科學敎育, 13, 47~66, 1996
Journal of Science education
13, 47~66, 1996

극한에 대한 실험 수학적 접근

양 창 길[1], 김 철 수[2]

Experimental mathematics approaches on limits

Yang, Chang-Kil, Kim, Chul-Soo

Abstract

This paper deals with experimental mathematics applying new approaches for investigation and observation on limits of high school mathematics curriculum. In chapter 2 we presents the concepts of experimental mathematics and mathematics lab required for experimental mathematics Chapter 3 and 4 extend the concept of limits through investigation and observation

1) 제주제일고등학교
2) 제주대학교 자연과학대학 전산통계학과

1. 서 론

컴퓨터의 급속한 보급 및 이용으로 정보화의 물결은 산업 사회를 대체하고 있고, 더욱이 통신 매체와 결합된 컴퓨터의 위력은 나날이 그 힘을 발휘하여 손끝 하나로 수 많은 정보와 지식을 손쉽게 얻을 수 있는 시대를 열어 놓았으며, 인터넷의 활성화로 인해 시간적 · 공간적으로 제한을 거의 받지 않고 국내뿐 아니라 국제간에도 서로 정보를 검색하고 교환할 수 있게 되었다.

거기에 한층 가속되고 있는 멀티미디어 시스템의 보급은 다양한 형태로 정보와 지식을 제공하며 더욱 친근감 있게 컴퓨터를 활용할 수 있는 길을 열어 놓았다. PC에 오디오, 비디오, 통신 등이 결합된 멀티미디어 기술의 발달은 누구나 다양한 기능을 보다 쉽게 쓸 수 있도록 하였고, 새로운 프리젠테이션(presentation) 도구들은 교육의 질과 환경을 엄청나게 바꿔 놓고 있다.

이렇게 급속도록 발달해 온 멀티미디어 시스템과 통신망의 발달은 세계를 더욱 가깝게 만들고 있다. 컴퓨터 네트웍의 발달로 이제는 국내뿐 아니라 전 세계에 걸쳐 수백만대의 컴퓨터들이 연결됨으로써 방대한 정보를 자신의 컴퓨터에서 취급할 수 있는 시대가 된 것이다. 이러한 정보화 사회에서 종이와 연필에만 의존하는 재래식 수학교육 방법을 탈피하고 첨단 기술을 수학 교육에 도입하여 창의적이고 생동하며 과학기술 현장에서 이용할 수 있는 것이 되도록 교과내용과 교육방법을 개혁해야 한다는 시대적 요청이 전문가들 사이에 꾸준히 제기되고 있다. 미국의 경우를 보면 하버드 미적분 개혁, CALC 프로젝트, WAVE 프로젝트 등을 통해 미분적분학을 중심으로 한 수학교육의 변화를 촉구하고 있으며 수학교육에 실험수학적인 방법을 도입하여 교육의 질을 높일 것을 촉구하고 있다. 또한 수학교육이 교실에서만 이뤄지는 것이 아니라 on-line을 통해 집에서도 이뤄질 수 있는 환경으로 바뀌어 가고 있고 또한 학생들도 통신망을 통해서 방과후에도 숙제하다 궁금한 사항등을 교사에게 물어볼 수 있는 전자메일 기능의 활성화로 인해 수학교육의 내용에 변화가 필요한 시점이다.

본 논문은 이러한 관점에서 입시 위주의 수학교육이 아니라 탐구와 관찰이라는 활동을 수학교육에 도입하는 실험수학 활동을 통해 수학교육의 내용과 방법에 변화를 모색하고자 하는데 있다. 이러한 관점에서 2장에서는 실험수학의 활용과 기대효과를 다루고 3장에서는 무리수 e의 탐색과 관찰을 다각도로 살펴보고 4장에서는 극한에

대한 탐색적 관찰을 통해서 극한의 의미와 개념을 이해 시키는 방법을 제시하였다.

2. 실험수학의 활용 및 기대 효과

2.1 실험수학의 활용

다가오는 미래 사회의 특징은 국제 협력의 가속화, 정보·지식의 고도화, 인간존중, 문화의 성숙, 국가 상호 의존 관계의 심화, 지구촌 공동체 의식의 고양 등 국제화, 세계화, 정보화 사회로 전이되고 있다.

이 시점에서 수학교육의 커다란 장애 가운데 하나는 학생들이 수식으로부터 개념을 쉽게 구체화 하지 못한다는 점이다. 즉 학생 자신의 언어로 그 내용을 이해하기가 어렵다. 그러므로 교사들은 여러 가지 예나 도형을 이용하여 개념을 설명하고 있으나 한정된 시간으로 인하여 제약을 받고 있다. 특히, 중고등학교 과정에서의 교육내용은 엄밀한 수학적 증명을 동반하기가 어려워 직관에 호소하고 있으나, 그 직관적 방법이 때로는 학생을 혼란스럽게 할 때가 있다. 따라서, 본 연구에서는 극한과 도함수를 중심으로 컴퓨터의 그래픽기능과 계산 능력을 이용하여 다양한 함수의 그래프를 그려보고 학생 스스로 관찰, 추론할 수 있도록 하는 것이 효과적이라 생각한다.

