

碩士學位論文

낮은 Pr수를 갖는 순수물질에서의
자연대류에 관한 수치해석

濟州大學校 大學院

機械工學科



1996年 12月

낮은 Pr수를 갖는 순수물질에서의 자연대류에 관한 수치해석

指導教授 玄 明 澤

李 東 原

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함

1996年 12月



李東原의 工學 碩士學位 論文을 認准함

審査委員長
委 員
委 員

권 기 린

이 명 천

김민준



濟州大學校 大學院

1996年 12月

**A Numerical Study on Natural Convection
in a Pure Substance with
a Low Prandtl Number**

Dong-Won Lee

(Supervised by professor Myung-Taek Hyun)



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING

DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING
GRADUATE SCHOOL
CHEJU NATIONAL UNIVERSITY

1996. 12.

목 차

LIST OF FIGURES	ii
LIST OF TABLES	iv
NOMENCLATURE	v
SUMMARY	vii
I. 서 론	1
II. 이 론	6
1. 기본방정식의 유도	6
2. 초기조건과 경계조건	8
3. 수치해석방법	9
3.1 기본방정식의 이산화	9
3.2 계산방법	10
III. 결과해석 및 고찰	15
1. 타당성의 고찰	15
2. Ra수에 따른 영향	17
3. Pr수에 따른 영향	18
4. 평균 Nu수에 대한 관계식	19
IV. 결 론	37
V. 참고문헌	38
부록 A 기본방정식의 이산화	41
부록 B 검사면에서의 총유속	48
부록 C 계산과정의 계통도	51

LIST OF FIGURES

Fig. 1	Physical model of the present study -----	13
Fig. 2	Schematic of the system with grid allocation 55×55 -----	14
Fig. 3	Comparison of power-law(top diagram) and central-difference (bottom diagram) results for $Pr=0.02$ and $Ra=1.9 \times 10^5$ -----	21
Fig. 4	Comparison of power-Law(top diagram) and central-difference (bottom diagram) results for $Pr=0.02$ and $Ra=2.2 \times 10^5$ -----	22
Fig. 5	A time series of streamline distributions for $Pr=0.02$, $Ra=2.2 \times 10^5$ and $t=3.5 \times 10^{-2} \sim 3.546 \times 10^{-2}$ (top diagrams ; power law scheme, bottom diagrams ; central difference scheme) -----	23
Fig. 6	Transient Nusselt number for $Ra=1.75 \times 10^5$ at $Pr=0.02$ -----	25
Fig. 7	Transient Nusselt number for $Ra=1.9 \times 10^5$ at $Pr=0.02$ -----	25
Fig. 8	Transient Nusselt number for $Ra=2.2 \times 10^5$ at $Pr=0.02$ -----	26
Fig. 9	Transient Nusselt number for $Ra=2.4 \times 10^5$ at $Pr=0.02$ -----	26
Fig. 10	Transient Nusselt number for $Ra=1.9 \times 10^5$ at $Pr=0.023$ -----	27
Fig. 11	Transient Nusselt number for $Ra=2.1 \times 10^5$ at $Pr=0.023$ -----	27
Fig. 12	A time series of streamline(top diagrams) and isothermal (bottom diagrams) distributions for $Pr=0.02$ and $Ra=1.9 \times 10^5$ -----	29
Fig. 13	A time series of streamline(top diagrams) and isothermal (bottom diagrams) distributions for $Pr=0.02$ and $Ra=2.4 \times 10^5$ -----	30
Fig. 14	Transient Nusselt number for $Ra=2.0 \times 10^5$ at $Pr=0.015$ -----	31

