a^2$ 인데, 이것은  $(2a) \times (\frac{\pi a}{2}) = 2a \times \overline{OP}$ 이다.

결국, 반지름이  $a$ 인 원과 같은 넓이를 가지는 정사각형을 작도하는 것은 선분  $\sqrt{2a \cdot \overline{OP}}$ 를 작도하는 것과 같다.

$\sqrt{2a \cdot \overline{OP}}$ 를 작도하는 것은  $2a : x = x : \overline{OP}$ 를 만족시키는 비례중항을 작도하는 것이므로, 이것은 작도가능하다. 이로부터, 주어진 원과 같은 넓이를 가지는 정사각형이 작도된다.

## 7) 실진법(悉盡法, method of exhaustion)<sup>12)</sup>

### <정의 6>

에우독소스의 보조정리<sup>13)</sup>를 이용한 고대의 극한 방법을 ‘실진법’이라 한다.

### <실진법의 일반적인 구조: 넓이가 $S$ 인 도형 $A$ 의 넓이를 구하기>

(1) 도형  $A$ 에 넓이가 각각  $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ 인 도형  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 을 차례로 내접시킨다.

$(A - A_1$ 의 넓이)  $< \frac{1}{2} S$ ,  $[A - (A_1 + A_2)$ 의 넓이]  $< \frac{1}{2} (A - A_1)$ ,

$[A - (A_1 + A_2 + A_3)$ 의 넓이]  $< \frac{1}{2} (A - A_1 - A_2)$ 로 조작할 수 있다. 이와 같은 과정을 반복하면,

에우독소스 보조정리에 의해  $A - (A_1 + A_2 + \dots + A_n)$ 의 넓이를 원하는 만큼 작게 하는  $n$ 을 구할 수 있다.

(2) 각각의  $A_i$ 는 도형  $A$ 에 내접하므로, 수열  $s_1, (s_1 + s_2), (s_1 + s_2 + s_3), \dots$

12) 한인기, “교사를 위한 수학사”, 교우사: p.125~129, 2003

13) 4개의 양  $A, B, C, D$ 가 주어졌을 때,  $A : B = C : D$ ,

즉  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ 를 다음과 같이 정의한 것이다. 즉, 임의의 자연수  $m, n$ 에 대해서  $A$ 와  $C$ 를  $m$ 배, 또  $B$ 와  $D$ 를  $n$ 배 할 때

$$mA > nB \text{ 이면, 반드시 } mC > nD$$

$$mA = nB \text{ 이면, 반드시 } mC = nD$$

$$mA < nB \text{ 이면, 반드시 } mC < nD$$

이 성립되면  $A : B = C : D$ 가 성립된다고 하였다.

는  $S$ 보다 작은 값들을 가진다.

(3) 내접한  $A_i$ 들의 합  $s_1 + s_2 + \dots + s_n$ 에 관련된 관계식을 구한다.

(4) 도형  $A$ 의 넓이가  $S$ 임을 보이기 위해,

( $A$ 의 넓이)  $< S$ 와 ( $A$ 의 넓이)  $> S$ 인 경우를 조사한다. 이때, (1), (2), (3)에서 얻어진 결과들을 바탕으로 두 가지 경우 모두로부터 모순을 유도하여  $A$ 의 넓이가  $S$ 임을 밝힌다.

살펴본 바와 같이 고대 수학에서는 극한에 대한 체계적 연구가 없었기 때문에 실진법에서 도형  $A$ 의 넓이  $S_A$ 가  $S$ 임을 보이기 위해, 귀류법을 사용하여  $S_A > B$ ,  $S_A < B$ 인 경우가 각각 성립하지 않는다는 것을 보여야 했다. 그러나 현대적인 극한 개념<sup>14)</sup>을 사용하면 쉽게 결론을 내릴 수 있다.

<아르키메데스의 연구><sup>15)</sup>



#### 가) 포물선의 활꼴의 성질

포물선의 호  $APD$ 와 현  $AD$ 에 의해 둘러싸인 활꼴에서<그림 36>  $\overline{AD}$ 와 평행한 포물선의 접선에서 접점  $P$ 를 활꼴의 꼭지점, 현  $AD$ 를 활꼴의 밑변이라 하자. 그러면 포물선의 성질<sup>16)</sup>에 의해  $\overleftrightarrow{PQ}$ 는 포물선의 축과 평행하다.

