碩士學位論文

問題解決力 伸張을 위한
원뿔曲線 硏究

－ 高等學校科程上의 二次曲線을 中心으로 －

指導敎授　玄　進　五

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

吳　　　哲

2004 年 8 月

問題解決力 伸張을 위한 원뿔曲線 研究

- 高等學校 科程上의 二次曲線을 中心으로 -

指導敎授 玄 進 五

이 論文을 敎育學碩士學位 請求論文으로 提出함

2004年 5月 日

提出者 吳 哲

吳 哲의 敎育學 碩士學位論文을 認准함

2004年 7月 日

審査委員長 印

審 査 委 員 印

審 査 委 員 印

< 抄 錄 >

問題解決力 伸張을 위한 원뿔曲線 研究

－ 高等學校 科程上의 二次曲線을 中心으로 －

吳　　哲

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授　玄 進 五

학교수학에서 기하 교육의 목적을 학생들의 기하학적 직관과 논리적 추론 능력을 향상시키고 평면과 공간에 대한 경험을 수학적으로 다루는 활동이어야 함에도 불구하고, 현재의 교실 수업은 학생들의 탐구 활동보다는 유클리드 기하의 논리적 증명이나 형식적 내용들만을 지나치게 강조하고 있고 학생들은 기하학을 뛰어난 사람만이 할 수 있는 학문이며 현실과 전혀 별개인 증명 위주의 학문이라는 잘못된 인식으로 인해 학생들이 기하를 어려워하게 되는 주된 요인으로 작용하고 있다.

또한, 고등학교 수학에서 이차곡선은 기하학적인 측면에서 정의에 의한 다음 좌표축을 도입하여 방정식을 유도하고 해석적으로 다루고 있어 그 중요성에도 불구하고 학생들이 가장 어렵고 흥미 없고 부담스러운 부분으로 작용해 학생들은 정형화된 문제들만을 다루게 되고 도형에 대한 지식이 한정될 수밖에 없다.

이차곡선을 지도함에 있어 이러한 문제를 해결하고 학생들의 학습의욕을 높이고 사고의 폭을 높여주기 위해서 이차곡선의 역사적 배경과 어떻게 자연과학분야에 응용되고 있는가를 예를 들어 설명하고 이와 관련지어 고찰하고 연구한다는 것은 학생들이 기하 문제에 흥미와 관심을 가지고 적극적으로 학습 활동에 참여할 수 있도록 유도하는데 매우 중요한 일이라 하겠다. 또한 자연현상과 관련된 탐구문제를 개발함으로서 이차곡선이 단순히 교육과정에 있어서 배우는 것이 아니라 왜 교과과정에서 다루게 되었으며 어떤 방향으로 배워야 하는가를 인식시키고, 학생들의 문제해결력 신장시키는데 도움을 줄 것이다.

---

*본 논문은 2004년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

目 次

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

오늘날 수학교육에 있어서 대두되고 있는 여러 가지 문제점 중에서 중요한 것은 수학과목을 재미없고 난해한 교과로만 생각하는 바람직하지 못한 인식이라고 할 수 있다. 또한 거의 모든 문제가 한 가지 답만 그것도 정확히 요구하거나, 증명 과정이나 풀이 과정이 논리적으로 완벽하기만 요구하여 개념적, 절차적 지식의 결손이 누적되거나 수학 문제를 논리적으로 푸는 힘이 부족한 많은 학생들은 수학에 흥미를 점점 잃어가고 있는 실정이다.[1)]

이러한 이유로 중등수학교육의 동향은 기본 기능(skill)의 범위를 계산 기능의 좁은 범위에서 벗어나, 고차원의 사고 전반으로 확대해 가기 위해 "문제 해결(problem solving)"을 중시하고 있다. 이러한 움직임은 지금까지 수학교육에 대한 자기 반성의 결과이고, 그 안에는 교육 내용에 관한 것뿐만 아니고 획기적인 방향전환도 요청되고 있다. 그 중요한 내용은 수학의 지도가 지식의 전달이라는 권위주의적 모델에서 학습의 흥미 유발을 강조하는 학생 중심으로 옮겨가야 한다[2)]는 것이다.

학교 수학에서 기하교육의 목적을 학생들의 기하학적 직관과 논리적 추론능력을 향상시키고 평면과 공간에 대한 경험을 수학적으로 다루어야 하는 활동임에도 불구하고, 현재의 교실수업은 학생들의 탐구활동보다는 유클리드 기하의 논리적 증명이나 형식적 내용들만을 지나치게 강조하고 있어 학생들이 어려워 하게 되는 주된 요인이 되고 있다. 학생들은 기하학을 뛰어난 사람만이 할 수 있는 학

1) 전평국・이석희, 2001, 문제 설정 방법이 문제 해결력과 창의력에 미치는 효과 분석, 수학교육연구총서, p.355
2) 구광조 외, 1992, 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 경문사, p.9

문이며 현실과 전혀 별개인 증명위주의 학문이라는 잘못된 인식으로 인해 그리고 실생활에서 일어나는 복잡한 문제들은 지필 방식으로 간단하게 풀리지 않는 것들이 많아 학교 수업에서 실생활에 관련된 문제들은 배제되기 쉽다. 따라서 학생들은 정형화된 문제들만을 다루게 되고 도형에 대한 지식이 한정될 수밖에 없다.

특히, 이차곡선은 고등학교에서 공간좌표와 공간도형을 다루기 위한 중요한 과정이며 고등학생들이 이해하는데 그리 쉬운 내용은 아니다. 그럼에도 불구하고 고등학교수학 교과과정에 포함되어 있는 이차곡선의 지도는 그 개념의 이해나 원리의 해석보다는 단순히 그래프를 작도하여 직선과 곡선과의 관계를 이차방정식 근과 연관하여 해결하고 있으며, 그래프를 이해하여야 함에도 불구하고 교사는 칠판에 되는대로 그려놓고 설명하는데 그치고 있는 것이다.

따라서 본 연구는 기하영역의 여러 단원 중에서 고등학교 학생들이 가장 어려워하는 이차곡선을 다시 한번 고찰하여 이차곡선이 원뿔에서 태어났다는 사실을 시각화 시켜주고, 이차곡선의 여러 가지 성질들을 연구함으로서 자연 현상과 실생활의 예를 들어 적용시키고 이차곡선이 실생활에 어떻게 응용되고 있는지 보여줌으로서 학생들이 기하학적인 표현을 쉽고 명확하게 구현할 수 있게 하며 기하문제해결을 원만히 할 수 있도록 하는데 본 연구의 필요성이 있다고 할 수 있다.

2. 연구의 방법

1) 원뿔곡선의 이론적 배경을 고찰하고 고등학교 제7차교육과정의 교과서 수학Ⅱ의 내용을 분석한다.

2) 원뿔곡선 만들기를 시각화하고 이차곡선의 다양하고 일반적인 성질들을 연구, 응용한다.

3) 학생들의 흥미를 유발하고 적극적으로 사고할 수 있도록 자연현상과 실생활에 적용시킨 예를 제시하고 문제해결력을 신장시킬 수 있도록 한다.

Ⅱ. 원뿔곡선의 개요

1. 이론적 배경[3)]

기원전 4세기경부터 그리스에서는 원 이외에도 여러 가지 곡선에 관한 연구가 있었다. 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 흔히 원뿔곡선이라 부르는데, 이는 원뿔을 꼭지점을 지나지 않는 한 평면으로 잘랐을 때의 단면에서 이들이 나타나기 때문이다. 플라톤(Platon; 427?～347 B.C.)의 친구였던 에우독소스(Eudoxos; 408?～355?B.C.)의 제자 메나이크모스는 처음으로 원뿔곡선을 엄밀하게 정의하였다.

메나이크모스는 그리스 수학의 3대 난문제를 연구하다가 원뿔곡선을 발견하게 되었다. 수학의 3대 난문제란

ⅰ. 주어진 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 작도하는 원적문제

ⅱ. 임의의 각을 3등분하는 선분을 작도하는 각의 삼등분 문제

ⅲ. 주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체를 작도하는 배적문제

를 말한다. 당시 그리스인들에게 3대 작도문제의 해결은 사회적인 이슈였고, 메나이크모스가 3대 작도 문제에 관심을 기울인 것은 당연한 일이었다. 3대 작도 문제 중 “주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체를 작도하는 배적문제”를 해결하는 과정에서 원뿔곡선이 발견되었다.

히포크라테스(Hippocrates;460?～377? B.C.)는 배적문제가 두 개의 비례중항[4)]을 구하는 문제와 같음을 밝혔다. 즉, 배적문제는 선분 s와 2 s 사이에

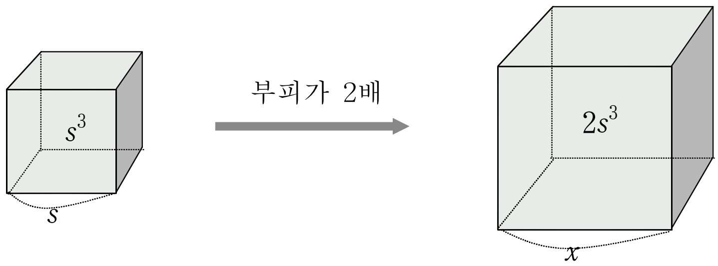
$$s : x = x : y = y : 2s$$

를 만족하는 2개의 비례중항 x, y를 구하는 문제로 바꿀 수 있음을 증명한 것이다.

---

3) 남호영 외, 2001, 원뿔곡선 지도방안, 제3회 수학사랑 Math Festival 발표자료, p.437

4) a : b = b : c 가 성립할 때, b를 a와 c의 비례중항이라 한다. 이때 a, b, c는 등비수열이 되므로 비례중항을 등비중항이라고도 한다.



위의 비례식으로부터 세 방정식 $x^2 = sy$, $y^2 = 2sx$, $xy = 2s^2$ 이 유도된다.

$x^2 = sy$, $y^2 = 2sx$ 에서 y를 소거하면

$$x^4 = s^2y^2 = s^2(2sx) = 2s^3x \quad \therefore\ x^3 = 2s^3$$

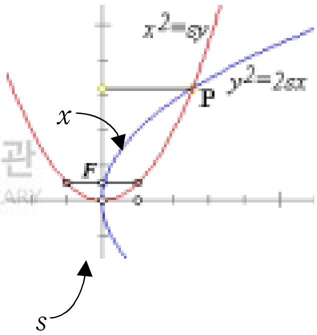
위의 식을 만족하는 x를 한 모서리의 길이로 하는 정육면체의 부피는 한 모서리의 길이가 s인 정육면체 부피의 2배가 된다.

이때 s의 길이는 포물선

$x^2 = sy$의 초점 $(0, \frac{s}{4})$에서 ,

x의 길이는 두 포물선

$x^2 = sy$, $y^2 = 2sx$의 교점 P에서 알 수 있다.

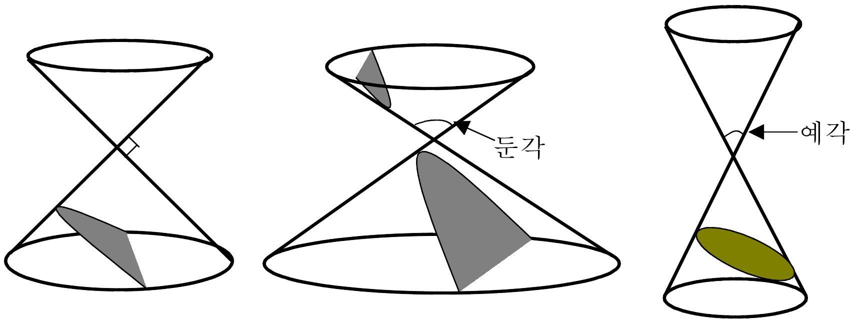


마찬가지 방법으로 포물선과 쌍곡선의 교점에서도 부피가 $2s^3$인 정육면체의 한 모서리의 길이를 구할 수 있다.

메나이크모스는 이러한 방정식을 만족하는 곡선을 작도하려고 시도했다. 자와 컴퍼스만으로는 방정식을 만족하는 것을 작도할 수 없었던 메나이크모스는 고심하다가 원뿔을 절단해 보기에 이른 것이다.

메나에크무스는 기원전 350년경에 다음 사실을 발견했다고 한다.