실험수학(experimental mathematics)은 정보화 사회의 진전과 더불어 교육현장에 정보공학적 도구들이 대거 출현하면서 수학교육에도 이러한 정보공학 도구를 활용하여 보이는 수학(visible mathematics)을 실현함을 목적으로 하는 것이다. 수학에 대한 직관과 통찰력을 통해 수학의 구조를 이해하고 수학 현상을 실험을 통한 수학의 관찰이라는 시각적인 면을 통해 수학적 사고와 계산상의 한계를 넓혀 수학이 어려운 학문만은 아니라는 것을 인식시키는 것이다.

실험수학에서는 수학의 제분야를 다룰 수가 있으며 정수론의 미해결문제, 기타 다른 미해결 문제에 대한 연구도 가능케 하고 있어 컴퓨터가 단순히 수학의 보조도구라기 보다는 CBT(Computer based teaching)의 역할로 그 영역을 넓혀 나가고 있다.

지금까지의 고등학교 교육과정에서의 수학교육은 소위 종이와 연필만 있으면 가능한 것으로 생각되었고 교육방법에서도 탐구, 관찰이라는 면 보다는 교사의 일방적인

설명 및 문제풀이 위주의 방법으로 수학교육 활동을 진행함으로써 일찍 수학을 포기하게 되는 요인도 되고 있음을 보게 된다.

미국의 경우를 보면 인터넷을 이용해 on-line 수학활동을 지원하고 있을 뿐 만 아니라 학교시간 후에도 언제든지 통신망을 이용해 수학에 대한 정보를 주고 받고 있고 여러 학교에 수학교실(mathematics lab)을 만들어 실험수학에 대한 구체적인 활동과 연구를 하고 있다.

최근들어 심볼릭 연산 및 그래픽 기능이 우수한 수리 패키지인 Mathematica, Matlab, Maple, Macsyma, Derive 등이 등장함으로 인해 실험과 탐구를 통한 수학의 관찰이라는 새로운 영역 소위 실험수학의 분야를 가능케 하고 있을 뿐만 아니라 학교 교육의 정보화와 더불어 각 급 학교에 성능좋은 PC들이 설치되고 있어 컴퓨터를 비롯한 정보공학적 도구와 소프트웨어를 통해 새로운 수학학습 자료를 개발하고 수학교육의 개선을 이뤄 수학활동이 좀 더 흥미롭고 재미있는 모습으로 바뀔 수 있도록 하는데 본 논문의 목적이 있다. 따라서 본 논문에서는 수리패키지 가운데서도 가장 많이 사용되고 있는 Mathematica를 고등학교의 수학교실에서 활용하여 실험수학이라는 새로운 수학 활동에 대한 시사점을 얻고자 한다.

Mathematica를 이용한 실험수학적 방법을 수학 교육에 도입하였을 때의 기대효과를 살펴보면 다음과 같다.

1) 오류수정 활동을 통하여 수학적 태도를 개선 시킬 수 있다 : 프로그래밍이 수학 교육에 도입 되면 학생들이 오류에 대한 부담이 없어지므로 수학에 대한 태도를 개선 시킬 수 있다.

2) 새로운 교과 내용으로서의 프로그래밍 기능을 생각할 수 있다 : 마치 주어진 문제를 지필로 풀게 하듯이 컴퓨터 프로그래밍을 이용하여 문제를 풀 수 있게 하는 것은 장차 도래하게 될 새로운 컴퓨터 사회에 대비 시키는 첩경이다.

3) 프로그래밍 활동을 통해 사고력을 신장시킬 수 있다 : 프로그래밍 과정 그 자체가 문제 해결과정이다. 프로그래밍을 하기 위해서는 목표를 인식하고 설계를 하며 프로그래밍을 작성하고 실행을 해야 한다. 그리고 프로그래밍의 결과를 오류 수정해야 한다. 이러한 단계는 Polya가 말하는 문제해결의 단계 즉 문제의 이해, 계획, 실행, 반성의 단계와 유사하다.

4) 극한과 도함수의 기본 개념을 철저히 이해 시킨다 : 기교의 암기가 아닌 그림표로, 수치적으로, 해석적 계산법으로 극한과 도함수의 기본개념을 철저히 이해시킨다.