Fig. 15	Transient Nusselt number for $Ra=2.0 \times 10^5$ at $Pr=0.018$	-----	31
Fig. 16	Transient Nusselt number for $Ra=2.0 \times 10^5$ at $Pr=0.023$	-----	32
Fig. 17	Transient Nusselt number for $Ra=2.0 \times 10^5$ at $Pr=0.025$	-----	32
Fig. 18	A time series of streamline(top diagrams) and isothermal (bottom diagrams) distributions for $Pr=0.018$ and $Ra=2.0 \times 10^5$	-----	33
Fig. 19	A time series of streamline(top diagrams) and isothermal (bottom diagrams) distributions for $Pr=0.025$ and $Ra=2.0 \times 10^5$	-----	34
Fig. 20	Average Nusselt number with a Prandtl number at $Ra=2.0 \times 10^5$	--	35
Fig. 21	Average Nusselt number correlations	-----	36
Fig. A1	Illustration of main and staggered control volume	-----	47
Fig. B1	Total flux of j between two grid point	-----	49



LIST OF TABLES

Table 1	Critical Rayleigh numbers and Prandtl numbers for A=1	-----	3
Table 2	Numerical conditions in the present study	-----	20
Table 3	Comparison of average Nusselt number with other result	----	24
Table 4	Average Nusselt number and frequency with Rayleigh number for Pr=0.02	-----	28
Table 5	Average Nusselt number and frequency with Rayleigh number for Pr=0.023	-----	28
Table A1	Define of ϕ , Γ_ϕ and S_ϕ of the governing equation	-----	41



NOMENCLATURE

A	: aspect ratio = H/L
b	: source term
F	: flow rate through a control volume
f	: dimensionless frequency = $1/\tau$
Gr	: Grashof number = $g\beta\Delta TH^3/\nu^2$
g	: acceleration due to gravity, $[m/s^2]$
H	: height of the enclosure, [m]
h	: heat transfer coefficient, $[W/m^2k]$
j	: total flux
k	: conductivity = $W/m \cdot K$
Nu	: Nusselt number = hL/k
P	: dimensionless pressure
Pr	: Prandtl number = ν/α
Ra	: Rayleigh number = $g\beta\Delta TH^3/\nu\alpha$
S_ϕ	: source term
T	: dimensionless temperature
T_c'	: temperature of cold wall, [K]
T_h'	: temperature of hot wall, [K]
$\Delta T'$: temperature difference = $(T_h' - T_c')$, [K]
t	: dimensionless time
Δt	: dimensionless time step

u, v : velocity component in x and y direction, [m/s]

x, y : coordinate axis in the physical domain

Greek Symbols

Γ_ϕ : diffusion coefficient

α : thermal diffusivity, [m²/s]

β : thermal expansion coefficient, [°C⁻¹]

ν : kinematic viscosity, [m²/s]

ρ : density, [kg/m³]

τ : dimensionless period

ϕ : general dependent variable

ψ : stream function

Superscripts

*

: quantity based on the guessed pressure P^*

'

: dimensional value

"

: correct value

Subscripts

ave

: average value

crit

: critical value

E,W,N,S,P

: grid point

e,w,n,s

: control volume face

max

: maximum value

min

: minimum value

nb

: neighbour grid



SUMMARY

The transient natural convection driven by a thermal buoyance force is investigated in a square cavity. The cavity is filled the pure substances with a low-Prandtl-number and the vertical walls are constantly maintained different temperatures, while the horizontal boundaries are adiabatic. A control volume approach with a central difference scheme is used to formulate the finite difference equations. The results are presented transient Nusselt number, stream function and temperature distribution for the ranges of $Ra=1.75 \times 10^5 \sim 2.4 \times 10^5$ and $Pr=0.015 \sim 0.025$. It was found that the flow pattern and heat transfer exhibit time-periodic oscillation at above conditions. The average Nusselt number, the amplitude and the frequency of oscillation increase as the Rayleigh number is increased. The increment of Prandtl number makes the amplitude and the frequency of oscillations reduced, and average Nusselt number increased. A correlation is obtained to average Nusselt number can be estimated using the Prandtl and Rayleigh numbers.

I. 서론

자연대류(Natural Convection)는 중력장과 같은 체력장(Body Force Field)에서 유체의 밀도차에 의한 부력 또는 표면장력의 효과로 일어나는 유동현상을 말한다. 일반적으로 부력의 효과로 일어나는 자연대류를 Rayleigh 혹은 Rayleigh-Benard대류라 하고 표면장력의 효과로 일어나는 자연대류를 Marangoni대류라 한다.