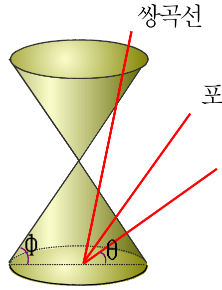
“꼭지각이 직각인 원뿔을 모선에 대해서 수직인 평면으로 잘라낼 때 생긴 곡선은 두 방정식 $x^2 = sy$, $y^2 = 2sx$ 을 만족하고, 꼭지각이 둔각인 원뿔을 모선에 대해서 수직인 평면으로 잘라낼 때 생긴 곡선은 쌍곡선”이라는 사실을 발견했다고 한다.



<메나이크모스의 원뿔곡선>

이렇듯 비례중항으로부터 유도되는 방정식을 만족하는 곡선을 원뿔을 절단해서 만들어낸 메나이크모스는 여기서 멈추지 않았다. 당시 그리스인들에게는 원을 사영하면 볼 수 있는 모양이라 알려진 타원은 꼭지각이 예각인 직원뿔의 모선에 수직인 평면으로 잘라내어 만들 수 있음을 보였다.

한편, 아폴로니우스는 메나에크무스와는 달리 한 원뿔을 가지고 여러 방향에서 잘라 보았다. 그는 자른 면과 직원뿔의 밑면이 이루는 각의 크기에 따라 원뿔곡선을 분류하였다.



5)

원뿔의 밑면과 모선이 이루는 각 : ϕ, 원뿔의 밑면과 단면이 이루는 각 : θ

$\theta = 0$일 때 ⇒ 원　　　$\theta = \phi$일 때 ⇒ 포물선

$\theta < \phi$일 때 ⇒ 타원　　　$\theta > \phi$일 때 ⇒ 쌍곡선

<아폴로니우스의 원뿔곡선>

그 후, 아폴로니우스는 원뿔곡선에 관한 연구를 더욱 발전시켜 메나에크모스의

5) http://www.mathlove.org/doc/posters/poster27.hwp

생각을 수정, 보완하여 모두 8권으로 된 「원뿔곡선론」이라는 유명한 책을 남겼다. 이들 중 제1권부터 제4권까지는 현재까지 보존되어 있으나 제5권부터 제7권까지는 아라비아어로 번역된 번역본만 남아 있으며, 제8권은 없어졌다고 한다.

아폴로니우스는 이 책에서 타원을 주어진 두 점으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 자취, 쌍곡선을 주어진 두점으로부터의 차가 일정한 점들의 자취라고 정의 하였고, 축, 초점, 점근선등에 대하여 논하였다.

원뿔곡선에 타원(ellipse), 포물선(parabola), 쌍곡선(hyperbola)이라는 이름을 붙여준 사람은 아폴로니우스이다. 피타고라스 학파는 직사각형을 한 선분 위에 갖다 댈 때[6], 갖다 댄 직사각형의 변이 선분보다 짧으냐, 일치하느냐, 길으냐에 따라 변을 각각 'ellipsis'('부족하다'는 뜻의 그리스어). 'parabole' (일치한다), 'hyperbole'(초과한다)의 경우라고 말했다.

이제, 포물선, 타원, 쌍곡선이라는 우리 나라 용어에는 어떠한 뜻이 담겨있는지 생각해보자. 타원(楕圓)에서 타(楕)는 '길쭉하다. 가늘고 길다, 길둥글다'라는 뜻을 가지고 있으므로 길다란 원을 의미한다. 포물선(抛物線)에서 포(抛)는 던지다라는 뜻이므로 물건을 위로 던졌을 때 물체가 그리는 곡선을 의미한다. 쌍곡선(雙曲線)의 쌍(雙)은 말 그대로 '쌍, 짝'이라는 뜻이므로 하나가 아닌 두 개의 곡선이 짝을 이루고 있다는 것을 의미한다.

고대의 메나이크모스나 아폴로니우스가 단지 수학적 흥미로 연구했던 원뿔곡선은 17세기에 이르기까지 2000년 동안 별다른 이론적 응용이 없었다.

그러나 1610년경에 케플러는 행성들이 태양을 한 초점으로하는 타원 운동을 하고 있음을 발견하였고, 갈릴레이(Galilei, G.;1564～1642)는 던져올린 물체가 포물선 운동을 한다는 것을 보였다.

이와 때를 같이해 데카르트(Descartes, R.;1596～1650)와 페르마(Fermat, P.;1601～1665)를 시작으로 해석기하학이 발달하면서 원뿔곡선을 방정식으로 나타내게 되었고, 정확한 수치를 계산할 수 있게 됨에 따라 새로운 사실들이 발견되

6) 직사각형의 한 변을 선분 위에 갖다 놓을 때 직사각형의 변의 한 끝과 선분의 한 끝이 일치하도록 하는 것을 의미한다.

면서 과학이나 실생활 등 여러 방면에 이용할 수 있게 되었다.

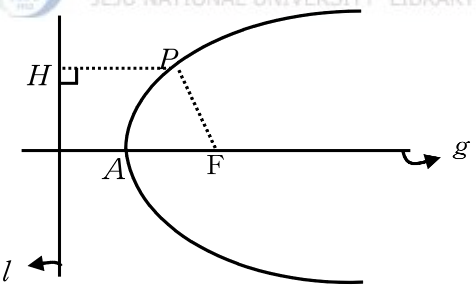
2. 수학Ⅱ 과목의 내용 분석 및 용어의 정의

고등학교 교육 과정상의 수학Ⅱ 과목에서의 이차곡선 관련 용어들을 정의 해보면 다음과 같다.

1) 포물선

(1)포물선의 정의

·포물선 : 평면 위의 한 정점과 이 점을 지나지 않는 직선으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취를 **포물선**이라고 한다. 이 때, 정점을 **초점**, 직선을 **준선**이라 한다.



·준선과 수직이며 포물선의 초점을 지나는 직선을 포물선의 **축**이라 하고 포물선의 축과 포물선의 교점을 **꼭지점**이라 한다.

·위 그림에서 곡선상의 임의의 점을 P라 하면 $\overline{HP}=\overline{FP}$이다. 이 때, F 를 포물선의 **초점**, 직선 l를 **준선**, g을 **축**이라 하며 점 A를 포물선의 **꼭지점**이라고 한다.

(2) 포물선의 방정식

·초점을 $F(p,0)$, 준선을 $x=-p$ 라고 할 때, 포물선 위의 임의의 점 $P(x,y)$라 하면 $|x+p|=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $y^2=4px\ (p\neq 0)$------------① 가 된다.

이는 축이 x축과 평행한 포물선이 된다.

(ㄱ) 포물선의 초점 $(p,0)$

(ㄴ) 포물선의 준선 $x=-p$

(ㄷ) 포물선의 축 $y=0$

(ㄹ) 포물선의 꼭지점 $(0,0)$

(ㅁ) $|p|=$'꼭지점과 초점간의 거리' = '꼭지점과 준선간의 거리'

$$=\frac{\text{준선과 초점간의 거리}}{2}$$

·초점을 $F(0,p)$, 준선을 $y=-p$라고 할 때, 포물선 위의 임의의 점을 $P(x,y)$라 하면

$$|y+p|=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2=4py$ ----------------------②가 된다.

이는 축이 y축과 평행한 포물선이 된다.

(ㄱ) 포물선의 초점 $(0,p)$

(ㄴ) 포물선의 준선 $y=-p$

(ㄷ) 포물선의 축 $x=0$

(ㄹ) 포물선의 꼭지점 $(0,0)$

(ㅁ) $|p|=$'꼭지점과 초점간의 거리'

= '꼭지점과 준선간의 거리'

$$=\frac{\text{준선과 초점간의 거리}}{2}$$

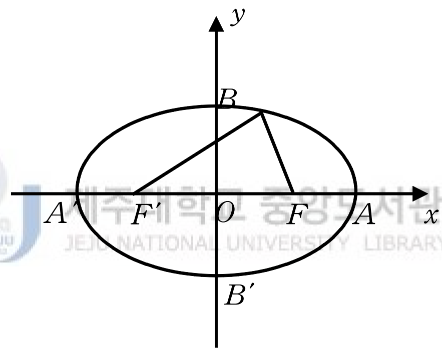
특히, ①,②과 같은 꼴의 방정식을 **포물선의 표준형**이라고 한다.

2) 타원

(1)타원의 정의

·평면 위의 두 정점에 이르는 거리의 합이 일정한 점의 자취를 **타원**이라고 한다. 이 때, 두 정점을 타원의 **초점**이라 한다.

·타원의 두 초점을 지나는 직선을 타원의 **장축**이라 하며, 두 초점의 중점을 지나며 장축에 수직인 직선을 타원의 **단축**이라 하고 장축과 단축의 교점을 타원의 **중심**, 타원과 축의 네 교점을 타원의 **꼭지점**이라 한다.



·위 그림에서 F, F'를 타원의 두 **초점**, AA'를 **장축**, BB'를 **단축**, O를 타원의 **중심**, A, A', B, B'를 타원의 **꼭지점**이라 한다. $\overline{AA'}$를 **장축의 길이**, $\overline{BB'}$를 **단축의 길이**라 한다.

(2) 타원의 방정식

·두 정점 $F(k, 0)$, $F'(-k, 0)$에서의 거리의 합이 $2a\,(a>k>0)$인 점을 $P(x, y)$라 하면,

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x+a)^2+y^2}=2a$$ 가 성립한다.

이를 제곱하여 정리하면, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-k^2}=1$이 된다.

여기서 $a^2-k^2=b^2$ 이라 하면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (단,\ a>b>0\ ,\ k^2=a^2-b^2)$$ ----------①이 된다.

여기서

(ㄱ) 초점의 좌표 : $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

(ㄴ) 타원의 중심 : (0, 0)

(ㄷ) 장축의 길이 : $2a$

(ㄹ) 단축의 길이 : $2b$

(ㅁ) $\overline{PF}+\overline{PF'}=$장축의 길이 $=2a$

두 정점 $F(0,k), F'(0,k)$에서의 거리의 합이 $2b(b>k>0)$ 인 점을 $P(x,y)$라 하면, 같은 방법으로 정리하면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (단,\ b>a>0\ ,\ k^2=b^2-a^2)$$ -----------②이 된다.

여기서

(ㄱ) 초점의 좌표 : $(0, \pm\sqrt{a^2-b^2})$

(ㄴ) 타원의 중심 : (0, 0)

(ㄷ) 장축의 길이 : $2b$

(ㄹ) 단축의 길이 : $2a$

(ㅁ) $\overline{PF}+\overline{PF'}=$장축의 길이 $=2b$

①, ②을 타원의 방정식의 **표준형**이라고 한다

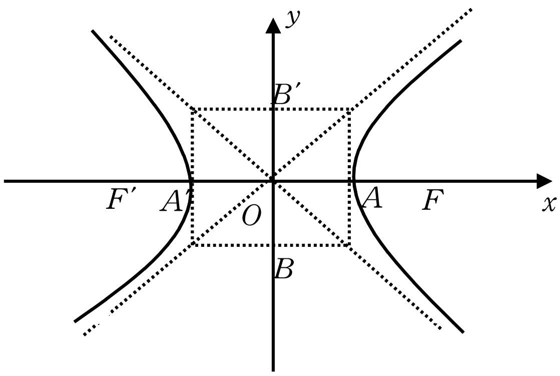
·타원의 방정식의 일반형은 x, y에 관한 2차식이며 xy항은 없고 x^2의 계수와 y^2의 계수는 같은 부호이면서 서로 달라야 한다. 만일 같다면 원의 방정식이 된다.

3) 쌍곡선

(1)쌍곡선의 정의

·두 정점에 이르는 거의 차가 일정한 점의 자취를 **쌍곡선**이라 한다. 이 때, 두 정점을 쌍곡선의 **초점**이라 한다.

·쌍곡선의 두 초점을 지나는 직선을 쌍곡선의 **주축**이라 하고 두 초점의 중점을 쌍곡선의 **중심**이라 한다. 쌍곡선의 중심을 지나 주축에 수직인 직선을 쌍곡선의 **켤레축**이라 한다.



·쌍곡선과 주축의 두 교점을 쌍곡선의 **꼭지점**이라 하고 두 꼭지점을 맺은 선분의 길이를 쌍곡선의 **주축의 길이**라 한다.

·위의 그림에서 쌍곡선 위의 점을 P라 하면 $\overline{PF} \sim \overline{PF'} = \overline{AA'}$이다.