14)  $S_A = B$ 은 두 극한  $\lim_{n \rightarrow \infty} (B - A_n) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A - A_n) = 0$  이면

$$S_A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B \text{ 이다}$$

15) 한인기, “교사를 위한 수학사”, 교우사: p.125~129, 2003

16)  $\overleftrightarrow{AB}$ 가 포물선의 점  $P$ 에서 접선이고, 현  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ 이 접선과 평행하면<그림 34>,

(1) 현들의 중점  $C_1, C_2, C_3, \dots$ 이 한 직선  $l$ 에 속하며

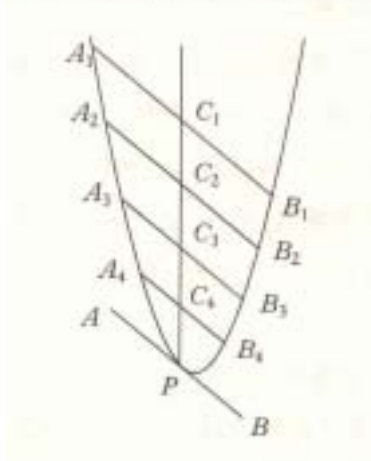
(2) 직선  $l$ 은 포물선의 축과 평행하고 한점  $P$ 를 지나며

나) 포물선의 활꼴의 성질

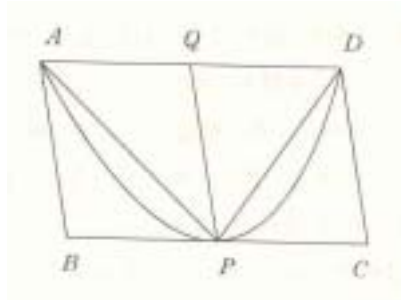
포물선의 호  $APD$ 와 현  $AD$ 에 의해 둘러싸인 활꼴을 생각하자.<그림 35>. 이때,  $\overline{AD}$ 와 평행한 포물선의 접선에서 접점  $P$ 를 활꼴의 꼭지점, 현  $AD$ 를 활꼴의 밑변이라 하자. 그러면 포물선의 성질에 의해  $\overleftrightarrow{PQ}$ 는 포물선의 축과 평행하다.

$$(3) \frac{\overline{A_1C_1^2}}{PC_1} = \frac{\overline{A_2C_2^2}}{PC_2} = \frac{\overline{A_3C_3^2}}{PC_3} = \dots \text{이다.}$$

제주대학교 중앙도서관  
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY



<그림 35>



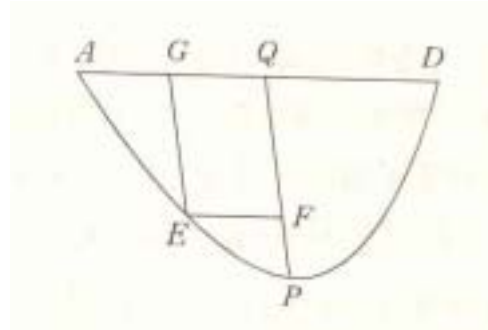
<그림 35>

활꼴에 내접하는 삼각형  $APD$ 와 외접하는 평행사변형  $ABCD$  ( $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ )를 작도하자. 삼각형  $APD$ 의 넓이는 평행사변형  $ABCD$ 의 절반이므로, 삼각형의 넓이는 활꼴 넓이의 절반보다 크다. 그러면 활꼴에서 삼각형  $APD$ 를 제외하고 남은 두 조각 넓이의 합은 활꼴 넓이의 절반보다 작게 된다.

남은 두 활꼴 조각에 대해 삼각형들을 내접시키자. 그러면 마찬가지로 이유로 삼각형들의 넓이의 합은 두 활꼴 조각의 넓이의 합보다 크고, 이제 두 삼각형을 제외하고 남은 네 활꼴 조각의 넓이의 합은 두 활꼴 조각 넓이의 합보다 작게 된다. 이와 같은 과정을 반복하면, 활꼴이 다각형에 내접하게 되고, 에우독소스의 보조 정리에 의해 활꼴에서 다각형을 제외하고 남은 활꼴 조각들의 넓이의 합을 원하는 만큼 작게 만들 수 있다.

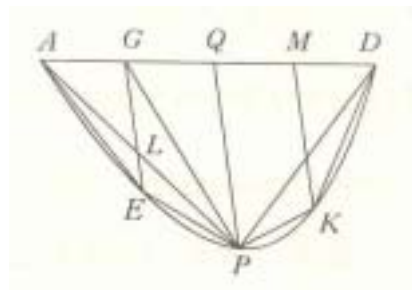
**다) 포물선의 활꼴의 넓이를 구한 아르키메데스의 방법**

우선,  $\overline{AQ}$ 의 중점  $G$ 를 지나  $\overleftrightarrow{PQ}$ 에 평행한 직선  $EG$ 를 작도하고 <그림 36>,  $\overline{PQ} = \frac{4}{3} \overline{EG}$ 임을 알 수 있다. 즉,



<그림 36>

$\overleftrightarrow{AQ}$ 는 평행한 직선  $EF$ 를 작도하면, 포물선의 성질에 의해  $\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{PF}}$  이다. 한편  $\overline{AQ} = 2\overline{EF}$ 이므로,  $\overline{PQ} = 4\overline{PF}$ 이다. 그러므로  $\overline{FQ} = \overline{EG} = 3\overline{PF}$  이다. 이로부터,  $\overline{PQ} = \frac{4}{3}\overline{EG}$ 를 얻을 수 있다.