상변화과정에서 발생하는 자연대류는 상변화 계면의 거동, 상변화 물질내의 밀도변화 그리고 상변화 과정중의 열전달 등과 밀접한 관계를 갖는다. 특히, 물질의 응고과정(Solidification Process) 및 용해과정(Melting Process)에서 액상내의 유동현상은 고체의 결정성장, 불순물의 분포 등과 밀접한 관계가 있으며, 물질의 구조와 균질성에 매우 큰 영향을 끼치게 된다(Viskanta, 1988). 유동현상에 관한 연구는 산업의 첨단화로 고순도 재료 및 신소재 개발이 확대됨에 따라 활발히 진행되고 있다.

상변화에 관한 연구는 1860년대 초 Neumann(Carslaw와 Jaeger, 1959)이 반무한, 일차원 순수 열전달의 경우에 대하여 최초로 해석적인 해를 구하였으나 상변화 물질에 대한 잠열의 이동 및 액상내의 자연대류 효과는 전혀 고려하지 않았다. 이후 Rathjen과 Jiji(1971)는 잠열을 이동 열원으로 처리하여 해석하고자 하였고, Shamsunder와 Sparrow(1975)는 엔탈피 개념을 도입하여 해석적 방법으로 상변화 계면의 위치를 구하고자 하였다. 상변화과정의 실험을 통하여 액상내의 자연대류가 열전달에 매우 중요한 역할을 한다는 결과들이 보고됨에 따라 상변화과정의 해석에 있어 자연대류에 대한 고려는 중요시 되었으며, Hsu

등(1981)은 상변화계면의 변화에 따르는 이동경계를 비직교상의 검사체적군을 형성하여 별도의 좌표변환식을 유도하여 수치해석 하였다. 그리고 Ho와 Viskanta(1984)는 사각용기내에서의 응고과정에 있어서 응고계면의 시간에 따른 영향과 열전달 특성을 조사하여 액상내의 유동형태 및 열전달 특성들이 시간주기를 가지는 유동현상이 있음을 밝혔다. 그후 이와 같은 현상이 일정한 조건내에서 광범위하게 일어나고 있다고 보고되었고, 특히 낮은 Pr수를 갖는 순수물질과 복합물질에서 용점 부근의 온도경계조건에서 빈번히 발생하고 있으며 물질의 액상에서 밀도구배를 형성케 하여 재료의 비균질성을 일으키는 원인이 되고 있음이 밝혀졌다. 이와 같이 속도와 온도분포가 시간주기를 가지며 변화하는 유동현상을 “진동대류(Oscillatory Convection)”라 한다.

진동대류현상은 유동형태 및 열전달특성이 규칙적·불규칙적으로 시간 주기를 가지며 일어나는 유동현상이며 낮은 Pr수를 갖는 물질과 상변화과정에서의 액상내 유동에서 종종 발견된다. 이의 발생 메카니즘은 열확산이 운동량확산에 비해 상대적으로 큼($Pr \ll 1$)으로써 일어나는 순간적인 과열(Superheating)과 축열의 반복, 그리고 상변화과정에서 잠열의 방열과 축열의 반복으로 인해 속도와 온도가 시간주기를 갖고 변화하는 유동현상으로 사료되고 있다. 진동대류의 특성은 Ra수, 물질의 특성을 나타내는 Pr수 그리고 기하학적 형상에 매우 크게 의존하며, 정상상태에 다다른 시점에서 유동이 진동대류로 발생하는 임계값(기하학적 형상에 따르는 Ra수, Pr수 등)을 구하기 위해 많은 연구가 진행되고 있다. Table 1은 각각의 조건에 따른 임계값들을 나타내었다(Ball과 Bergman, 1993). 일반적으로 진동대류가 발생하는 임계조건은 Pr수가 증가할수록 임계 Ra수 또한 증가하며, Ra수가 증가할수록 임계 Pr수가 감소하게 된다. 종횡비의 변화와 같은 기하학적 형상이 다른 조건하에서도 같은 경향을 보이고 있다.