(2)쌍곡선의 방정식

·주축이 x축과 평행한 경우

초점을 $F(k, 0)$, $F'(-k, 0)$이라 하고 두 점에 이르는 거리의 차가 $2a$라고 하면, 이를 만족하는 점 $P(x, y)$의 자취는

$\sqrt{(x-k)^2+y^2}-\sqrt{(x+k)^2+y^2}=\pm 2a$ 이다. 이를 정리하면

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{k^2-a^2}=1$ 이다. 이 때, $k^2=a^2+b^2$ 이라 하면

쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0$, $b>0$, $k^2=a^2+b^2$) 이 된다.

이를 쌍곡선의 표준형이라고 한다.

(ㄱ) 쌍곡선의 중심 : (0, 0)

(ㄴ) 꼭지점의 좌표 : $(\pm a, 0)$

(ㄷ) 초점의 좌표 : $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

(ㄹ) 주축의 길이 : $2a$

(ㅁ) $\overline{PF} \sim \overline{PF} = 2a =$ 주축의 길이

·주축이 y축과 평행한 경우

초점을 $F(0,k)$, $F'(0,-k)$ 이라 하고 두 점에 이르는 거리의 차가 $2b$라고 하면, 이를 만족하는 점 $P(x,y)$ 의 자취는

$\sqrt{x^2+(y-k)^2} - \sqrt{x^2+(y+k)^2} = \pm 2b$ 이다. 이를 정리하면

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (단, $a>0$, $b>0$, $k^2=a^2+b^2$)이 된다. 이를 **쌍곡선의 표준형**이라고 한다.

·쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 와 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 를 **켤레쌍곡선**이라고 한다.

(3) 쌍곡선의 점근선의 방정식

·쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}$이다.

여기서 $x\to\infty$이면 $\frac{a}{x}\to 0$ 이므로 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 이다.

·두 점근선이 서로 수직인 쌍곡선을 **직각 쌍곡선**이라 한다. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 점근선은 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 이다. 두 직선이 수직이 되려면 기울기의 곱이 -1이어야 하므로 $-\frac{b^2}{a^2} = -1$ 따라서, $a^2=b^2$이다. 따라서, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 **직각쌍곡선**이 될 조건은 $a^2=b^2$ 이다.

·쌍곡선의 방정식의 일반형은 x^2의 계수와 y^2의 계수의 부호가 서로 반대이어야 하며, xy항이 없어야 한다.

3. 이차곡선의 정리

데카르트의 해석기하학을 빌리면 말한 원뿔곡선은 두 변수 x, y에 관한 이차 방정식으로 표시된다.

다음 방정식이 나타내는 곡선을 일반이차곡선이라고 한다.

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

좌표변환을 이용하여 이 곡선의 모양을 살펴보자

x축과 y축을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 것을 각각 X축, Y축이라고 하면 한 점 P의 좌표 (x, y)와 좌표 (X, Y) 사이에는

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

인 관계가 있다. 따라서, ①이 나타내는 도형은 새 좌표계에서는

$$AX^2+2HXY+BY^2+2GX+2FY+C=0 \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

으로 표시된다. 단, $A=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$

$$H=(b-a)\sin\theta\cos\theta+h\cos 2\theta$$

$$B=a\sin^2\theta-2h\cos\theta\sin\theta+b\cos^2\theta$$ 이다.

여기서 $H=0$ 즉, $(b-a)\sin\theta\cos\theta+h\cos 2\theta=0 \qquad \cdots\cdots \quad ③$

인 θ의 값을 잡으면 ②는 XY의 항이 없는

$$AX^2+BY^2+2GX+2FY+C=0 \qquad \cdots\cdots \quad ④$$

가 된다. 이 때,

$AB=(a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta)$

$\times(a\sin^2\theta-2h\cos\theta\sin\theta+b\cos^2\theta)$

$=ab-h^2$

(1) $AB\neq 0$인 경우 :

이 때, ④는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$A\left(X+\frac{G}{A}\right)^2+B\left(Y+\frac{F}{B}\right)^2=\frac{G^2}{A}+\frac{F^2}{B}-C$$

여기서, $K=\frac{G^2}{A}+\frac{F^2}{B}-C$ 라고 두면

$$A\left(X+\frac{G}{A}\right)^2+B\left(Y+\frac{F}{B}\right)^2=K \qquad \cdots\cdots \quad ⑤$$

이제, 점 $\left(-\frac{G}{A},-\frac{F}{B}\right)$에 좌표의 원점을 옮기면 주어진 곡선의 방정식은

$$AX'^2+BY'^2=K$$

이 곡선은 다음과 같이 분류된다.

(ㄱ) A와 B가 같은 부호인 경우;

(i) K가 이들과 같은 부호이면 주어진 곡선은 타원이고,

(ii) K가 이들과 다른 부호이면 주어진 곡선은 허타원이다.

(iii) $K=0$ 이면 한 점을 나타낸다.

(ㄴ) A와 B가 서로 다른 부호인 경우;

(i) $K\neq 0$ 이면 쌍곡선이고,

(ii) $K=0$ 이면 만나는 두 직선이다.

(2) A, B 중 한 개가 0인 경우 :

(ㄱ) $B=0$ 일 때 ④에서 다음을 얻는다.

$$AX^2+2GX+2FY+C=0$$

(i) $F=0$ 일 때, 주어진 곡선은 축이 Y축에 평행한 두 실직선 (또는 허직선)이고,

(ii) $F\neq 0$ 일 때, 주어진 곡선은 축이 Y축에 평행한 포물선이다.

(ㄴ) $A=0$ 일 때, ④에서 다음을 얻는다.

$$BY^2+2GX+2FY+C=0$$

(i) $G=0$ 일 때, 주어진 곡선은 축이 X축에 평행한 두 실직선 (또는 허직선)이고,

(ii) $G \neq 0$ 일 때, 주어진 곡선은 축이 X축에 평행한 포물선이다.

위에서 말한 (1), (2)에 의하여

i) $ab-h^2 > 0$ 이면 타원(또는 원. 점원),

ii) $ab-h^2 < 0$ 이면 쌍곡선 또는 만나는 두 직선,

iii) $ab-h^2 = 0$ 이면 포물선 또는 평행인 두 직선(겹치는 경우 포함)이다.

이상을 정리하여 고등학교 과정상의 이차곡선이 어떻게 분류되는지를 알아보면 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ 의 형태로 나타나는 곡선을 2차 곡선이라 한다.

① $A=B$ 이면 원의 방정식이 된다.

② [$A=0$ 그리고 $BC\neq 0$] 또는 [$B=0$ 그리고 $AD\neq 0$]이면 포물선

③ $AB>0$ 그리고 $A\neq B$ 이면 타원

④ $AB<0$ 이면 쌍곡선

(참고) 고등학교 과정상 배운 2차 곡선은 xy항이 없다. 만일 xy항이 있는 이차곡선의 경우에는 원점을 중심으로 θ만큼 회전 이동하여 xy항의 계수가 0이 되도록 θ의 값을 결정해주면 2차 곡선이 무엇이 되는 지 알 수 있다.

예) $2x^2+2xy+y^2=1$

원점을 중심으로 θ만큼 회전이동을 하면

$x=x'\cos\theta+y'\sin\theta,\ y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta$를 대입하여 정리하면

$$(1-\sin\theta\cos\theta)x^2+xy\cos 2\theta+(1+\sin\theta\cos\theta)y^2=1$$ 이 된다.

xy항이 없어져야 하므로 $\theta=45^\circ$ [7]따라서,

$$\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}y^2=1$$ 이 된다.

즉, $2x^2+2xy+y^2=1$ 은 $x^2+3y^2=2$ 를 원점을 중심으로 -45° 만큼 회전

---

7)이 경우에는 특수각으로 나왔는데 만일 특수각이 아닌 경우에도 각은 알 수 없으나 sin값과 cos값은 알 수 있으므로 원래 무슨 도형인지 알 수 가 있다.

이동을 한 곡선이 된다.

특히, 유리함수에서 분모와 분자가 모두 1차식인 유리함수는 직각쌍곡선을 원점을 중심으로 회전이동한 것이 된다.

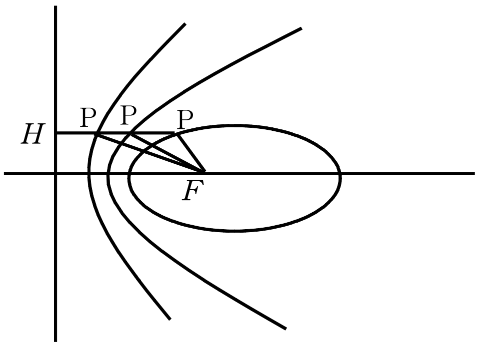
예) $xy=1$은 $x^2-y^2=2$를 원점을 중심으로 $45°$ 만큼 회전 이동한 곡선이다.

4. 이차곡선의 이심률 e

고등학교 과정상에 **이심율**에 대한 특별한 언급은 없으나 포물선, 타원, 쌍곡선을 통일적으로 다룰 수 있는 방법으로는 이차곡선 위의 한 점 $P(x,\ y)$과 평면 위의 한 정점 $F(p,\ 0)$(초점)과 직선 $x=-p$ (준선)에 이르는 거리의 비 e(이심율), 즉, $e=\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PH}}$ 로서 정의 할 수 있다.

정리2.4.1 이심률 $e=\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PH}}$**에 대하여**

$0<e<1$ 이면 **타원**, $e=1$ 이면 **포물선**, $e>1$ 이면 **쌍곡선**이 성립한다.



증명) 이차곡선 위의 한 점 $P(x,\ y)$과 평면 위의 한 정점 $F(p,\ 0)$와

직선 $x=-p$ $(p>0)$에 이르는 거리의 비 e(이심율), 즉, $e=\frac{\overline{PF}}{PH}$이므로

$$\overline{PF}^{\,2}=e^2\,\overline{PH}^2$$

따라서, $(x-p)^2+y^2=e^2(x+p)^2$

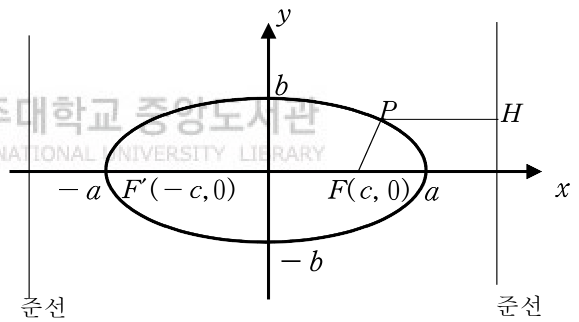
$e=1$이면 $y^2=4px$ 이므로 포물선이다.

$e<1$이면 $(1-e^2)x^2-2p(1+e^2)x+y^2+p^2(1-e^2)=0$ 이므로 타원임을 알 수 있다.

$e>1$이면 $(e^2-1)x^2+2p(1+e^2)x-y^2+p^2(e^2-1)=0$ 이므로 쌍곡선이다.

정리2.4.2 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(단, $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b>0$)의 이심율 e는

$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$이다.



증명) 점 $P(x,y)$가 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점이고, 점 $F(c,0)$를 한 초점이라고 할 때,

$$\begin{aligned}
a^2\,\overline{PF}^2 &= a^2((x+c)^2+y^2)\\
&= a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2\\
&= (c^2+b^2)x^2+2a^2cx+a^2(a^2-b^2)+(a^2b^2-b^2x^2)\\
&= c^2x^2+2a^2cx+a^4\\
&= (cx+a^2)^2\\
&= c^2\left(x+\frac{a^2}{c}\right)^2
\end{aligned}$$

준선의 방정식을 $x=\pm\frac{a^2}{c}$ [8]라 하면 $a^2\ \overline{PF}^2=c^2\ \overline{PH}^2$이므로,

$$a\ \overline{PF}=c\ \overline{PH}$$

$$\therefore\ e=\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}}=\frac{c}{a}$$

정리2.4.3 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(단, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $c>a>0$)이면 이심율 e는

율 $e=\frac{c}{a}(e>1)$이다.