<그림 37>

이제, 삼각형  $APD$ 의 넓이가  $\triangle AEP$ ,  $\triangle PKD$ 의 넓이 각각의 8배라는 것을 보이자<그림 37>. 활꼴  $AEP$ 의 꼭지점  $E$ 를 지나 포물선의 축에 평행한 직선  $EG$ 를 작도하면, 포물선의 성질에 의해  $\overleftrightarrow{EG}$ 는 현  $AP$ 를 이등분하므로, 결국



$\overline{AQ}$ 를 이등분하고, 따라서  $\overline{AG} = \overline{GQ}$ 이다. 또한 점  $Q$ 가  $\triangle APQ$ 의 변  $AQ$ 의 중점이므로,  $PQ = 2\overline{LG}$ 이다. 그리고  $\overline{PQ} = \frac{4}{3}\overline{EG}$ 이므로  $3\overline{LG} = 2\overline{EG}$ 이고  
 이로부터  $\overline{LG} = 2\overline{EL}$ 를 얻는다. 이제,  $\triangle AGL$ 과  $\triangle ALE$ 를 보자. 이들의 밑변  $GL$ 과  $LE$ 는 한 직선에 속하고, 꼭지점  $A$ 는 공통이다. 그런데  $\overline{LG} = 2\overline{EL}$ 이므로  $S_{AGL} = 2S_{ALE}$ 이다. 마찬가지로, 삼각형  $GLP$ 와  $LEP$ 의 밑변  $GL$ 과  $LE$ 가 한 직선에 속하고, 꼭지점  $P$ 가 공통이므로  $S_{GLP} = 2S_{LEP}$ 이다. 등식  $S_{AGL} = 2S_{ALE}$ 와  $S_{GLP} = 2S_{LEP}$ 로부터  $S_{AGP} = 2S_{AEP}$ 이다. 한편  $S_{APD} = 4S_{APG}$ 임을 감안하면,  $S_{APD} = 8S_{AEP}$ 이다. 마찬가지로 방법으로,  $S_{APD} = 8S_{PKD}$ 임을 증명된다. 그러므로 삼각형  $APD$ 의 넓이를  $s_1$ , 삼각형  $AEP$ 와  $PKD$ 의 넓이의 합을  $s_2$ 라 하면,  $s_1 = 4s_2$ 이다.

같은 방법으로, 삼각형들을 활꼴에 계속 내접시키자. 첫 번째 단계에서 내접하는 삼각형의 넓이를  $s_1$ , 두 번째 단계에서 내접하는 두 삼각형의 넓이의 합을  $s_2$ , 세 번째 단계에서 내접하는 네 삼각형의 넓이를  $s_3, \dots$  등과 같이 나타내자. 그러면 무한수열  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ 을 얻게 되며,  $s_2 = \frac{1}{4s_1}$ ,  $s_3 = \frac{1}{4s_2}$ ,  $\dots$   $s_n = \frac{1}{4s_{n-1}}$ ,  $\dots$ 이다.

이제, 수열  $s_i$ 에서 임의의  $n$ 에 대하여  $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \frac{4}{3}s_n = \frac{4}{3}s_1$ 이 성립함을 보이자.  $4(s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n) = 4s_1 + (4s_2 + 4s_3 + 4s_4 + \dots + 4s_n)$ 에 등식

$$s_2 = \frac{1}{4s_1}, s_3 = \frac{1}{4s_2}, \dots, s_n = \frac{1}{4s_{n-1}}$$

을 대입하면,

$$4(s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{n-1}) + 4s_n = 4s_1 + (s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{n-1}),$$

$$3(s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{n-1}) + 4s_n = 4s_1.$$

을 얻는다. 얻어진 등식을 3으로 나누면,  $(s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n) + \frac{4}{3} s_n = \frac{4}{3} s_1$

이 증명된다. 이제, 포물선 활꼴의 넓이가  $S = \frac{4}{3} s_1$  임을 증명하자. 아르키메데스는

는  $S > \frac{4}{3} s_1$  또는  $S < \frac{4}{3} s_1$  이라 가정하고, 이들로부터 모두 모순이 유도됨을 보여

$S = \frac{4}{3} s_1$  임을 증명하였다.

우선,  $S > \frac{4}{3} s_1$  라고 가정하자. 앞에서 살펴보았듯이 활꼴의 남아있는 부분들의

넓이의 합을 원하는 만큼 작게 할 수 있다. 이것은 적당하게  $n$  을 잡으면 차  $S - (s_1 + s_2 + \dots + s_n)$  을 어떤 양수보다 작게 만들 수 있음을 의미한다.  $n$  을

$S - (s_1 + s_2 + \dots + s_n) < S - \frac{4}{3} s_1$  이 되도록 잡으면  $(s_1 + s_2 + \dots + s_n) > \frac{4}{3} s_1$  이

고, 이것은 이미 증명한  $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \frac{4}{3} s_n = \frac{4}{3} s_1$  에 모순된다.

이제,  $S < \frac{4}{3} s_1$  이라 가정하자. 수열,  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$  의 항들이 0으로 가까이

가므로, 부등식  $\frac{4}{3} s_n < \frac{4}{3} s_1 - S$  가 성립하도록  $n$  을 잡을 수 있다. 이 부등식과

$s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \frac{4}{3} s_n = \frac{4}{3} s_1$  으로부터,  $S < (s_1 + s_2 + \dots + s_n)$  을 얻고, 이

것은 불가능하다. 이로부터  $S = \frac{4}{3} s_1$  이 증명된다.