Table 1 Critical Rayleigh numbers and Prandtl numbers for A=1

Pr	0.005	0.010	0.015	0.020	0.023	0.025	0.030	0.035
Ra _{crit}	9292	31535	46618	56153	66851	77581	277341	348405
Ra	100000		120000		140000		220000	
Pr _{crit}	0.02596		0.02570		0.02503		0.02465	

초기 진동대류는 상변화과정 해석중 액상내의 유동현상으로 처음 발견된 후 관심을 끌다가 액체금속과 같은 낮은 Pr수를 갖는 물질의 자연대류에서도 같은 유동현상이 보고되면서 응고 및 용해과정의 해석과 액체금속의 유동현상 연구 등에서 매우 중요시되었다.

진동대류에 대한 실험적 연구로는 Hart 등(1983)과 Kamotani와 Sahraoui(1990)는 응고 및 용해과정해석에서 PCM(Phase Change Material)으로 젤륨과 수은을 사용하여 열전달 특성, 시간에 따른 상변화계면 거동 그리고 진동현상이 일어나는 변수 등의 임계값들을 조사하였다. 또한, Bénard 등(1985)은 상변화 물질인 N-Octadecane를 사용하여 용해과정을 실험적 연구와 수치해석을 병행하여 상당히 근사한 결과를 얻었으며, Koseff와 Street(1984a, 1984b)는 제어의 한 방법으로 수직경계의 상부면을 진동경계조건을 주어 실험을 하였으며 유동을 가시화시켰고, 또한 LDA(Laser-Doppler Anemometer)를 이용하여 속도를 측정하였다. 그러나 실험적 연구는 경계조건을 만족시키기 위해 고온(융점의 온도)의 취급과 정확한 속도 및 온도 계측의 어려움, 그리고 실험물질 자체가 불투명체이기 때문에 유동관찰을 위한 가시화의 어려움등 많은 난점들을 가지고 있으므로 광범위한 연구가 이루어지지 못하고 있다.

수치해석을 통한 연구는 다차원, 열역학적 성질변화 그리고 자연대류의 영향

을 고려해야 하고 유동 현상이 시간에 크게 의존할 뿐만 아니라 유동이 복잡하게 일어나 수치해를 얻기 위해 많은 시간이 필요하며 해석방법에 따라 그 해가 변하게 되는 등 많은 난점들을 가지고 있다. 수치해석 연구로는 Crochet 등 (1983)이 수평밀폐사각용기내에서 겔룸의 결정성장에 관하여 진동적 유동과 정상적 유동에 대하여 Ra수에 따른 영향을 조사하였다. 최근에 들어서 Mohamad와 Viskanta (1991a, 1991b)는 Pr수가 0.001~0.01에서의 임계 Gr수를 구하고 Pr수가 감소함에 따라 무차원 시간에 대한 진동영역이 감소함을 밝혔고, Pulicani 등 (1990)과 Ball과 Bergman(1993)은 Chebyshev Collocation 수치해법을 사용하여 종횡비, Pr수 그리고 Ra수에 따른 진동현상의 영향 및 진동대류에 대한 임계 Ra수를 계산하여 실험결과와 매우 근사한 결과를 얻었다. 그리고 종횡비가 큰 경우에 대하여 복합물질에서 다중셀(Multi-Cell)의 유동형태와 단일주기, 이중주기 그리고 다중주기를 가지는 진동현상을 관찰되었다(Ben Hadid와 Roux, 1992). 진동대류의 특성은 기하학적 형상에 매우 크게 의존함에 따라 사각형의 모델(Bénard, 1995등)뿐만 아니라 Kamotani등(1984)은 원통형의 모델을 그리고 Babosa와 Seatijan(1994) 등은 속빈 원통형을 모델로 하여 진동대류에 관한 연구를 하였다. 또한 Zhou와 Zebib(1992)는 Enthalpy-Method를 이용하여 응고계면의 조건에 따른 영향을 조사하였고 Kamotani 등(1984)은 기울어진 사각형을 모델로 하여 진동현상을 제어하고자 하였다.