증명) 정리2.4.2 참조

8) 실제로 준선의 방정식은 $x=\pm\frac{a^2}{c}$, 즉 $x=\pm\frac{a}{e}$이다

Ⅲ. 원뿔곡선의 성질 연구

1. 원뿔곡선 만들기

1) 줄과 막대로 원뿔곡선 작도하기[9)]

(1) 포물선

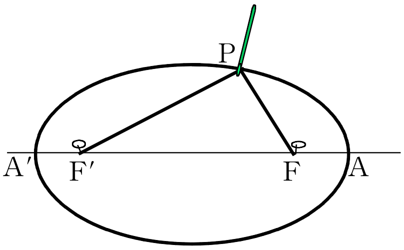
아래 그림에서 줄과 막대의 길이를 같게 만들면 $\overline{PF} = \overline{PH}$이므로 점 P의 자취는 포물선이다. 점 P는 연필의 위치로 막대를 옆으로 밀면서 연필을 아래로 그으면 포물선이 그려진다. 사진에서 막대 대신 T자, 준선의 레일 대신 탁자를 이용하면 점 H에서 수직을 유지할 수 있다.

(2) 타원

아래 그림에서 $\overline{AA'}$의 길이와 같은 길이의 실을 F, F′에 고정시킨 다음 실을 팽팽하게 유지하면서 연필을 움직여 곡선을 그린다.

이 때 $\overline{PA} + \overline{PA'} = \overline{AA'}$(실의 길이로 일정)이므로 점P의 자취는 타원이다.

9) 남호영 외, 2001, 원뿔에서 태어난 이차곡선, 수학사랑, p.85~86



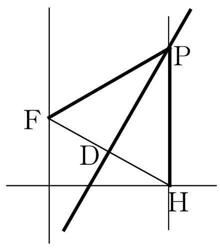
(3) 쌍곡선

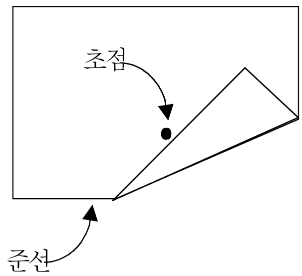
그림과 같이 두점 F, F′를 표시하고 실을 막대의 길이보다 짧게 하고 막대의 한쪽 끝을 F에 고정하고 실의 한쪽 끝은 막대의 다른 쪽 끝에, 다른 한 끝을 F′에 고정시킨다. 연필 끝을 P에 고정시켜 자에 붙여 팽팽하게 당기면서 곡선을 그린다. $|\overline{PF'}-\overline{PF}|$의 값은 항상 일정하므로 점 P의 자취는 쌍곡선이다.

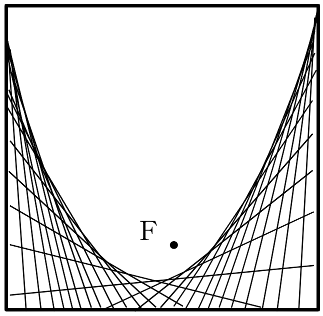
2) 종이로 원뿔곡선 접기

(1) 포물선

그림에서 직선 PD가 선분 FH의 수직이등분선이면 점P의 자취는 포물선이다. 종이를 아래 그림과 같이 접으면 접힌 선이 직선 PD가 된다. 이것은 포물선의 접선이며 이러한 접선들의 외곽선으로 이루어지는 곡선을 포락선(envelope)이라고 한다.

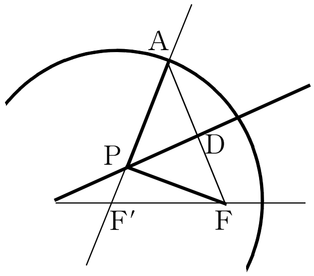


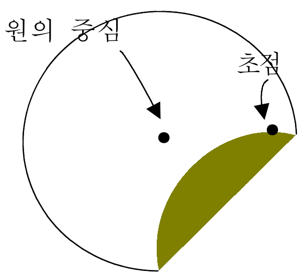


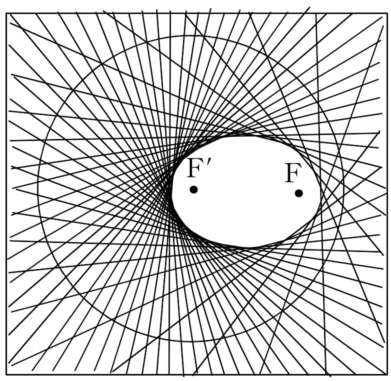


(2) 타원

원 F′ 위의 점 A에 대하여 직선 PD가 선분 AF의 수직이등분선이면 $\overline{PF'}+\overline{PF}=\overline{FA}$=(원의 반지름의 길이)이다. 따라서 점 A가 원 위를 움직일 때 점 P의 자취는 타원이다. 종이를 그림과 같이 접으면 접힌 선이 직선 PD이고 이 때의 포락선은 타원이 된다.

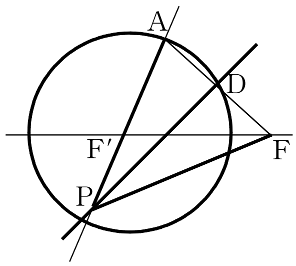




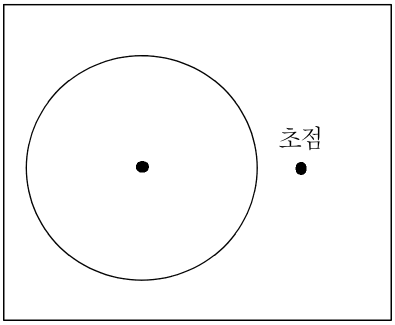


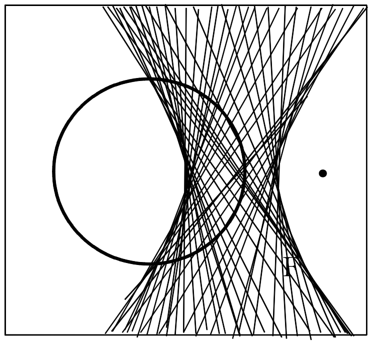
(3) 쌍곡선

타원의 경우에서 점 F가 원 밖에 있게 되면 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=|\overline{F'A}|$=(원의 반지름의 길이)이다. 따라서 점 A가 원 위를 움직일 때 점 P의 자취는 쌍곡선이다.



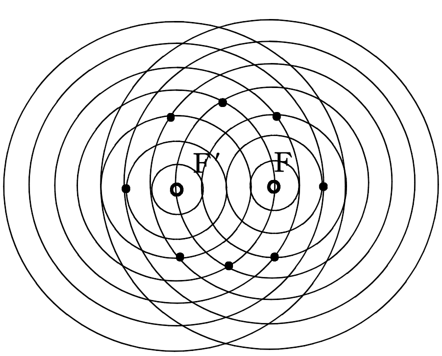
종이를 아래 그림과 같이 원의 외부에 초점을 표시하여 초점이 원 위의 점에 겹치도록 접으면 접힌 선이 직선 PD이고 이 때의 포락선은 쌍곡선이 된다.



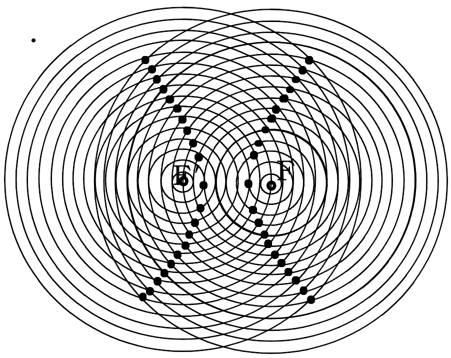


3) 동심원을 이용하여 원뿔곡선 관찰하기

그림과 같이 두 점 F′, F를 잡은 후 두 점 F′, F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 일정하게 1씩 증가하는 원을 그리면 F′, F에서 이루는 거리의 합이 8자취는 인인 타원(그림1)을 이루고, F′, F에서 이르는 거리의 차가 4인 점들의 자취는 쌍곡선을 이룬다

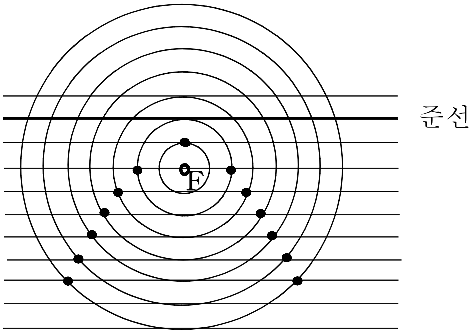


(그림 1)



(그림2)

또한 (그림3)에서와 같이 한 직선(준선)을 기준으로 일정한 간격으로 평행선을 긋고 점 F를 중심으로 반지름이 일정하게 증가하는 동심원을 그리면 준선에서의 거리와 점 F에서의 거리가 같은 교점들이 생기는데 이것은 포물선을 나타낸다.



(그림3)

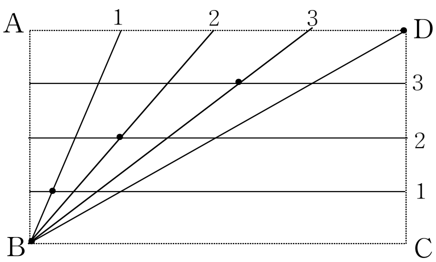
4) 직사각형을 이용하여 그리는 원뿔곡선

원뿔곡선은 이차식으로 나타낼 수 있는데, 직사각형의 비례관계를 이용하면 원뿔곡선을 그릴 수 있다.

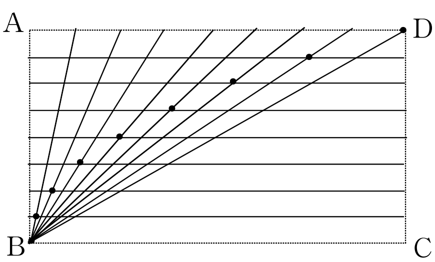
(1) 포물선

아래 (그림1)와 같이 직사각형 ABCD의 변CD와 변AD를 같은 개수의 선분으로 등분하여 점 A와 C에서 차례로 번호를 붙이고 점 B에서 변AD 위의 점1, 2, 3과 연결한 직선들과 변 AD에 평행인 선분 1, 2, 3과의 교점들 중에서 같은 번호끼리의 교점들을 연결하면 포물선이 된다. (그림2)와 같이 간격을 작게 등분할수록 점점 더 매끈한 모양의 포물선을 만들어 나갈 수 있다.

같은 방법으로 축에 대칭이 되는 쪽의 포물선도 완성할 수 있다.



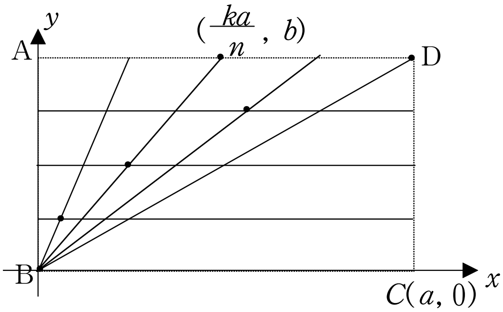
(그림1)



(그림2)

증명) 점 B를 원점이라 하고 $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=b$라 하면 점 B와 $\overline{AD}$위의 k번

째 점 $(\frac{ka}{n}, b)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{b}{\frac{ka}{n}}x$, $y=\frac{nb}{ka}x$ 이다.



이 직선과 x축에 평행한 k번째 직선과의 교점을 구하면

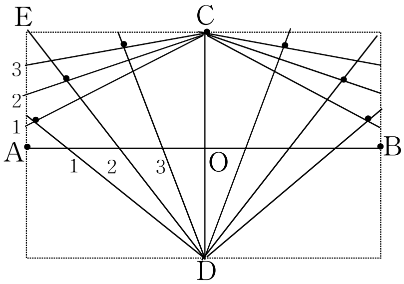
$$(x\text{좌표}):\ x=\frac{k^2a}{n^2}$$

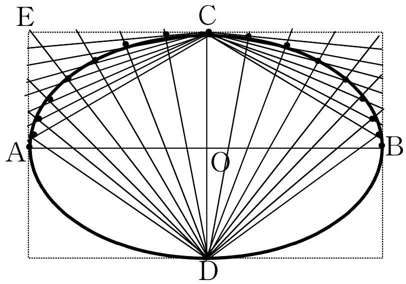
$$(y\text{좌표}):\ y=\frac{kb}{n}$$

x, y사이의 관계를 구하면 $y^2=\frac{b^2}{a}x$이므로 이 곡선은 포물선이다.