## 8) 초승달꼴 도형의 넓이 구하기<sup>17)</sup>

히포크라테스는 넓이를 구할 수 있는 세 가지 초승달 꼴을 찾았다.

### <히포크라테스의 첫 번째 초승달꼴>

지름이  $\overline{AB}$  인 원에 작도된 초승달꼴이다. <그림 38>에서  $\triangle ABC$  는 직각삼각형이고,  $O$  를  $\overline{AB}$  의 중점,  $C$  를  $\widehat{AB}$  의 중점이라 하자.

$\triangle ABC$  의 옆 변  $\overline{BC}$  에 반원을 작도하자. 그러면 부채꼴  $BOC$  의 넓이와 지름이  $\overline{BC}$  인 반원의 넓이는 각각 지름이  $\overline{AB}$  인 반원 넓이의 절반과 같고, 부채꼴  $BOC$  의 넓이와 지름이  $\overline{BC}$  인 원의 넓이가 같게 된다. 그러므로 부채꼴  $BOC$  와 지름이  $\overline{BC}$  인 반원에서 공통부분을 제거하면, 넓이가 같은 빗금 친 두 도형을 얻게 된다.

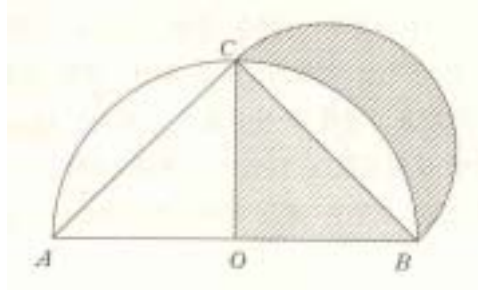
이제, 부채꼴  $BOC$  의 넓이와 지름이  $\overline{BC}$  인 반원의 넓이가 같음을 현대적 방법으로 보이자.  $\overline{OB} = r$ ,  $\overline{BC} = a$  라 하면, 피타고라스 정리에 의해,  $2r^2 = a^2$  이다. 따라서 부채꼴  $BOC$  의 넓이는  $\frac{1}{4\pi r^2}$  이고, 지름이  $\overline{BC}$  인 반원의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi a^2} = \frac{1}{4\pi r^2}$$

이다.

---

17) 한인기, “교사를 위한 수학사”, 교우사: p.91~95, 2003



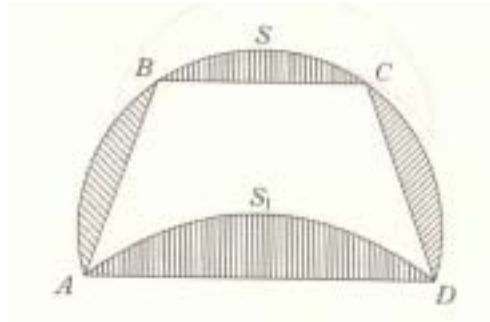
<그림 38>

<히포크라테스의 두 번째 초승달꼴>

히포크라테스는 두 번째 초승달꼴을 밑변  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AD}$ 가 각각 1,  $\sqrt{3}$  이고, 옆 변  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ 가 1인 등변사다리꼴에서 찾았다(그림 39). <그림 39>의 초승달꼴은 사다리꼴  $ABCD$ 의 외접원  $S$ 와  $\overline{BC}$ 를  $\overline{AD}$ 로 보내는 닮음변환(similarity transformation)<sup>18)</sup>에 의해 원  $S$ 를 변환시켜 얻은 원  $S_1$ 에 의해 경계 지워진 도형이다.

18) 평면 위 또는 공간에 있는 도형을 축소 또는 확대하여 이것과 닮은 도형으로 변환하는 것을 말한다. 상사변환(相似變換)이라고도 한다. 평행인 평면  $\pi, \pi'$ 와 점  $O$ 가 주어졌을 때,  $\pi$  위의 점  $P$ 에 직선  $OP$ 와  $\pi'$ 와의 교점  $P'$ 를 대응시키면, 이에 의하여  $\pi$  위의 도형이  $\pi'$  위의 도형으로 옮겨진다.  $\pi$  위의  $\triangle ABC$ 는  $\pi'$  위의  $\triangle A'B'C'$ 로 옮겨지는데, 이것은  $\triangle ABC$ 를 확대한 것이므로 서로 닮은 삼각형이다. 따라서 닮음변환은 확대·축소와 이동을 겸한 변환으로 생각할 수 있다.