2.2 실험수학을 위한 수학교실 운영

실험수학을 고등학교 수학교육에 활용하기 위해서는 수학교실(mathematics lab.)이 필요하다. 수학교실의 구성은 486급이상의 개인용 PC와 Windows 환경의 소프트웨어, 실험수학용 소프트웨어(Mathematica, Matlab, Derive, …), LCD 판넬 또는 LCD Beam projector와 차광막 시설들이 필요하다. 또한 PC들간의 Network이 구축된다면 실험수학을 교육하기에 좋은 여건이 된다.

개인용 PC (IBM계열 또는 매킨토시 컴퓨터)는 최소한 2인 1대정도로 갖춰져야 효율적으로 교육이 이뤄질 수 있을 것이다.

실험수학을 본격적으로 도입하려면 우선 수학교사들 스스로가 이러한 수학교실을 활용해 실험수학을 지도할 수 있도록 컴퓨터의 활용과 소프트웨어의 활용법에 익숙해져야 하며 관심있는 교사들간의 정기적인 모임과 세미나 등을 통해 필요한 지식을 습득해 나가야 한다.

전용 수학교실의 설치가 제반여건상 어려울 경우는 기존의 전산실을 수학교실로 운영할 수 있도록 학교 내에서의 조정을 통해 실험수학을 지도할 수 있을 것이다.

한편 수학교실에 인터넷이 연결되어 있다면 인터넷을 통해 다양한 수학관련 자료와 외국의 고등학교에서의 수학교실 활동의 자료를 신속히 얻을 수가 있어 수학활동을 통해 세계화에 일조할 수 있을 것이다.

3. 무리수 e의 탐색과 관찰

현행 고등학교 수학II의 교과서에서는 무리수 e를 로그함수의 미분법 단원에서 수열 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한으로서 e를 직관적으로 정의하고 나서

임의의 실수 n에 대해

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

또는 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

로서 무리수 e를 도입하고 있다.

이러한 직관적인 정의로부터 무리수 e의 이해를 돕기 위해 몇가지의 탐구적이고 실험적인 방법을 도입함으로써 무리수 e의 존재와 역할에 대한 시각적인 이해를 높일 수가 있다.

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값

Mathematica를 이용해 n의 값을 따른 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값들을 조사한 결과가 다음 표 3-1에 나와있다.

무리수 e의 값을 소수점 아래 33자리까지 구해보면

$$e\approx 2.718281828459045235360287471352662$$

정도 된다. 이러한 계산은 컴퓨터를 이용할 수 밖에 없다.

〈 표 3 - 1 〉

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	2.59374	0.124539
50	2.69159	0.026693
100	2.70481	0.013467
150	2.70928	0.009005
200	2.71152	0.006763
250	2.71287	0.005415
300	2.71377	0.004515
350	2.71441	0.003872
400	2.71489	0.003389
450	2.71527	0.003013
500	2.71557	0.002712
1000	2.71692	0.001360
10000	2.71814	0.000140
100000	2.71826	0.000020
1000000	2.71828	0.000000

* 여기서 e는 2.71828로 계산

또한

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$이므로

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$과 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$의 n에 따른 극한값들을 조사한 결과가 다음 〈표 3-2〉에 나와 있다.

〈 표 3 - 2 〉

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$
10	2.59374	2.86797
50	2.69159	2.74597
100	2.70481	2.732
150	2.70928	2.7274
200	2.71152	2.72511
250	2.71287	2.72374
300	2.71377	2.72283
350	2.71441	2.72218
400	2.71489	2.72169
450	2.71527	2.72131
500	2.71557	2.72101

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$과 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$의 e로의 수렴속도는 거의 같음을 알 수 있고, n이 1,000,000보다 클 경우 비로서 e의 값에 대해 소숫점 이하 5자리까지 가까워 짐을 알 수 있다. 이것은 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 매우 느린 속도로 e로 수렴함을 보여주고 있다.

2) $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$로부터 $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 의 관계식을 얻을 수 있다. 여기서는 평균치 정리를 이용하여

$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 의 관계식을 먼저 증명하고

n의 값에 따라 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 과 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 비교해 보고자 한다.

정리 $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

증명 $f(x)=e^x$라 하고 $0\le x\le 1$이라 놓으면
평균치 정리에 의해

$$\frac{e^x-1}{x-0}=e^c,\quad c\in(0,x)$$

가 되고 이것으로부터

$$e\ge e^x>\frac{e^x-1}{x}>1$$

또는

$$1+ex>e^x>1+x$$

임을 알 수 있다.
따라서,

$$\int_0^x(1+ey)dy>\int_0^x e^y dy>\int_0^x(1+y)dy$$

이 성립하며 이 적분값을 계산하면

$$1+x+\frac{ex^2}{2}>e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$$

이 된다. 또 한 번 적분하면

$$\int_0^x\left(1+y+\frac{ey^2}{2}\right)dy>\int_0^x e^y dy>\int_0^x\left(1+y+\frac{y^2}{2}\right)dy$$

즉,

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{ex^3}{3!}>e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

이 성립하고, 이러한 과정을 계속 반복하면

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{ex^{n+1}}{(n+1)!}>e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

이 성립하고, 여기에 $x=1$이라 놓으면

$$e-\frac{1}{(n+1)!}>1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}>e-\frac{e}{(n+1)!}$$

가 되어 $n \to \infty$일 때 원하는 결과를 얻는다.