(2) 타원

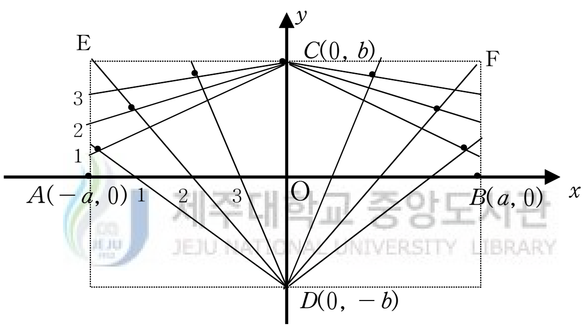
(그림3)과 같이 장축AB, 단축CD를 그리고 이것을 포함하는 점 O가 중심이 되는 직사각형을 그린다. $\overline{AE}$, $\overline{AO}$를 n등분 하여 A에서부터 번호를 붙이고 점 C에서 $\overline{AE}$ 위의 n등분 된 점을 연결하고, 점 D에서 $\overline{AO}$위의 n등분 된 점들을 연결해 같은 번호를 지나는 선분의 교점들을 연결하면 타원이 된다. 여기서도 포물선과 마찬가지로 좀더 세밀하게 등분하면 매끈한 모양의 타원을 얻을 수 있다





(그림3)

증명) 점 0를 원점이라 하고 $\overline{AO}=a$, $\overline{CO}=b$ 라 하자.



점 C와 $\overline{BF}$ 위의 k번째 점 $(a,\ \frac{kb}{n})$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{-\frac{kb}{n}}{a}x+b, \quad \therefore y=-\frac{kb}{na}x+b \quad \cdots\cdots①$$

점 D와 $\overline{OB}$ 위의 k번째 점 $(\frac{ka}{n},\ 0)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{b}{\frac{ka}{n}}x-b, \quad \therefore y=\frac{nb}{ka}x-b \quad \cdots\cdots②$$ 이다.

①, ②를 연립하여 풀면 $-\frac{kb}{na}x+b=\frac{nb}{ka}x-b \quad \therefore x=\frac{2ank}{n^2+k^2} \quad \cdots\cdots③$

이것을 ①에 대입하면 $y=\frac{(n^2-k^2)b}{n^2+k^2}$, k에 대하여 정리하면 $k=\sqrt{\frac{b-y}{b+y}}\,n$

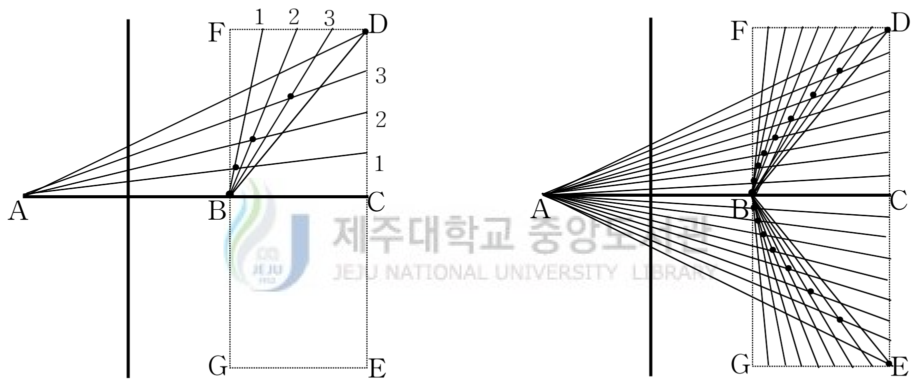
이것을 ③에 대입하여 정리하면 $bx = a\sqrt{b^2 - y^2}$, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(3) 쌍곡선

(그림4)와 같이 선분 AB를 대칭축으로 직사각형 DEGF를 그리고 선분 DC와 DF를 같은 개수로 등분하고 점C, F에서 차례로 번호를 매긴다.

점A, B로부터 각각 선분DC, DF 위의 점1, 2, 3에 직선을 긋고 같은 번호를 지나는 교점들을 연결하면 쌍곡선이 만들어 진다.



(그림4)

이 이외에도 원뿔곡선은 **모래를 이용한 실험과 그림자를 이용하는 방법** 등에서도 관찰할 수 있다.

2. 원뿔곡선의 증명(1)

1) 포물선의 증명

원뿔을 평면으로 잘라낸 단면이 이차식으로 표현됨을 증명하자면 좌표공간에서 생각해봐야 될 듯 싶다.

직선 z = x and y=0 을 z 축 주위로 회전시켜 얻어지는 원뿔의 방정식은

$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이제 이 원뿔을 어느 한 모선에 평행인 평면 $z = x + 1$ ...... ② 으로 잘라서 생기는 절단면의 방정식은 ②식을 ①식에 대입하여 풀면 되므로

$$(x+1)^2 = x^2 + y^2$$

이것을 정리하면

$$y^2 = 2x + 1 \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

③에서 얻어진 식이 포물선의 방정식이다.

이 ③식은 x 와 y 와의 관계를 나타낼 뿐이지 z 와의 관계가 빠져 있다. 그러므로 ③식는 **절단곡선을 X-Y 평면에 투사한 곡선**이라고 보면 될 것이다. 우리가 평면②로 원뿔 ①을 자른 것이므로, ③는 비스듬한 ②평면 위에 그려진 것이다. 그러므로, 정확히 삼차원에서 절단곡선을 표현하는 식은 ②와 ③를 같이한

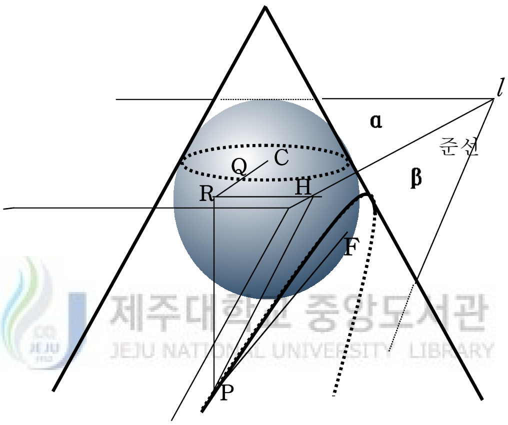
$z = x + 1$, $y^2 = 2x + 1$ 이 될 수 있다 하겠다

같은 방법으로 위의 ②에 해당되는 평면을 $z = \frac{1}{2}x + 1$**(모선보다 기울기가 작은 평면),** $z = 2x + 1$**(모선보다 기울기가 큰 평면)으로 나타내면 각각 타원, 쌍곡선의 방정식이 될 것이다.**

3. 원뿔곡선의 증명(2)

1) 포물선의 증명

모선과 평행하게 잘라낸 평면β과 원뿔에 접하는 구를 하나 그리고, 원 C를 품는 평면α과 평면α과의 교선을 l 이라 하고 포물선 위의 임의의 점 P에서 평면α와 교선 l 에 내린 수선의 발을 각각 R, H 라 하자. 또 평면 β와 구의 접점을 F 라 하자.



선분 RC와 원 C가 만나는 점을 Q라 하면 직선 PQ는 구의 접선이다.

구의 접선의 길이는 모두 같으므로 PF = PQ ------- ①

원뿔의 축과 직선 PR은 평행하므로 ∠QPR=∠HPR(∵축과 모선 PQ, PH가 이루 각)

∠QPR =∠HPR, 직선 PR은 공통, ∠QRP=∠HRP(직각)

$$\triangle HRP \equiv \triangle QRP$$

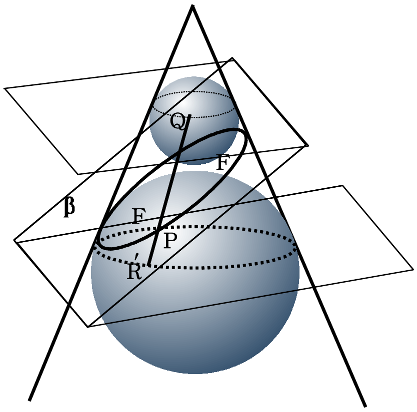
$$\therefore PQ = PH \quad \text{-------} \ ②$$

①, ②에서 **PF =PH**

따라서, 평면 β로 잘라서 생기는 곡선은 **F를 초점, 직선 l 을 준선**으로 하는 **포물선**이다.

2) 타원의 증명

모선보다 기울기가 작게 잘라낸 평면β와 원뿔에 접하는 두 개의 구를 생각하자.



평면β와 원뿔이 만나서 생기는 곡선위의 임의의 점을 P, 평면β와 두 구의 교점을 각각 F, F′, 점 P와 원뿔의 꼭지점을 지나는 직선의 연장선과 두 구의 교점을 각각 Q, R이라 하면 구의 접선의 길이는 모두 같으므로

PQ=PF ------ ①, PR=PF′ ------ ②

①, ②에서

PF+PF'=PQ+PR=QR(일정)

∴평면β와 원뿔이 만나서 생기는 곡선은 **두 초점이 F, F′인 타원**이다

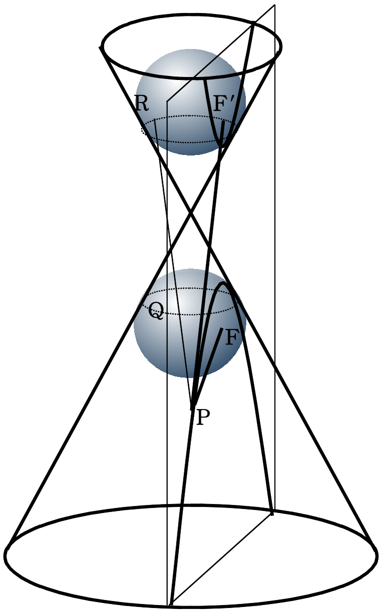
3) 쌍곡선의 증명

그림과 같이 모선보다 기울기가 크게 잘라낸 평면β와 원뿔에 접하는 두 개의 구를 생각하자.

평면β와 원뿔이 만나서 생기는 곡선위의 임의의 점을 P, 평면β와 두 구의 교점을 각각F, F′, 점 P와 원뿔의 꼭지점을 지나는 직선의 연장선과 두 구의 교점을 각각 Q, R이라 하면

구의 접선의 길이는 모두 같으므로

PQ=PF ------ ① , PR=PF′ ------ ②



①, ②에서

PF′-PF=PR-PQ=QR(일정)

∴평면β와 원뿔이 만나서 생기는 곡선은 **두 초점이 F, F′인 쌍곡선**이다

4. 이차곡선과 접선

이차곡선의 방정식은 x, y에 관한 2차식이다. 따라서, 직선과 이차곡선이 접한다는 것은 직선과 이차곡선의 방정식을 연립한 2차 방정식이 중근을 갖는 경우와 같다. 따라서, 접선의 방정식은 두 식을 연립하여 판별식을 이용하여 구하는 것이 일반적인 방법이나 계산하는 과정상 복잡하고 기계적인 계산을 반복해야 하는 불편함이 있어 본 연구에서는 미분을 이용한 방법으로 접선의 방정식을 유도하려 한다.

정리3.4.1 이차곡선 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ 위의 한 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $Axx_1+Byy_1+C\dfrac{x+x_1}{2}+D\dfrac{y+y_1}{2}+E=0$ 이다.

증명) $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2Ax+2Byy'+C+Dy'=0, \quad y'=-\frac{2Ax+C}{2By+D}$$

곡선 위의 한 점 (x_1, y_1)에서의 기울기 m은

$$m= y'\Big|_{\substack{x=x_1\\ y=y_1}}=-\frac{2Ax_1+C}{2By_1+D}\,(2By_1+D\neq 0)$$ 이므로

구하는 접선의 방정식은 $y-y_1=-\dfrac{2Ax_1+C}{2By_1+D}(x-x_1)$

이것을 정리하면

$$2Ax_1x+2By_1y+Cx+Dy=2Ax_1^2+2By_1^2+Cx_1+Dy_1$$

$$Axx_1+Byy_1+C\frac{x+x_1}{2}+D\frac{y+y_1}{2}=Ax_1^2+By_1^2+Cx_1+Dy_1$$

점 (x_1, y_1)은 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ 위의 점이므로

$$Ax_1^2+By_1^2+Cx_1+Dy_1=-E$$

∴구하는 접선의 방정식은

$$Axx_1+Byy_1+C\frac{x+x_1}{2}+D\frac{y+y_1}{2}+E=0$$

5. 이차곡선의 성질 연구

1) 포물선의 성질

정리 3.5.1 초점이 F인 포물선이 있다. 이 포물선위의 점 P에서 그은 접선이 포물선의 축과 만나는 점을 T라 하고 하면 $\overline{FP}=\overline{FT}$이다.