일반적으로 평면 위에서 점  $(x,y)$ 를 점  $(x',y')$ 로 옮기는 변환  $x'=k(x \cos \theta - y \sin \theta) + p$ ,  $y'=k(x \sin \theta + y \cos \theta) + q$ 는 점  $(x,y)$ 를 원점의 둘레로  $\theta$ 만큼 회전시키고, 또 평면  $\pi$  위의 원점에서의 본래의 거리를  $k$ 배( $k$ 의 절대값  $|k|$ 는 닮음비)한 방사상(放射狀)으로 이동시키고, 다시  $x$ 축에 평행하게  $p$ ,  $y$ 축에 평행하게  $q$ 만큼 평행이동시킨 점으로 옮기는 변환을 보인다. 이 변환을 평면 위의 닮음변환이라고 한다. 닮음변환에서는 크기는 변할 수 있으나, 모양은 변하지 않는다. 합동변환은 닮음변환의 특수한 경우이다



<그림 39>

원에서 닮은 활꼴의 넓이는 활꼴의 변을 한 변으로 하는 정사각형에 비례하므로, 활꼴  $AD$ 의 넓이는 활꼴  $AB, BC, CD$ 의 합은 활꼴  $AD$ 와 같으므로, 초승달꼴의 넓이는 사다리꼴  $ABCD$ 의 넓이와 같다.

<히포크라테스의 세 번째 초승달꼴>

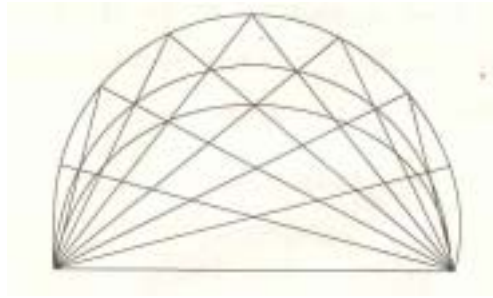


밑변  $\overline{BC}$ , 옆변  $\overline{AB}, \overline{CD}$ 가 각각 1이고, 대각선의 교점  $O$ 에 대해

$\overline{AO} = \overline{OD} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ 인 사다리꼴  $ABCD$ 에서 찾았다. 즉 <그림 40>에서 호  $ABCD$ 와  $AOD$ 에 의해 만들어진 초승달꼴이다.

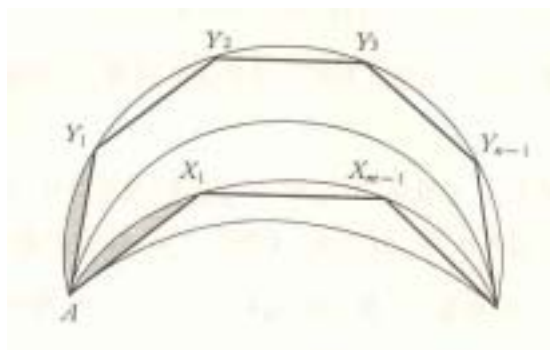


할점들과 연결하자. <그림 41>에서는 호  $AB$ 를 8등분하는 점을 표시하고, 점  $A$ ,  $B$ 와 분할점들을 연결한 선분을 작도하였다. 이 선분들의 교점은 점  $A$ ,  $B$ 를 지나는 6개의 원에 속하게 된다. 일반적으로, 호를  $n$ 등분하여, 점  $A$ ,  $B$ 를 분할점들과 연결하여 얻어진 선분의 교점은  $n-2$ 개의 원에 속하게 된다는 것이 밝혀졌다.



<그림 41>

이제, 호  $AB$ 를  $n$ 등분하였다고 하자<그림 42>. 만약, 처음 원에서 호  $AB$ 에 해당하는 중심각의 크기가  $n\alpha$ 라면, 나머지 원들에서 호  $AB$ 는 각각 중심각의 크기가  $\alpha$ 인 호  $(n-1)\alpha, (n-2)\alpha, \dots, 2\alpha$ 개로 구성된다. 그리고, 이 원들에 호  $AB$ 의 중심각의 크기가  $\alpha$ 가 되도록 원 하나를 추가하자.



<그림 42>

만약, 빗금 친 활꼴  $AY_1$  과  $AX_1$  의 넓이의 비가  $m:n$  이면, 이때,  $n$  개의 활꼴  $AY_1, Y_1Y_2, \dots, Y_{n-1}B$  의 넓이는  $m$  개의 활꼴  $AX_1, X_1X_2, \dots, X_{m-1}B$  의 넓이와 같게 되고, 호  $AY_1B$  와  $AX_1B$  에 의해 만들어진 초승달꼴의 넓이는 다각형

$AY_1 \cdots Y_{n-1}BX_{m-1} \cdots X_1$  의 넓이와 같게 된다.

한편, 활꼴  $AY_1$  과  $AX_1$  은 같은 각  $ABY_1, ABX_1$  을 가지므로, 이들은 닮음이다.

그러므로  $\overline{AY_1^2} : \overline{AX_1^2} = m:n$  이고,  $\overline{AY_1} : \overline{AX_1} = \sqrt{m} : \sqrt{n}$  이다.

한편, 사인 공식에 의해,

$$\begin{aligned} \overline{AY_1} : \overline{AX_1} &= \sin \angle AX_1Y_1 : \sin \angle AY_1B \\ &= \sin \angle AX_1B : \sin \angle AY_1B = \sin \left( \frac{m\alpha}{2} \right) : \sin \left( \frac{2\pi - n\alpha}{2} \right) \\ &= \sin m\beta : \sin n\alpha \quad (\text{단, } \beta = \frac{1}{2}\alpha) \end{aligned}$$

이다. 그리고  $\overline{AY_1} : \overline{AX_1}$  에 의해 얻어진 두 비례식으로부터,

$\sin m\beta : \sin n\beta = \sqrt{m} : \sqrt{n}$  을 만족시키는 근이 자와 컴퍼스로 작도 가능하면, 위에 기술한 초승달이 존재함을 알 수 있다.