다음의 표는 n의 값에 따라 e의 값이 어떻게 변하는지를 보여주고 있다.

〈 표 3 - 3 〉

n	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.0	2.0
2	2.5	2.25
3	2.66667	2.37037
4	2.70833	2.44141
5	2.71667	2.48832
6	2.71806	2.52163
7	2.71825	2.5465
8	2.71828	2.56578
9	2.71828	2.58117
10	2.71828	2.59374

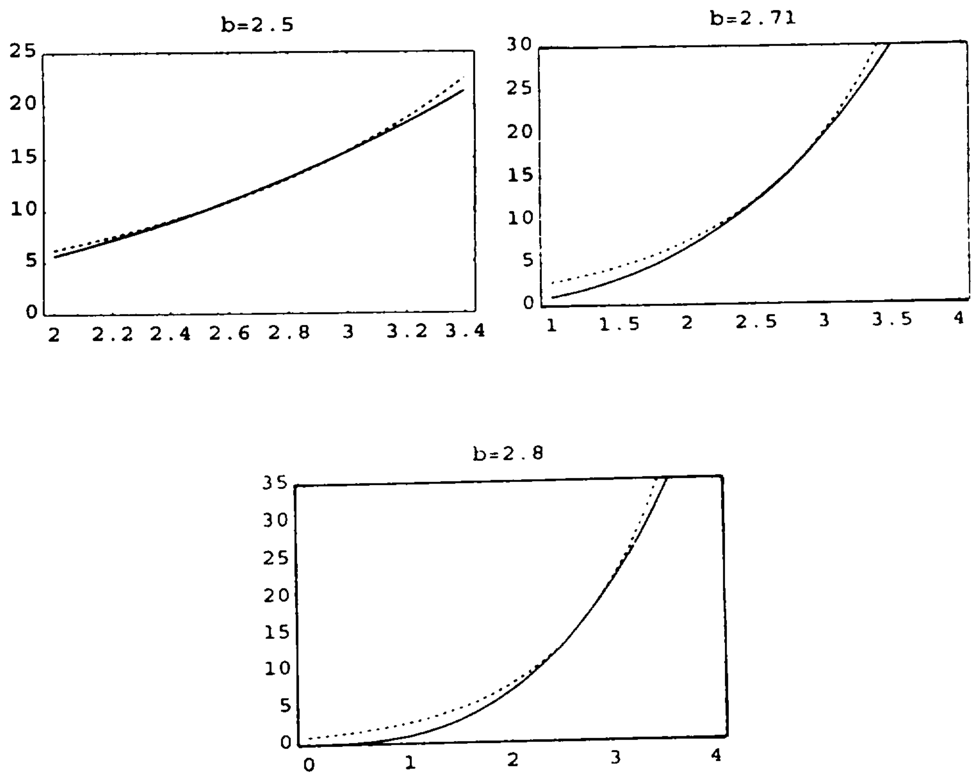
위의 표로부터 e를 계산하는데 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$가 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 보다 훨씬 수렴속도가 빠름을 알 수 있다. 이런 이유로 해서 과학계산용 계산기 또는 컴퓨터 프로그램에서 e의 값은 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$을 통해 계산되고 있음을 알 수 있고, 이러한 사실을 학생들에게 지도함으로써 수학이 구체적으로 어떻게 이용되고 있는지를 인식하도록 하는데 도움을 주게 될 것이다.

3) 함수를 이용한 무리수 e의 탐구

멱함수 $f(x)=x^b$와 지수함수 $g(x)=b^x$로부터 무리수 e를 찾아볼 수 있다.

<u>정리</u> $b>0$이고 $x^b \le b^x$일 때 임의의 양의 실수 x에 대해 $b=e$이다.

x^y와 y^x의 관계식으로부터 $f(x)=x^b$와 $g(x)=b^x$를 $0 \le x \le 4$인 구간에서 b의 값을 변화시키면서 그려보면 $b>0$인 b값에 대해 두 곡선은 두 점에서 만남을 알 수 있다.