증명) 포물선의 방정식을 $y^2=4px$ 라 하고, 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

점 P는 포물선 위의 점이므로 $y_1^2=4px_1$

접선의 방정식은 $y_1y=2p(x_1+x)$

따라서, 접선과 x축과의 교점 T의 좌표는 $(-x_1, 0)$이고 초점 F의 좌표는 $(p,\ 0)$이므로 $\overline{FT}=|p+x_1|$,

한편, $\overline{FP}=\sqrt{(x_1-p)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+p)^2}=|x_1+p|$

$\therefore \overline{FP}=\overline{FT}$

정리 3.5.2 포물선 $y^2=4px$ ($p>0$) 위의 임의의 점을 $P(x_1, y_1)$, 초점을 F라고 한다. 점 P를 지나 x축에 평행인 직선 PX와 직선 PF는 P에서 그은 접선과 등각을 이룸을 밝혀라.

증명)점 P에서 그은 접선이 x과 만나는 점을 T라고 한다. 정리 3.5.1에 의하여

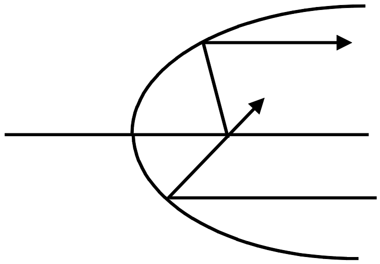
$\overline{TF}=\overline{FP}$ 이므로 (삼각형 FTP에서)

$\angle TPF=\angle PTF$

그런데, $\overline{PX} \parallel \overline{TF}$이므로 $\angle XPT'=\angle FTP$

따라서, $\angle TPF = \angle XPT'$

정리3.5.1 와 정리3.5.2에 의하여 **포물선의 초점에서 나온 빛이 포물선에서 만나 반사되면 축과 평행하게 반사되며, 반대로 축과 평행하게 들어온 빛이 반사되면 초점을 지난다**(그림1).



(그림1)

정리 3.5.3 던져진 물체가 그리는 곡선은 포물선이다.

수평 방향으로 던져진 물체가 그리는 궤적은 수직 방향의 성분과 수평 방향의 성분의 합이다. 그러므로 보통은 수평 방향의 속력을 가리키는 말인 속력에도 두 가지 성분이 들어 있다. 움직이는 모든 물체는 수평 방향과 수직 방향의 속력을 갖는다. 지표면을 달리는 자동차는 수직 방향 속력이 0이지만 발사대를 떠나 하늘로 솟구치는 로켓은 수평 방향 속력이 0이다. 그러면 농구공이 포물선을 그리는 이유는 무엇일까?

수평 방향을 x축으로 놓고 수직 방향을 y축으로 놓았을 때 공의 움직임은 수평거리 x와 수직거리 y의 식으로 나타낼 수 있다. 공이 손을 떠나서 허공에서 움직일 때 공기의 저항이나 중력과 같은 외부 힘의 작용이 없다고 가정하자. 또한 수평 방향의 속력인 v_x와 수직 방향의 속력인 v_y가 일정하다고 가정하자. 속력을 구하는 공식에 의해, 공이 t시간 동안 움직이는 수평거리 x는 수평속력과 시간의 곱이다.

$$x = v_x t \qquad \cdots\cdots ①$$

마찬가지로, 공이 t시간 동안 움직이는 수직거리 y는 수직속력과 시간의 곱이

다.

$$y = v_y t \qquad \cdots\cdots ②$$

수평거리 x와 수직거리 y는 모두 t에 대한 일차식이다. 두 방정식으로부터 t를 소거하고 x와 y로만 이루어진 식으로 만들어 보자. ①식 에서 $t = \frac{x}{v_x}$를 식 ②에 대입하면,

$$y = v_y\left(\frac{x}{v_x}\right) = ax, \qquad a = \frac{v_y}{v_x}$$

라는 식을 얻는다. 여기서 y는 x에 대한 일차식이므로 이 식을 좌표평면에 옮기면 직선인 그래프를 얻을 수 있다. 즉, 수평 방향의 속력과 수직 방향의 속력이 일정하다면 공은 직선을 따라서 움직이게 된다.

그러나 중력이 존재할 때(공기 저항이나 다른 외부 힘의 작용은 없을 때) 수평거리 x에 대한 식 ①은 변하지 않지만 수직거리 y에 대한 식 ②는 중력의 영향을 받게 될 것이 분명하다. 즉, 식 ②는 t시간 동안 물체가 낙하하는 거리에 따라서 변하게 된다. 이에 대해 연구한 사람이 갈릴레이인데, 그는 중력상태에서 낙하하는 모든 물체는 시간의 제곱에 비례하는 거리, 즉 ct^2(c는 상수)만큼의 거리를 수직 낙하한다는 사실을 관측했다. 중력상태인 지구상에서 던져진 농구공 역시 수직으로 낙하하는 운동을 하게 되므로, t시간일 때 공의 실제 높이는 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$y = v_y t - ct^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

식 ②에서는 t에 대한 일차식이었던 y가 중력 때문에 t에 대한 이차식이 되었다. x와 y의 관계식을 얻기 위하여 다시 t를 소거하면,

$$y = v_y\left(\frac{x}{v_x}\right) - c\left(\frac{x}{v_x}\right)^2 = ax - bx^2,\quad a = \frac{v_y}{v_x},\quad b = \frac{c}{{v_x}^2} \quad \cdots\cdots \text{④}$$

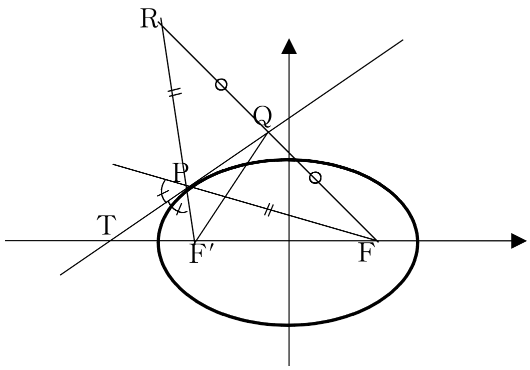
가 된다. 여기서 y가 x에 대한 이차식이며 그래프로 옮기면 포물선 형태가 됨을 알 수 있다. 농구공이 포물선을 그리는 이유는 이와 같다.

물론 이는 농구공에만 국한된 현상이 아니며 공기의 저항이 없는 곳에서는 모든 던져진 물체가 중력에 의해 포물선을 따라 움직인다.

2) 타원의 성질

정리 3.5.4 두 점 F, F'을 초점으로 하는 타원 위의 임의의 점을 P라고 한다. 삼각형 FPF'의 꼭지점 P에서의 외각의 이등분선은 이 타원의 접선이다.

증명) $\triangle FPF'$의 P에서의 외각의 이등분선 $\overline{PT}$ 위의 임의의 점을 $Q(\neq P)$라고 한다. Q와 F, Q와 F'를 잇는다. $\overline{F'P}$의 연장선위에 점 R를 $\overline{PF} = \overline{PR}$가 되도록 잡는다.



이제, 점 Q가 타원 위의 점이 아님을 밝히자. 실제로, 직선 $\overline{PT}$는 선분 $\overline{RF}$의 수직이등분선이므로

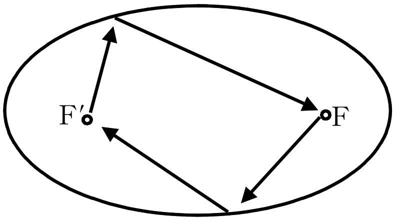
$$\overline{PF'} + \overline{PF} = \overline{PF'} + \overline{PR} = \overline{F'R} < \overline{QF'} + \overline{QR} = \overline{QF'} + \overline{QF}$$

$$\text{즉,}\qquad \overline{PF'} + \overline{PF} < \overline{QF'} + \overline{QF}$$

따라서, 점 Q는 타원 위의 점이 아니다.

이것은 직선 $\overline{PF'}+\overline{PF}=\overline{PF'}+\overline{PR}=\overline{F'R}$는 타원과의 공유점이 P 한 점 뿐임을 의미한다. 즉, 직선 $\overline{PT}$는 주어진 타원의 P에서의 접선이다.

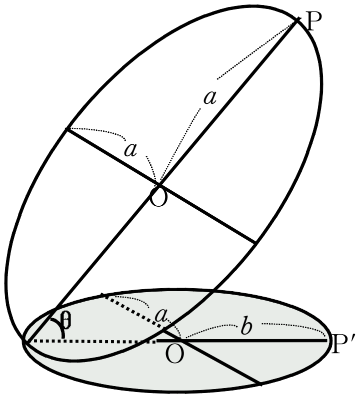
정리3.5.5이 의해 **타원의 한 초점에서 나간 빛(소리)는 타원에 반사되어 다른 초점으로 모인다.**



정리 3.5.5 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 넓이 S는 $S=\pi ab$ 이다.

증명)

ⅰ)**정사영을 이용한 넓이**



바로 위에서 입사하는 평행광선으로 경사진 원판의 그림자를 비추면 타원이 된다. 원의 평면과 그림자의 평면이 이루는 각을 θ라 하면 이 θ의 대소에 따라서 타원의 둥근 정도가 결정된다. θ=0 °일 때는 타원은 원래의 원과 일치하고, θ =90 °일 때는 타원은 장축의 길이가 $2a$인 선분이 된다(a는 원의 반지름). 원의

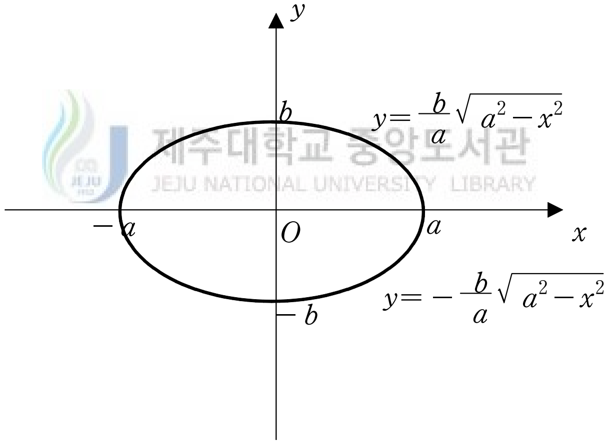
반지름 OP의 그림자를 OP′라 하고 그 길이를 b라 하면 $b = a\cos\theta$이다. 원과 그 그림자인 타원을 포개면 $2a$와 $2b$는 타원의 장축, 단축이 된다.

타원의 넓이는 원래의 원의 넓이의 cosθ배로 되므로

$$\pi a^2 \cos\theta = \frac{\pi a^2 b}{a} = \pi ab \text{ 가 된다.}$$

ⅱ)정적분을 이용한 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a>0,\ b>0)$의 넓이

타원의 방정식을 y에 대하여 풀면 $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$



여기서, 이 타원은 x축 및 y축에 대하여 대칭이므로, 구하는 넓이는 제1사분면의 넓이의 4배이다.

따라서, 구하는 넓이 S는

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a b\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

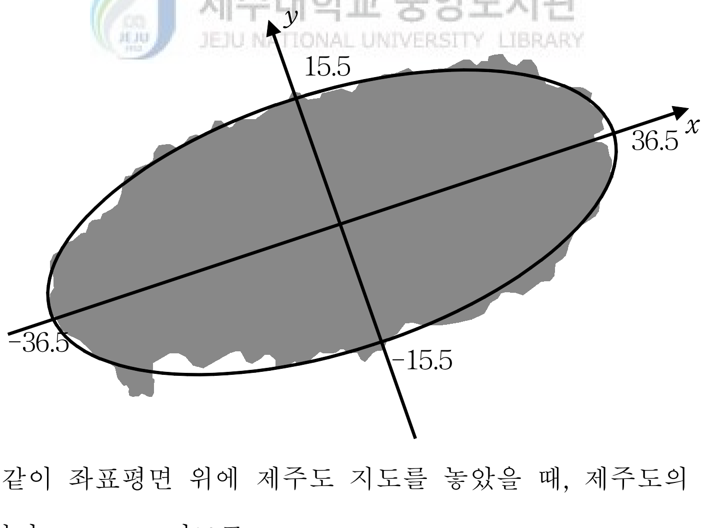
여기서, $x = a\sin\theta$ 로 놓으면, $dx = a\cos d\theta$ 이므로

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \; a\cos\theta d\theta$$
$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$$
$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$
$$= a^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

그러므로 $S = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab$

(예) 제주도의 넓이는 얼마나 될까?