전술한 바와 같이 진동대류에 관한 연구는 초기 상변화(용해, 응고)과정 중에서 발견되어 응고모델과 용해모델에서 액상내의 진동대류현상에 관한 많은 연구가 되고 있다. 그러나 열전달 특성, 유동형태 그리고 고상과 액상의 경계면의 시간에 대한 거동에 관심이 집중된 반면, 액상에서만 유동현상 및 열전달 특성에 관한 고찰이 매우 부족하다. 따라서 본 연구에서는 수직경계면이 일정한

온도차로 유지되고 수평경계면이 단열된 밀폐용기내의 낮은 Pr수를 갖는 순수물질을 모델로 하여 용점부근 온도 경계조건을 갖는 액상내의 진동대류현상에 대하여 수치해석을 하고자 한다. 또한 Ra수, Pr수에 따른 유동형태, 온도분포 그리고 시간에 따른 Nu수 등의 영향을 조사하고자 하며 이산화방법인 중앙차분도식(Central-Difference Scheme)과 멱승도식(Power-Law Scheme)의 차이점을 조사하고자 한다.



II. 이 론

본 연구에서는 종횡비 $A=1$ 인 직각밀폐용기내에서 낮은 Pr수를 갖는 순수물질의 자연대류에 대하여 수치해석하였다. 해석하고자 하는 계의 기하학적 형상 및 경계조건은 Fig. 1과 같으며, 두 수평벽면은 단열이고 수직벽면은 고온벽을 왼쪽, 저온벽을 오른쪽으로 하여 유동이 시계방향으로 일어나도록 하였다.

1. 기본방정식의 유도

열전달 및 유체 유동을 수치해석하기 위한 기본방정식을 수립하는 방법으로는 유동함수-와도방법(Stream Function-Vorticity Method)과 원시변수방법(Primitive Variable Method)의 두가지로 분류된다. 유동함수-와도방법은 원시변수 방법과 달리 원시변수에 유동함수와 와도항을 도입함으로써 압력항이 소거되고 3개의 방정식으로 줄어들며 계산과정에서 밀도와 기타 물성치의 계산이 필요가 없게 되므로 계산시간이 절약되는 장점을 가지고 있어서 초기의 연구에서는 유동함수-와도방법을 많이 적용하여 수치해석 하였다. 그러나 3차원 문제로의 확장이 어렵고 경계면에서의 와도값을 규정하기가 어려워 발산할 수 있다는 단점을 가지고 있으므로 본 연구에서는 원시변수방법을 사용하였다. 원시변수방법은 많은 변수와 수렴해를 얻기 위한 반복계산, 그리고 압력항이 속도항과 서로 연관되어 있기 때문에 이에 대한 보정 등을 위해 많은 계산시간이 필요하게 된다. 그러나 상변화과정과 같은 이동경계조건이 포함되어 있거나 유동이 시간에 의존하는 문제에서

정확한 해를 구할 수 있기 때문에 이 방법을 사용하였다(Patankar, 1980).

밀폐용기에서의 낮은 Pr수를 갖는 순수물질에 대한 자연대류를 해석하기 위한 실질적인 물리적 현상을 기술하는 일반적인 기본방정식을 단순화시키기 위하여 액상이 비압축성, 뉴우튼 유체(Newtonian Fluid)이고 점성소산이 무시되며, 온도차에 의한 밀도변화만을 고려한 Boussinesq의 근사를 적용시키면 2차원 비정상 연속방정식, 운동방정식 및 에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho u') + \frac{\partial}{\partial y'}(\rho v') = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x'} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y'} + \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) + g[\beta(T - T_0')] \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u' \frac{\partial T}{\partial x'} + v' \frac{\partial T}{\partial y'} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \right) \quad (3)$$

무차원화된 방정식은 해석의 일반성을 부여하고 시스템을 지배하는 파라미터의 영향을 고찰할 수 있는 장점을 가지고 있어 기본방정식을 다음과 같이 무차원량을 정의하고 무차원하였다.