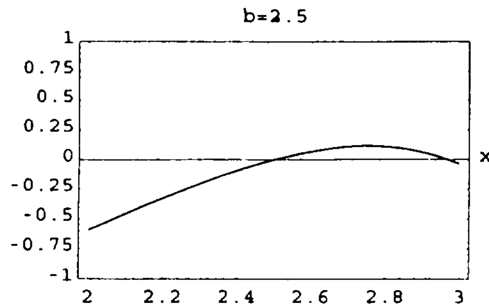


〈 그림 3-1 〉 $f(x)=x^b$;— 와 $g(x)=b^x$;······ 의 비교

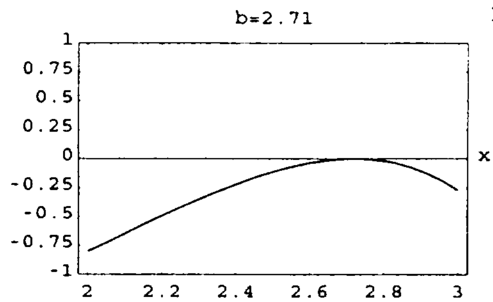
b의 값이 2.7에 가까울수록 두 곡선의 교차점이 근접하면서 접하고 있음을 볼 수 있다. 한편 (b, b^b)에서도 두 곡선은 교차한다.

$h(x)=x^b-b^x$라 하고 $2.5 \le b \le 2.8$인 b에 대해 $h(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

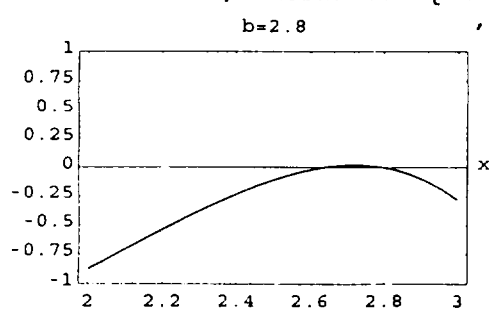
```
h[x_]:=g1[x]-g2[x];
Plot[h[x]/.b->2.5,{x,2,3},PlotRange->{-1,1},
   PlotLabel->"b=2.5", AxesLabel->{"x"," "},
                                        Frame->True]
```




```
h[x_]:=g1[x]-g2[x];
Plot[h[x]/.b->2.71,{x,2,3},PlotRange->{-1,1}
   PlotLabel->"b=2.71", AxesLabel->{"x"," "}
                                        Frame->True]
```




```
h[x_]:=g1[x]-g2[x];
Plot[h[x]/.b->2.8,{x,2,3},PlotRange->{-1,1},
   PlotLabel->"b=2.8", AxesLabel->{"x"," "},
                                        ,Frame->True]
```

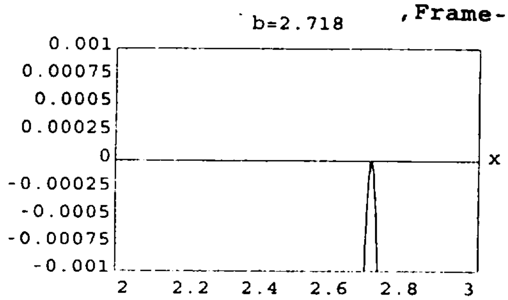


〈 그림 3-2 〉 $h(x)$의 그래프

위 그래프를 보면 b가 2.71에 가까울 때 $h(x)=0$은 1개의 근을 갖고 b가 2.7에서 멀어질수록 $h(x)=0$은 두 개의 서로 다른 실근을 가짐을 알 수 있다.

그러므로 $h(x)=x^b-b^x$는 $x=e$ 즉 $b=e$일 때 1개의 근을 가짐을 알 수 있다.

```
h[x_]:=g1[x]-g2[x];
Plot[h[x]/.b->2.718,{x,2,3},PlotRange->{-0.001,0.001},
   PlotLabel->"b=2.718", AxesLabel->{"x"," "},Frame->True]
```



〈 그림 3-3 〉 $h(x)$의 그래프

한편 위의 그림 3-3을 보면 $x\neq b_1$인 x에 대해 $x^{b_1}<b_1^x$ 되는 b_1이 존재함을 알 수 있고 이러한 b_1은 유일한 값이다. 이는 다음으로부터 알 수 있다.

$x\neq b_2$인 x에 대해 $x^{b_2}<b_2^x$ 되는 양의 실수 b_2가 존재한다고 하면 x를 b_1으로 치환했을 경우 $b_1^{b_2}<b_2^{b_1}$이 되고 이는 b_1의 성질에 위배가 되므로 모순이기 때문이다.

이러한 유일한 수 b_1 을 e로 이름하면 된다.

4. 극한에 대한 탐색적 관찰

현행 고등학교 수학 교육과정에서 함수 또는 수열의 극한은 간단한 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 함수의 극한 개념을 이해하도록 되어 있다. 즉 $\lim_{x \to a} f(x) = b$ 라는 정의는 직관적으로 'x가 한없이 a에 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 b에 한없이 가까워지면 $f(x)$는 b에 수렴한다.'라고 정의하고 있다.