히포크라테스가 발견한 초승달꼴은  $(m, n)$  이 (1,2), (1,3), (2,3)인 경우에 해당된다.

<정리 6> : 발레니우스(1766년)

$(m, n) = (1,5)$  인 경우에 자와 컴퍼스로 초승달꼴을 작도할 수 있다



<정리 7> : 클라우젠 (1840년)

$(m, n) = (3, 5)$  인 경우에 자와 컴퍼스로 초승달꼴을 작도할 수 있다

<정리 8> : 체보따레프 (1934년)

$(m, n)$  이 홀수인  $m, n$  에 대해 발견된 것 이외에는 작도 가능한 초승달꼴이 존재하지 않는다

## 9) 근사구장법(近似求長法)

<정의 7>

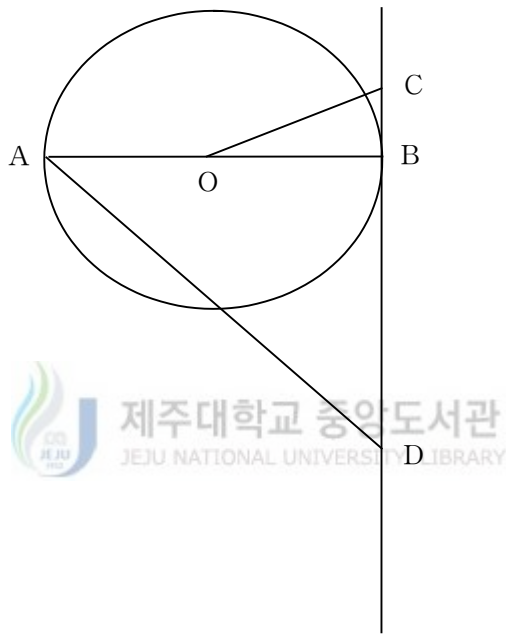
주어진 원의 원주와 동일한 길이를 갖는 선분을 구하는 근사적인 작도를 하는 방법을 근사구장법(近似求長法)이라 한다.

<해결방법>

원의 반경과 원주의 반의 길이를 갖는 선분 사이의 비례중항을 한 변으로 하는 정사각형을 작도함으로써 원의 근사적인 원적이 쉽게 구해진다.

1) 코찬스키(Kochanski)의 제안(1685)

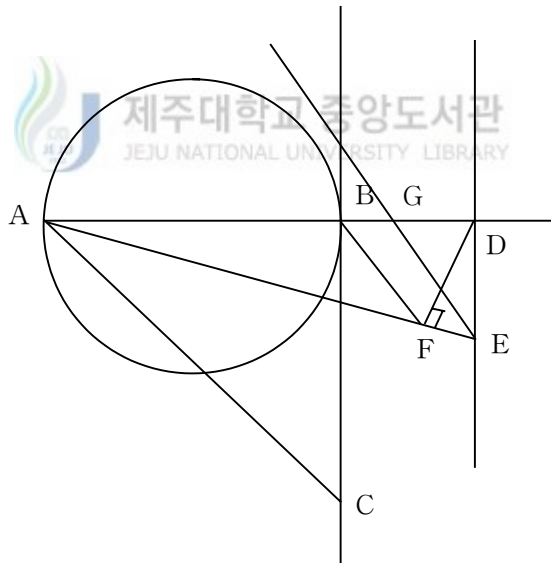
$AOB$ 가 주어진 원의 직경일 때  $B$ 의 접선 위에 각  $COB = 30^\circ$ 인 점  $C$ 를 취하고 다시 그 접선 위에  $CBD$ 가 원의 반경의 세배가 되는 점  $D$ 를 표시하자. 그러면  $2(AD)$ 가 근사적으로 원주의 길이가 된다. 그리고 이것이  $\pi$ 에 대한 근사값 3.14153을 준다.



<그림 43>

1) 드겔데(De Gelder)의 제안 (1849)

$AB=1$  이 주어진 원의 직경이라 하자.  $B$ 에서  $AB$ 에 수선을 그리고 그 위에  $BC=\frac{7}{8}$  인 점  $C$ 를 표시하고, 다시  $AB$ 의 연장선 위에  $AD=AC$ 인 점  $D$ 를 표시하자. 또  $D$ 에서  $AD$ 에 수선을 그리고 그 위에  $DE=\frac{1}{2}$ 인 점  $E$ 를 표시하고  $D$ 에서  $AE$ 에 내린 수선의 발을  $F$ 라고 하자.  $E$ 를 지나면서  $FB$ 와 평행한 직선이  $BD$ 와  $G$ 에서 만난다고 하자. 그러면  $GB$ 가  $\pi$ 의 소수부분에 대한 근사값을 준다.