제주도의 해안선의 길이가 263km이며 해안선을 따라 이어진 일주도로의 길이는 182km이다. 모양은 타원형이며 동서의 장축의 길이는 73km인데 반하여 남북의 단축의 길이는 31km이고 넓이는 1845 ㎢이다.



위 그림과 같이 좌표평면 위에 제주도 지도를 놓았을 때, 제주도의 넓이를 구하면 타원의 넓이 $S=\pi ab$ 이므로

제주도의 넓이 $S \fallingdotseq 3.14 \times 36.5 \times 15.5 = 1776.455$(㎢)이다.

이는 추자도, 우도, 가파도 등 제주도의 부속도서의 면적을 합치면 제주도의 실제 면적 1845㎢과 근사적으로 가까울 것이다.

3)쌍곡선의 성질

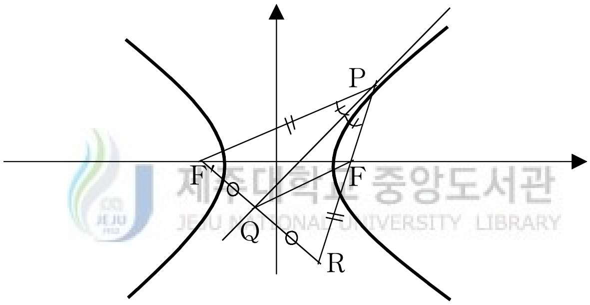
정리 3.5.7 두 점 F, F'을 초점으로 하는 쌍곡선 위의 임의의 점을 P라고 한다. 삼각형 FPF'의 꼭지각 $\angle FPF'$의 이등분선은 이 쌍곡선의 접선이다.

증명) 다음 그림에서 점 R은 $\overline{PF}=\overline{PR}$인 선분 PF' 위의 점이고, 점 $Q\,(\neq P)$는 $\angle FPF'$의 이등분선 위의 임의의 점이다.

다음 그림에서 알 수 있듯이

$$\overline{QF}-\overline{QF}'=\overline{QF}-\overline{QR}<\overline{RF}=\overline{PR}-\overline{PF}=\overline{PF}'-\overline{PF}$$

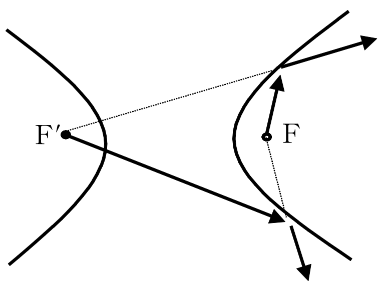
$$\therefore\quad \overline{QF}-\overline{QF}'<\overline{PF}'-\overline{PF}$$



즉, Q가 쌍곡선 위의 점이 아니다.

이것은 직선 PQ와 쌍곡선과의 공유점은 P 뿐임을 의미하고, 따라서 직선 PQ는 점 P에서 그은 쌍곡선의 접선이다.

정리3.5.7에 의해 **쌍곡선의 한 초점에서 나온 빛은 쌍곡선에 반사되어 다른 초점에서 나온 것처럼 나간다.**



6. 이차곡선의 응용

1)이차곡선의 실생활에의 활용

이러한 이차곡선(원뿔곡선)은 실생활과 많은 연관을 가지고 있다.

실제로 지상에서 위로 던진 물체는 포물선을 그리며 떨어지고, 인공 위성은 지구 주위를 타원으로 돌며, 너무 빠른 속도로 쏘아 올려진 인공 위성은 쌍곡선을 그리며 우주로 날아가 버린다.

고대 그리스 사람들은 원뿔곡선을 주로 '삼대 작도 문제'(주어진 원과 같은 넓이를 가지는 정사각형 작도하기, 부피가 주어진 정육면체의 두배인 정육면체를 작도하기, 주어진 임의의 각을 삼등분하기)를 풀기 위한 도구로 연구했다. 그런데 당시에는 원뿔곡선에서 실용적인 용도를 발견할 수 없었다. 사실 그리스 사람들은 실용적인 것에는 관심이 없었다. 지적 호기심을 채우기 위해 연구했을 뿐이다. 그러나 거의 2천년 뒤 갈릴레이는 투사체의 궤적을 포물선으로 설명했고, 케플러는 행성의 궤도를 타원으로 설명했다. 원뿔곡선에 대한 그리스 사람들의 연구가 없었다면, 갈릴레이와 케플러가 자신들의 연구결과를 어떻게 설명했을지 궁금해진다. 여기서는 포물선과 함께, 원, 타원, 쌍곡선이 이용되는 예를 알아본다

· 파라볼라 안테나는 왜 포물선인가.

포물선의 특징은 축과 평행인 직선이 포물선과 만나는 점에서 입사각과 반사각이 서로 같도록 꺾이면 초점을 지난다는 사실이다. 따라서 **포물선을 거울로 생각하면 축과 평행하게 들어온 모든 빛은 거울에 반사돼 초점에 모인다.**

축을 중심으로 포물선을 회전시켜 얻은 면을 포물면이라 하고, 반사면이 포물면으로 돼 있는 오목 거울을 포물면 거울이라고 한다. 포물면도 포물선의 특징을 가지므로, 포물면 거울의 축에 평행하게 들어온 모든 빛은 초점에 모인다.

파라볼라 안테나는 이 원리를 이용하여 분산되어 들어오는 전파를 초점에 모아

강력한 전파를 발생할 수 있게 하고, 의사들이 사용하는 집광경 또한 이 포물선의 원리를 이용한 예이고 아르키메데스Archimedes (287?-212 B.C.)가 이를 이용해 로마와의 전쟁에서 포물면 거울로 태양 광선을 집중시켜 가까이 접근한 배에 불을 질렀다는 이야기가 있고

아르키메데스가 이용한 원리와는 반대로, 포물면 거울의 초점에 광원을 놓으면 불빛은 포물면에 반사돼 축과 평행인 방향으로 직진한다. 이런 원리가 먼 곳에 있는 목적물을 비치기 위한 조명 가구인 서치라이트(탐조등)와 자동차의 헤드라이트에 이용된다.

헤드라이트의 반사경은 포물면 거울이다. 전구를 초점의 위치에 놓으면 빛은 축과 평행인 방향으로 먼 곳까지 비춘다. 이를 원등(상향등, high beam)이라고 한다. 그런데 평소에 자동차에서는 마주 오는 차에 눈부심을 주지 않기 위해서는 근등(하향등, low beam)을 이용한다. 이것은 단순히 전구를 초점으로부터 벗어난 위치로 옮기면 된다. 이렇게 하면 빛은 위와 아래로 향한다. 이때 위로 향하는 빛을 차단해 아래쪽으로 진행하는 빛만 보내므로 짧은 거리만을 비춘다.

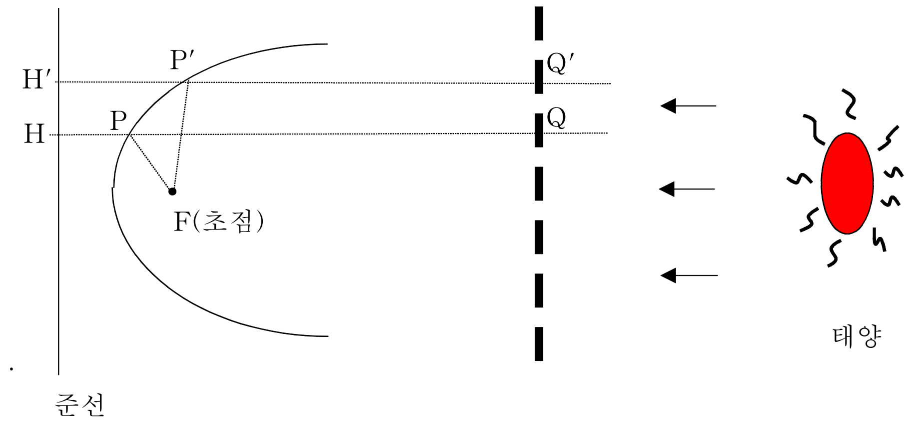
포물선의 준선에 수직으로 빛(소리 등도 마찬가지)이 들어오면 이 빛은 반사되어 초점으로 간다.

그래서 포물선에 비치는 태양광선은 모두 초점으로 모인다.(여기서 태양 빛은 아주 먼 곳에서 오니까 포물선의 준선에 수직인 상태로 들어온다고 보아도 무방하다.)

앞에서 포물선의 준선에 수직으로 들어오는 빛은 초점에 모인다는 사실을 알았다. 그런데 빛은 파장이 있어 초점에 이르는 시각이 같으면 빛의 세기가 배가 되는 반면 파장이 다르면 상쇄가 된다고 한다. 그렇다면 태양 빛의 예를 들어 태양에서 동시에 출발한 빛이 과연 초점에 이르는 시각이 같은가에 대해 알아보자.

그림과 같이 포물선의 준선에 수직인 한 지점(굵은 점선)을 가정하자.

충분히 멀리 있는 태양에서 출발한 빛이 이 지점에 이르는 시간은 동일하다고 생각해도 무방하다.



그리고 P′이나 P통과하는 두 빛은 각각 위의 굵은 점선을 통과한 이후에 각각 $\overline{P'Q'}+\overline{P'F}$와 $\overline{PQ}+\overline{PF}$만큼의 거리를 움직여서 초점에 도달한다.

그런데 $\overline{P'H'}=\overline{P'F}$이고 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로 두 빛이 움직인 거리는 각각 $\overline{P'Q'}+\overline{P'H'}(=\overline{Q'H'})$과 $\overline{PQ}+\overline{PH}(=\overline{QH})$가 되고 이 두 길이는 같음을 알 수 있다.

즉, 포물선 위의 두 점을 지나는 빛이 초점 F에 이르는 시각은 동일하다는 것이다.

이 사실을 좀 더 확대하면 같은 시각에 **태양(아주 멀리있는 지점을 의미한다)을 출발한 모든 빛은 초점 F에 같은 시각에 도달**한다는 것이다. 그래서 빛이 상쇄되지 않고 증폭되는 것이다.

· 포물선 안테나에 포함된 쌍곡선과 타원

파라볼라 안테나는 초점을 통해 전파를 송수신하는 소규모의 안테나다. 그런데 안테나의 포물면 거울이 커지면, 예를 들어 테두리의 지름이 64m에 달하는 미국 모하비 사막의 안테나와 같으면 초점에서 전파를 송수신하는 데 문제가 발생할 수 있다. 포물면이 커질수록 중심으로부터 초점까지 긴 봉을 세워야 하는 불편이 있다.

또 포물면에 가해지는 하중이 위치에 따라 고르게 분포하지 않을 수도 있다. 이런 요인은 거대한 포물면이 전파의 방향에 따라 회전할 때 매우 민감한 문제를

일으킨다. 그래서 큰 안테나에서는 구조적인 문제가 매우 중요하다. 이를 해결하기 위해 두 개의 반사기를 이용한다.

모하비 사막 안테나의 경우 거대한 반사기는 포물면이고 부반사기로는 쌍곡면을 이용한다. 쌍곡면은 쌍곡선을 축을 중심으로 회전시켜 얻은 곡면이다. 이 때 포물면의 초점과 쌍곡면의 한 초점을 일치시키고, 짧은 수신용 봉의 끝을 쌍곡면의 또 다른 초점에 위치시킨다. 그러면 포물면의 축과 평행하게 들어온 전파는 포물면에 반사돼 포물면의 초점(쌍곡선의 한 초점)을 향하다가 쌍곡면에서 다시 반사되고 수신용 봉의 끝(쌍곡면의 다른 초점)에 모인다. 이런 원리로 작동하는 안테나가 카스그랭 안테나(Cassegrain antenna)다. 부반사기로 쌍곡면이 아닌 타원면을 이용하기도 한다. 타원면은 타원을 축을 중심으로 회전시켜 얻은 곡면이다. 이런 안테나를 그레고리안 안테나(Gregorian antenna)라고 한다.