한편 x가 한없이 커질때 $f(x)$가 b로 한없이 가까워지면 $f(x)$는 b로 수렴한다라 하고 $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$로 정의하고 있다.

이와같은 극한에 대한 개념은 함수 $f(x)$의 그래프를 쉽게 그릴 수 있을 때는 시각적인 모양을 통해 쉽게 이해할 수 있지만 함수 f의 형태가 복잡한 유리함수 무리함수 또는 초월함수의 경우 그래프를 쉽게 그릴 수가 없다. 따라서 이러한 경우 컴퓨터와 심볼릭 연산 소프트웨어인 Mathematica를 이용해 복잡한 함수의 그래프를 그려 극한 개념을 소개한다면 쉽게 이해할 수가 있고, 이러한 방법의 도입은 수학을 좀더 쉽고 흥미있는 과목으로 여기도록 도움을 줄 것이다.

〈 유리함수의 극한의 예 〉

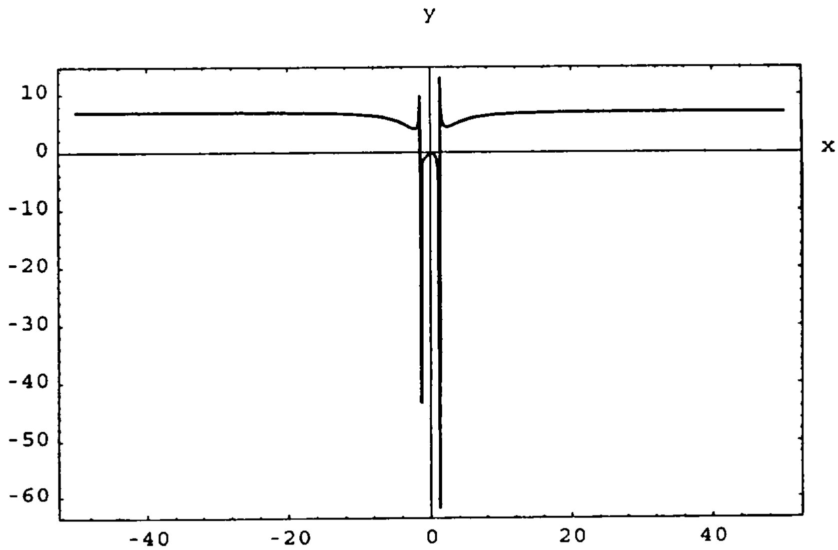
$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^4+5x^2+4x+1}{x^4+8x^2-17}$ 의 예를 살펴보자.

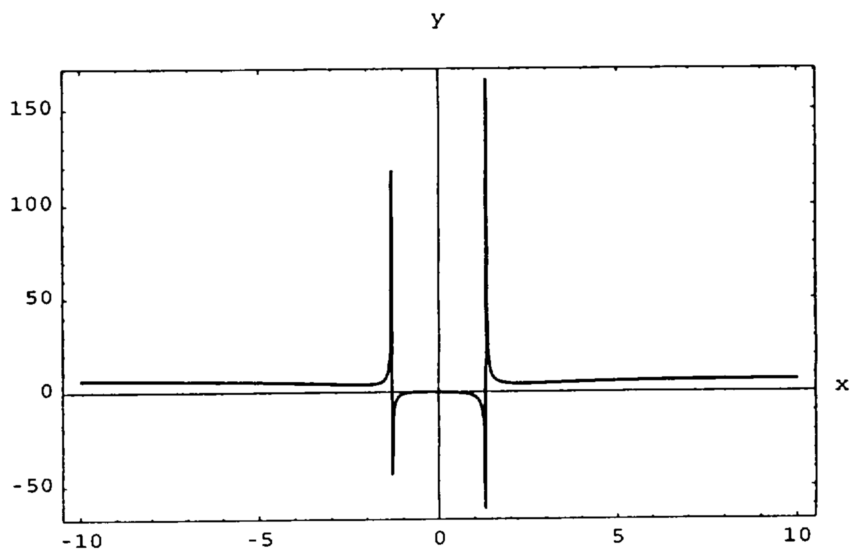
$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^4+5x^2+4x+1}{x^4+8x^2-17} = \lim_{x \to \infty} \frac{7+\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{8}{x^2}-\frac{17}{x^4}} = 7$$

임을 고등학교 교과과정에서 지도하고 있다.

$f(x) = \frac{7x^4+5x^2+4x+1}{x^4+8x^2-17}$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

```
f[x_]:=(7 x^4+5 x^2 +4 x+1)/(x^4 +8 x^2 -17);
Plot[f[x],{x,-50,50},AxesLabel->{"x","y"},
 Frame->True,PlotRange->All]
```





〈 그림 4-1 〉 $f(x)$의 그래프

위의 〈그림 4-1〉의 아랫쪽 그림은 x의 범위를 -10에서 10으로 갔을 때의 모양이다.