<그림 44>

<증명>

$$\frac{GB}{BA} = \frac{EF}{FA} = \frac{(DE)^2}{(DA)^2} = \frac{(DE)^2}{(BA)^2 + (BC)^2} .$$

그러므로  $GB = \frac{4^2}{7^2 + 8^2} = \frac{16}{113} = 0.1415929\dots$

이것이  $\pi$ 의 근사값으로서  $\frac{355}{113}$ 을 준다.



## 5. 3대작도 문제의 해결

이 세 가지 문제는 2000여년 동안 많은 수학자들을 괴롭혀오다가 19세기에 와서야 반트젤(P. L. Wantzel : 1814~1848)과 린데만(Lindemann : 1852~1939)에 의해서 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로는 작도가 불가능하다는 것이 증명되었다.

이 문제를 풀기 위한 왕성한 연구가 결국 그리스 기하학에 심대한 영향을 끼쳤고 그 밖의 원추곡선, 3차 또는 4차 곡선, 초월곡선과 같은 풍부한 발견을 초래하였고, 훨씬 뒤 대수적 수의 문제, 군론의 발전에 큰 영향을 주었으며, 약 2천년 동안 미해결 문제로 있다가 19세기에 이르러서야 특히 대수학의 발전에 힘입어 작도가가능성에 필요한 기준이 본질적으로 사실상 대수적이라는 것이 밝혀짐으로써 세 가지 작도문제가 불가능하다는 것이 명확히 밝혀지게 되었다. 작도가가능성에 대한 다음 두 정리는 위의 세 가지 문제의 해결을 가능케 한다.

<정리 9> 반트젤(Pierre Laurent Wantzel, 1814~1848)의 방법

주어진 단위 길이로부터 자와 컴퍼스만을 사용하여 작도 가능한 길이는 어떤 유리계수다항식을 만족한다.

<정리 10>

주어진 단위길이로부터 자와 컴퍼스만을 사용하여 작도 가능한 길이를 만족하는 최저차 유리계수다항식의 차수는 1또는 2의 거듭제곱이다.

먼저 원적문제는 주어진 원의 반지름을 단위 길이로 잡으면 구하려는 면적이 같은 정사각형의 한 변의 길이는  $\sqrt{\pi}$  이다. 원적문제가 가능하다면 단위선분으로부터

터 길이가  $\sqrt{\pi}$  인 선분을 작도할 수 있어야 한다. 그러나 이것은 1882년 린데만에 의하여  $\pi$ 가, 따라서  $\sqrt{\pi}$ 가 어떤 유리계수다항식도 만족하지 않는 수임이 밝혀졌기 때문에 정리9에 의하여 불가능하다. 두 번째 정리는 다른 두 작도문제의 불가능성을 보여준다. 먼저 배적문제에서 주어진 육면체의 한 변의 길이를 단위 길이로 하고 구하려는 육면체의 한 변의 길이를  $x$ 라 하면  $x^3 - 2 = 0$ 이고  $x^3 - 2$ 는 유리수 범위에서 더 이상 인수분해 되지 않으므로 정리10에 의하여 이것은 작도 불가능하다. 마지막으로 일반각의 3등분 문제를 밝히기 위하여  $60^\circ$ 를 3등분할 수 없음을 보이면 된다. 만일  $60^\circ$ 가 삼등분이 가능하다고 하면 우리는  $20^\circ$ 를 작도할 수 있다. 따라서  $\cos 20^\circ$ 의 길이를 작도할 수 있다.

그리고  $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ 임을 알고 있다. 여기서  $x$ 를  $20^\circ$ 라 하면

$\cos 3x = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  이고  $\cos 20^\circ$ 은  $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$ , 즉  $8x^3 - 6x - 1 = 0$ 의 근이다. 그런데 이 방정식은 유리수 범위에서 더 이상 인수분해되지 않는다. 그러므로 정리 10에 의해서 작도 불가능한 길이이다. 따라서  $60^\circ$ 를 삼등분하는 것은 불가능하다. 이외에도 갈로아 이론<sup>19)</sup>이라는 현대대수학의 이론에 의하여 정다각형의 작도가능성에 관한 다음의 결과가 알려져 있다.

### <정리11>

정  $n$ 각형이 자와 컴퍼스만을 써서 작도 가능할 필요충분조건은  $\varphi(n)$ 이 2의 거듭제곱이다. 여기서  $\varphi(n)$ 은  $n$ 보다 작은  $n$ 과 서로 소인 자연수의 개수를 나타낸다.

19) 가우스(C.F.Gauss, 1777~1855)의 정다각형의 작도 가능성의 판정조건은 방정식  $x$ 에 대한  $n$ 차 방정식  $a_0x^n + a_n = 0$ 의 계수에 사칙연산과 근호에 의한 연산을 실시하는 것인데, 그 결과를 일반화하여 일반적인 방정식

$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 의 가해성(可解性)의 판정조건을 계수에 유리연산(사칙연산)과  $n$ 제곱근을 취하는 연산을 실시함으로써 구하려는 것이다.