· 태양열 증류기

원을 지름을 중심으로 회전시키면 구면이 된다. 구면은 똑같은 부피를 둘러싸는 입체도형 중에서 겉넓이가 가장 작은 매우 효율적인 입체도형이다('지오데식 돔' 참조). 이런 구면을 활용한 매우 특이한 예가 있다. 그리스의 사이미(Symi) 섬에 있는 태양열 증류 장치는 반구면의 형태를 띠고 있다. 반구면의 온실 속에서 바닷물은 태양열을 받아 증발되고, 구면의 안쪽에서 응축된 다음에 구면을 따라 내려온다.

이렇게 생산된 물은 섬 주민 4천명에게 하루에 1인당 약 1갤런(약 3.8L)씩 제공된다. 복잡한 설비를 갖추지 않고도, 단순한 기하학적 도형만을 활용해서 맑은 물을 얻는 지혜가 돋보이는 장치다. 이제 주변에서 2차 곡선을 활용한 디자인과 구조를 갖춘 조형물이나 상품 등을 찾아보는 것은 어떨까.

· 런던의 성 바오로 대성당

런던의 성 바오로 대성당은 '속삭이는 회랑(whispering gallery)'이라는 신비한 장소로 유명하다. 돔 아래의 회랑(원형모양의 복도) 한쪽에서 속삭인 목소리는 건너편 회랑에서 더 잘 들린다. 어떤 이유로 이런 일이 가능할까?

성 바오로 대성당의 돔을 이루는 **타원형 천정의 신비한 현상**이 원인이다. **타원의 초점에 해당하는 곳에서 소리를 내면 이 소리는 사방으로 퍼져가지만 타원형 천정에 도달하면 반사된 소리는 모두 건너편 초점에 해당하는 위치에 다시 모이게 된다.** 그래서 타원의 한 초점에서 내는 소리는 건너편 초점에 아주 또렷이 들린다.

성 바오로 대성당은 지상에서 꼭대기까지 높이가 108m에 이르는 고딕양식으로 1710년에 완성되었다.

이를 설계한 크리스토퍼 르엔 경은 기하학과 건축학에 뛰어난 학자로, 이러한 신비한 현상이 나타나도록 계획적으로 대성당을 설계하였다고 한다. 이외에 **미국국회의사당의** National Statuary Hall도 같은 효과를 내는 것으로 알려져 있다.

· 타원과 케플러의 법칙

[케플러 제 1법칙 ; 타원 궤도의 법칙]

″ **지구는 태양 주위를 타원 궤도를 따라 공전**을 하고 있다 ″라는 법칙이다. 그 예전에는 행성은 완전한 원운동을 한다고 생각했는데 케플러가 화성의 운동을 몇 십 년 간 관찰한 결과 타원 궤도로 운동한다는 것이 밝혀졌다.

[케플러 제 2법칙 ; 면적 속도 일정의 법칙]

″ 단위 시간 동안 휩쓸고 지나간 면적은 항상 일정하다 ″ 라는 법칙이다. 좀 어렵게 느껴지겠지만 아주 단순한 내용이다.

태양에 가까울 때는 지구는 빨리 돌고 태양에서 멀 때는 지구는 느려지는 것을 설명한 법칙이다.

거리가 작을 때면(가까워지면) 속도가 빠르고 거리가 커지면(멀 때) 속도가 느려져야 면적속도(거리 × 속도)의 값이 일정하게 된다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 장에서는 이제까지 논의한 연구내용을 요약, 정리하고 이와 관련하여 앞으로 기하교육이 효율적이기 위한 방법에 대하여 제언하고자 한다.

1. 결론 및 요약

최근에는 기하의 위치가 타 영역에 비해 낮아지고 있으나 평면이나 공간에서의 기하학적 도형에 관한 기본적인 이해는 여전히 중요하며, 연역적 추론 방법은 다른 어떤 영역보다도 기하 영역에서 다루는 것이 효과적이다. 또 기하학적 개념은 수학의 다른 여러 분야의 개념과 밀접한 관련이 있어서 기하학적 개념에 대한 이해 없이는 그러한 개념을 이해하기가 어려운 실정이다. 한편, 대수문제는 주로 알고리즘에 의해 해결되는데 반해 기하문제는 그 해결방법이 다양하기 때문에 학생들로 하여금 창조적으로 사고하게 하고 스스로 해결하게 하는데 효과적일 수 있다.

현행 제7차 교육과정의 고등학교 수학Ⅱ교과서에서 전개된 내용과 현장의 실정을 분석해 보면 다음과 같은 문제점을 지적할 수 있을 것이다.

첫째, 현재 고등학교 현장의 실정은 구체적인 모델과 실세계의 공간에 대한 직관력이 결여된 대수적인 접근방법 위주이므로 너무 추상적인 해석기하 중심으로 교육이 진행되고 있다.

둘째, 이차곡선을 단순하게 자취적인 것으로만 정의함으로써 기하학적인 의미를 부여하는데 부족함이 있고, 이차곡선들이 갖는 성질에 대한 구체적인 설명(증명)이 부족하다.

셋째, 이차곡선이 원뿔을 한 평면으로 잘라서 생기는 단면이라는 구체적인 설명이 부족하고 이차곡선을 방정식으로만 접근함으로서 학생들이 흥미를 잃고 더욱

더 어려워하는 요인으로 작용할 수가 있다.

넷째, 이차곡선의 일반형에 관한 언급이 없음으로 인해 포물선, 쌍곡선, 타원의 방정식을 정형화된 것으로 오해할 수 있으며 왜 xy항을 포함하지 않는 이차식에 한정하여 다루었는지에 대한 설명이 없다.

마지막으로, 이차곡선의 구체적인 구조물 조작이 힘들고 이차곡선의 일반적인 성질들은 실생활에 적용되는 예가 한정되어 있어서 문제상황에 기초를 둔 탐구문제의 개발이 조금은 어렵다. 물론, 최근에는 컴퓨터의 대량적인 공급으로 학생들로 하여금 정확한 도형의 모양을 제공할 수는 있게는 됐으나, 일반적인 도형들의 성질을 이해하게 할 수는 없을 것이다.

본 논문에서는 이러한 문제점들을 해결하기에는 미약하나마 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 이차곡선이 원뿔의 절단면에서 탄생했다는 구체적 사실을 보이기 위해서 원뿔을 잘라낸 단면이 왜 이차곡선이 되는가를 해석적인 방법과 더불어 기하학적인 방법으로 접근하여 학생들의 이해를 도울 수가 있을 것이다.

둘째, 이차곡선을 만드는 방법을 이론과 더불어 여러 가지 방법(종이 접기, 실과 막대, 동심원, 직사각형을 이용하는 방법 등)으로 제시하고 실제 수업에 이용함으로서 학생들의 이차곡선의 관찰을 시각화시킬 수가 있을 것이다.

셋째, xy가 포함된 이차식일 경우에도 충분히 이차곡선을 유도해 낼 수 있고 이심율에 의해서도 이차곡선을 정의할 수 있다는 것을 보여줌으로서 학생들의 폭넓은 사고력을 높일 수 있을 것이다.

넷째, 원뿔곡선의 이론적 배경부터 우리 실생활에 응용되는 여러 가지 예를 제시함으로서 학생들이 조금이나마 흥미 있고 적극적으로 기하적인 표현을 쉽고 명확하게 구현할 수 있으며 기하문제능력이 신장될 수 있을 것이다.

2. 제언

학생들이 어려워하고 학교 환경의 미비로 실물과 같은 모델을 구현하기 어렵기 때문에 도형개념에 대해 상상에만 의존하여 잘못된 개념을 갖기 쉽다. 이러한 상황에서 기하교육의 개선방안 몇 가지를 제시해보면 다음과 같다.

첫째, 오랫동안 기하교육을 지배했던 유클리드 기하를 경시하는 태도보다는 문제점을 골라 현대수학에 끌어들이는 작업이 있어야 한다는 것이다. 그것은 유클리드 기하 자체에 문제가 있는 것이 아니라 지도하는 방법 스타일에 문제가 있다고 할 수 있을 것이다.

둘째, 컴퓨터와 소프트웨어, 구체적 조작물 등을 이용하여 시각화를 향상시켜 학습의 효과를 증진시켜야 할 것이다. 기하교육에서 멀티미디어와 구체적 조작물의 활용은 학습내용을 전체적으로 시각을 통해 파악하도록 도와주기 때문에 기하 개념을 지도하는데 좀 더 직관적인 방법이라 할 수 있다.

셋째, 기하교육에서 학생들에게 문제해결에 대한 보다 긍정적 태도를 갖도록 도와주어야 할 것이다. 기하 수업은 수나 상징적인 것보다는 다소 도형의 그림을 포함하는 시각적인 표현으로 주어진다. 또한 산술적인 것이나 대수에서 하나의 옳은 답이 요구되어지는 반면에 학생들은 증명이나 풀이 등을 통해 올바른 추론을 할 수 있고 교과서에 주어지고 이미 받아들여진 정리와 증명보다는 자신의 방법으로 문제 해결하는데 흥미를 가질 것이다. 기하수업의 목표 중 하나가 학생들이 기하문제를 해결하는데 유용한 전략에 친근해지도록 하는 것이다.

마지막으로, 수학에 있어서 기하영역의 가치를 학생들에게 부여하고 기하교육을 더욱 효과적으로 해 나갈 수 있도록 하기 위한 교재 개발 및 다양한 수업활동 등이 필요하며 특히 학생들의 문제 해결력이 더욱 신장될 수 있도록 교사들의 끊임없는 노력이 계속되어야 할 것이다.

교사가 깨어나지 않으면 교육의 발전은 기대할 수 없으며 국가 사회의 발전도 기대할 수 없을 것이다. 모든 교사는 더욱 더 나은 수업을 위하여 부단한 노력이 경주되어야 할 것이다.

<참고문헌>

구광조 외(1992), “수학교육과정과 평가의 새로운 방향”, 경문사

전평국・이석희(2001), “문제 설정 방법이 문제 해결력과 창의력에 미치는 효과 분석”, 수학교육연구총서

노정선(1983), “일반이차곡선 방정식 지도에 관한 연구”, 석사학위논문, 단국대학교 교육대학원.

황학근(1984), “도형에 관한 해석적인 지도방안”, 석사학위논문, 한양대학교 교육대학원.

류구옥(2000), “컴퓨터를 이용한 이차곡선의 지도에 관한 연구”, 석사학위 논문, 연세대학교 교육대학원.

남호영 외(2001), “원뿔곡선 지도방안”, 제3회 수학사랑 Math Festival 발표자료.

고형석(2001), “이차곡선의 기하학적 이해”, 석사학위논문, 제주대학교 교육대학원.

김종명(2002), “현실적 문제상황에 기초한 고등학교 기하학습 내용의 수학화 방안, 청람수학교육, 한국교원대학교 수학교육연구소.

이승우 외(1997), “선형변환을 이용한 이차곡선에 관한 연구”, 한국수학사학회지.

남호영 외(2001), “원뿔에서 태어난 이차곡선”, 수학사랑.

남호영 외(2002), “교실 밖 세상을 풀어버린 수학”, 수학사랑.

박한식 외(1996), “고등학교 수학Ⅱ”, 지학사(주).

우정호 외(2003), “고등학교 수학Ⅱ”, 대한교과서(주).

우정호 외(2003), “고등학교 수학Ⅱ 교사용 지도서”, 대한교과서(주).

최용준 외(2003), “고등학교 수학Ⅱ”, (주)천재교육.

<abstract>

A Study on a Cone for Enhancing Problem-solving Abilities
-Centering around Quadratic Curves in High School Mathematics-

Oh, Cheol

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Jeju, Korea

Supervised by professor Hyun, Jin-oh

The aim of teaching geometry in high school should be improving logical reasoning ability as well as students' geometric insight and dealing with the mathematical experience on the plane and space. However, at present we put too much emphasis on logical proofs of Euclidian geometry or formal aspects rather than learners' research abilities, which is the main reason causing the learners to think geometry quite difficult.

In addition, in spite of its importance in high school math, a quadratic curve is considered to be extremely boring, difficult, and troublesome. As a result, students are likely to handle only stereotyped questions and have limited knowledge of geometrical figures.

In teaching quadratic curves to solve problems like these, heighten the desire for learning, and broaden learners' thinking, it is very important for them to participate in the study on geometry eagerly and actively, by giving exemplary explanations and researches on the historical background of a quadratic curve and its application of natural science.

Further, by developing questions concerned with natural phenomena, the study on quadratic curves will surely help students realize why they should study the curves and in what direction they should learn it and so enhance their problem-solving abilities.

---

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirement for the degree of Master of Education in August, 2004.