한편 $x \to \infty$일 때 $7x^4+5x^2+4x+1$ 과 x^4+8x^2-17 의 값을 비교해 보자.

〈 표 4-1 〉

x	$7x^4+5x^2+4x+1$	x^4+8x^2-17	$(7x^4+5x^2+4x+1)/(x^4+8x^2-17)$
50	4.37627×10^7	6.26998×10^6	6.97972
100	7.0005×10^8	1.0008×10^8	6.99491
150	3.54386×10	5.0643×10^8	6.99774
200	1.12002×10^9	1.60032×10^9	6.99873
250	2.73441×10^{10}	3.90675×10^9	6.99918
300	5.67005×10^{10}	8.10072×10^9	6.99943
500	4.37501×10^{11}	6.2502×10^{10}	6.9998
1000	7.00001×10^{12}	1.00001×10^{12}	6.99995

x의 값이 점점 커갈수록 두 함수의 비값은 7에 가까워짐을 알 수가 있다.

〈 삼각함수 극한의 예 〉

삼각함수의 도함수를 구할 때 필요한 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$을 탐구적인 관점에서 살펴보자.

전통적인 증명법은 반지름 1인 원에서 중심각 x radian인 원에 내접하는 삼각형과 부채꼴, 원에 외접하는 삼각형 사이의 면적의 대소관계을 이용하여 증명해 왔다. 이러한 증명과정에서도 x가 충분히 0에 가까울 때라는 해석적인 의미로 설명이 되므로 탐구적인 방법으로 과연 그러한지를 조사해 본다면 극한에 대한 이해가 빨라질것이고 직관적인 의미를 쉽게 이해하게 될 것이다.

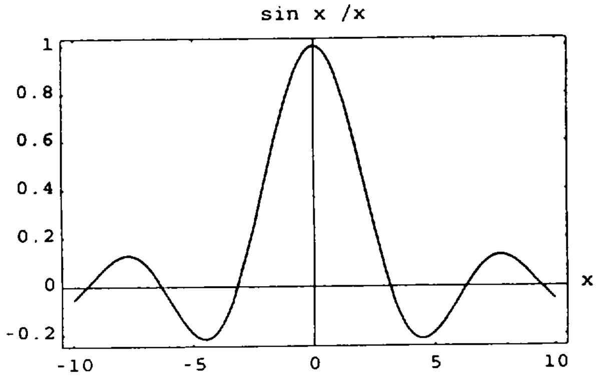
다음의 〈표4-2〉는 x와 $\sin x$의 값을 계산해서 나타낸 것이다.

〈 표 4 - 2 〉

x	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
0.05	0.0499792	0.999583
0.045	0.0449848	0.999663
0.04	0.0399893	0.999733
0.035	0.0349929	0.999796
0.03	0.0299955	0.999850
0.025	0.0249974	0.999896
0.02	0.0199987	0.999933
0.015	0.0149994	0.999963
0.01	0.00999983	0.999983
0.005	0.00499998	0.999996

〈그림 4-2〉은 $\dfrac{\sin x}{x}$의 곡선의 모양이다.

```
Plot[ Sin[x]/x,{x,-10, 10},AxesLabel->{"x"," "},
      PlotLabel->"sin[x]/x",Frame->True]
```



〈 그림 4-2 〉

〈 표 4-2 〉와 〈 그림 4-2 〉을 통해서 x가 0에 가까울 때 $\sin x \approx x$라는 관계식을 알 수 있고 이 사실로부터 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$이라는 의미는 (즉 부정형으로서 $\dfrac{0}{0}$의 의미) $x \to 0$일 때 x와 $\sin x$의 수렴속도가 같고 $\sin x$는 x로 근사해서 쓸 수 있다는 사실을 알게 된다. (참고: 고등학교 교과과정에서는 Taylor series를 다루지 않고 있음))

보다 구체적으로 $\dfrac{\sin x}{x}$의 값을 표시해 보면 다음과 같다.