### III. 결론 및 제언

그리스가 황금 시대를 이룰 때 이성 존중의 경향은 수학의 눈부신 발전을 가져왔다. 이때 그들의 사상체계, 즉 유한과 논리의 범위에서는 해결할 수 없는 문제가 등장하였다. 이 사실은 그들이 스스로의 부족함을 알아차릴 만큼 이성적이고 성실했음을 시사하는 것이다. 그들이 최고의 진리로 여겨온 수학의 약점을 의식하였기 때문이다. 그 중에서 가장 유명한 것이 이 글에서 논한 3대 작도 불능 문제이다.

본 논문은 3대 작도 문제를 해결하기 위한 수많은 연구 속에서의 많은 결과들과 그리고 그 속에서의 수학자들의 풍부하고 아름답고 인간적인 모습들을 찾아보고자 노력하였다.

Ⅱ-1장에서는 작도의 시초, 눈금이 없는 자를 사용하게 된 이유를 다루었다.



Ⅱ-2장에서는 배적 문제의 히포크라테스의 첫 번째 성과, 아르키타스의 두 번째 성과, 플라톤이 고안한 정육면체 배적 장치 그리고 디오클레이드의 시소이드 곡선을 다루었다.

Ⅱ-3장에서는 각의 삼등분에서는 기울임 문제, 히피아스의 원적 곡선, 아르키메데스의 시도, 삼입방법, 니코메데스의 콘코이드, 원추곡선을 이용한 방법, 토마위크를 이용한 방법, 뒤러의 방법, T 모양의 3등분점 자-도구 고안 그리고 데카르트의 방법을 다루었다.

Ⅱ-4장에서는 안티폰의 방법, 브뤼손의 방법, 히피아스 곡선, 아르키메데스의 연구, 나선을 이용한 방법, 실진법, 초승달꼴의 넓이 구하기, 근사구장법을 다루었다.

II-5장에서는 3대 작도 문제의 해결에 대해 다루었다.

수학은 인간정신의 문화적 산물이며 현대과학의 발달과 인간 삶의 모든 곳에 활용되고 인간성의 도야에 필요한 문화적 자산이다. 따라서 수학은 누구나 배울 수 있는 보편성과 수월성의 교과이며, 꼭 배워야하는 인류의 자산이다. 수학교육을 통해서 각 개인이 건강한 꿈을 키우고 자신감과 자존심을 키워주는 교육이 되어야하고, 학생들의 다양한 소질과 특기 등 개성과 적성에 맞는 교육을 지향해야할 것이다.

교사는 학생들에게 학습자료의 제공자와 안내자로서 수학시간에 깊은 사고력을 불러일으킬 수 있는 분위기와 수학에 대한 호기심과 매력을 느끼도록 만들어야 할 것이다. 약간의 긴장 속에서 즐거움과 희열을 가질 수 있는 과목이 되게 해야 한다.

학생 스스로 배우려는 의욕과 자신감을 가지고 능동적인 탐구와 자신의 학습방법을 가지고 수학적 활동을 통하여 스스로 발견할 수 있도록 도와주어야 한다. 학생 중심의 수학교육은 학생의 입장에서 수학의 내용을 선택하고 수업을 실행하고 평가하여야 한다.

이런 측면에서 본다면 본 논문에서 논한 3대 작도 문제의 해결 시도에 대한 노력을 수업에 적용시켜 본다면 학생들에게 수학의 아름다움 그리고 그 속에 숨겨져 있던 인간적인 모습 등을 이해시키고 아울러 수학적 개념들을 이해하고 재구성해 볼 수 있는 사고활동으로 창의적이고 역동적인 수업 분위기를 만들 수 있을 것이다



## 참 고 문 헌

한인기, “교사를 위한 수학사”, 경문사, 2003

이우영 외 역, “수학사”, 경문사, 1995

김용운 외, “수학의 약점”, 우성, 1996

김용운 외, “도형이야기”, 우성, 1996

김광호, “각의 3등분 작도불가능성에 대한 연구”, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문, 1992

박순철, “작도 불가능에 관하여”, 조선대 자연과학연구 82-1, 1982

남호영 외, “원뿔곡선 지도방안 -구체물과 프로그램을 중심으로-”, 수학사랑, 2002

<Abstract>

# The historical consideration on the Three construction problem

Kang, Kyong-Hun

Mathematics Education Major

Graduate school of Education, Cheju National University

Jeju, Korea

Supervised by Professor Park, Jin-Won

It was the greeks who just used the scale and compass to draw a figure. Because they believe "the gods regarded the circle and line as perfect outline sketch" So in some respects, their perspective was limited by the tool. The tool used to draw sketches and designs; like the atmosphere. They gave much effort to solve "Three Consturction Problems" and form this process, many results were produced. Furthermore, this paradigm had a lasting effect on a host of mathematical theories.

This treatise will exemine mathematician's effort to solve the "Three Consturction Problems" bequeathed by the Greeks. By the greeks, In order to adopt the process for middle school mathematics education. In so doing , educators will discover a more effective method of helping students to understand mathematical theories. Such and outcome should help to inspire or encourage students quest to explore the world of mathematics

---

\* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2004.