〈 표 4 - 3 〉

$$
\begin{array}{rcl}
(\sin 0.1)/0.1 & = & 0.998334166468281523068141984\ldots \\
(\sin 0.01)/0.01 & = & 0.999983333416666468254243826\ldots \\
(\sin 0.001)/0.001 & = & 0.999999833333334166666468253\ldots \\
(\sin 0.0001)/0.0001 & = & 0.999999998333333334166666666\ldots \\
(\sin 0.00001)/0.00001 & = & 0.999999999983333333333416666\ldots \\
(\sin 0.000001)/0.000001 & = & 0.999999999999833333333333341\ldots \\
(\sin 0.0000001)/0.0000001 & = & 0.999999999999998333333333333\ldots \\
(\sin 0.00000001)/0.00000001 & = & 0.999999999999999983333333333\ldots \\
(\sin 0.000000001)/0.000000001 & = & 0.999999999999999999833333333\ldots \\
(\sin 0.0000000001)/0.0000000001 & = & 0.999999999999999999998333333\ldots \\
(\sin 0.00000000001)/0.00000000001 & = & 0.999999999999999999999983333\ldots \\
(\sin 0.000000000001)/0.000000000001 & = & 0.999999999999999999999999833\ldots
\end{array}
$$

$$\vdots$$

5. 결 론

학교에서의 수학교육은 학생들로 하여금 수학적 사실만을 이해하도록 지도하는 것 이 아니라 수학적인 상황을 이해하고 이를 통해 수학적인 모델링 작업을 거쳐 실제 현상에 접근하도록 이루어져야한다.

우리나라 고등학교 수학교육과정 가운데 극한과 도함수의 경우도 지금껏 해석적인 방법을 통한 직관적인 사고로 개념을 이해시키려 하고 있다. 이러한 해석적인 방법은 개념을 구체적으로 형상화 하기가 쉽지 않아 수학적 개념을 쉽게 받아들이도록 하는 데에는 어려움이 따른다. 그러나 해석적인 개념에다가 3장, 4장에서처럼 보이는 수학을 위주로 하는 실험수학적인 접근을 통해 개념을 설명한다면 학생들 스스로가 극한 또는 도함수에 대한 이해를 쉽게 할 수가 있다.

우리나라의 제 6차 수학교육과정에서도 "수학과는 수학의 기초적인 개념,원리,법칙을 이해하게 하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 사고하는 능력을 기르게 하여, 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 하는 교과이다". 라고 하고 있다.

이러한 수학교육의 목표를 달성하기 위해 무엇을, 어떻게 가르칠 것인가에 관심을 가져야 한다. 현행의 대학입시 위주의 수학교육은 이러한 수학교육의 목표에 훨씬 빗나간 방향으로 전개되고 있어 단순한 기술적인 문제의 풀이나 증명에 치우치고 있다.

실험수학 가운데서 수리 패키지를 활용하면 2차원, 3차원 그래픽에서 탁월한 성능을 발휘하며 평면 공간에 대한 개념을 넓혀주고 미분적분에서도 위력을 나타낸다. 실험수학을 통해서 컴퓨터는 우리의 수학활동 즉, 창의적 사고력 및 논리적 사고의 신장에 방해가 되는 것이 아니라 오히려 수학교육의 질을 향상시킬 수 있는 실험수학의 한 도구임을 알 수 있다. 그렇다면 수학을 가르치는 사람들이나 수학분야에 종사하는 사람들은 새로운 정보화 시대에 어떤 자세를 가져야 할 것인가? 먼저 우리는 막연히 지금까지 해왔던 교육방법에서 벗어나 새로운 방법으로의 전환과, 보조도구이용, 컴퓨터에 대한 불신 해소, 좋은 프로그램의 개발 등에 관심을 갖고 지도해야할 것이다. 특히 우리나라에서도 초·중·고에서의 조기 컴퓨터 교육으로 신장된 학생들의 컴퓨터 능력을 수학교육에도 연결시켜 수학의 역할을 새롭게 인식시킬 필요가 있다.

하루가 다르게 정보화사회로 접어들면서 새로운 정보공학적인 도구들이 교육현장에 나타남으로써 수학교육에서도 실험과 탐구,관찰이라는 활동을 통해 수학활동을 즐

거운 교과활동으로 변화시켜야 할 뿐만 아니라 종이와 연필에만 의존하는 재래식 수학교육방법을 탈피하고 첨단기술을 수학교육에 도입하여 창의적의고 실용적인 지식을 전달하고 변화하는 사회속에서 과학기술의 기초로서 수학이 중요한 역할을 계속 담당하도록 하기위한 개혁이 요구될 뿐만아니라 학교내에서도 실험수학 등의 새로운 수학교육방법을 조속히 도입하여, 수학의 중요성을 재차 강조하고 또 학생들에게도 수학의 어려운 교과목이 아니라 자연현상을 설명할 수 있는 재미있고 즐거운 교과목임을 강조할 필요가 있다.

참 고 문 헌

[1]. J.Rosendahl and J.Gilmore, Comparing A^B and B^A for $A > B$, College Mathematics Journal 18, No 50, 1987.

[2]. Stephen Wolfram, Mathematica, Addison Wesley, 1994.

[3]. Hae-Soo oh, Use of computer as a tool of Mathematics Education, Mathematics Education, Korean Mathematical society, Vol 10, 1992.