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{H}, & y &= \frac{y'}{H}, & u &= \frac{H}{\alpha} u', & v &= \frac{h}{\alpha} u', \\ t &= \frac{\alpha}{H^2} t', & P &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{H}{\alpha} \right)^2 P', & T &= \frac{T - T_0'}{\Delta T} \end{aligned} \quad (4)$$

위에서 정의된 무차원 매개변수를 식(1)~(3)에 대입하여 정리하면 식(5)~(7)과

같은 무차원 기본방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \text{Ra} \cdot \text{Pr} \cdot T \quad (6-2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7)$$

이들 기본방정식으로부터 본 시스템의 중요한 무차원 변수는 Pr수와 Ra수임을 알 수 있다.

2. 초기조건과 경계조건

본 연구에서의 초기조건은 해석 영역 내부의 모든 속도는 0이며 온도의 경우 전도조건을 적용 x-축을 따라 선형적으로 분포되어 있다고 가정하였다. 경계조건은 직각 밀폐용기의 수평 경계면은 상·하 단열이며 수직 경계면은 일정한 온도차가 유지되는 등온으로 하였고, 각 벽면에서 점착조건(No-Slip Condition)을 적용한다. 따라서 무차원화된 초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

초기조건

$$u(0, x, y) = v(0, x, y) = 0, \quad T(0, x, y) = 1-x \quad (8)$$

경계조건

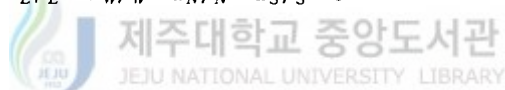
$$\begin{aligned}
u(t, 0, y) &= u(t, 1, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, 1) = 0 \\
v(t, 0, y) &= v(t, 1, y) = v(t, x, 0) = v(t, x, 1) = 0 \\
T(t, 0, y) &= 1, \quad T(t, 1, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0,1} = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

3. 수치해석 방법

3.1 기본방정식의 이산화(Discretization)

기본방정식을 수치해석하기 위해서는 독립변수의 미분항에 대하여 대수방정식 형태로 변환하여야 하며, 변환된 방정식을 이산화방정식이라 한다. 이산화방정식은 격자점 집합에서 독립변수들의 대수적인 관계로 구성되고, 이는 미분형의 방정식과 동일한 물리적 상황을 나타낸다. 기본방정식에 대한 구체적인 이산화과정은 부록 A에 나타내었으며 최종적인 이산화 방정식은 다음과 같다.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \tag{10}$$



여기서 나타난 각 계수들은 이산화 방법에 따라 다르며, 본 해석에서는 중앙차분도식과 먹승도식을 적용하여 다음과 같이 각 계수들을 구하고 수치해석하였다.

중앙차분도식

$$\begin{aligned}
a_E &= D_e(1 - 0.5|Pe|_e) + [-F_e, 0] \\
a_W &= D_w(1 - 0.5|Pe|_w) + [-F_w, 0] \\
a_N &= D_n(1 - 0.5|Pe|_n) + [-F_n, 0]
\end{aligned} \tag{11}$$

$$a_s = D_s(1 - 0.5|Pe|_s) + [-F_s, 0]$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t}, \quad b = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 \phi_p^0$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y$$

먹송도식

$$a_E = D_e(1 - 0.1|Pe|_e)^5 + [-F_e, 0]$$

$$a_W = D_w(1 - 0.1|Pe|_w)^5 + [-F_w, 0]$$

$$a_N = D_n(1 - 0.1|Pe|_n)^5 + [-F_n, 0]$$

$$a_s = D_s(1 - 0.1|Pe|_s)^5 + [-F_s, 0]$$

(12)

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t}, \quad b = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 \phi_p^0,$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y$$

이때 식(11)과 (12)에서 표시된 양들은 식 (13)에서와 같고 【 】의 표기는 괄호 안의 값들중 최고값을 의미한다

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}, \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n}, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s}$$

(13)

$$(Pe)_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad (Pe)_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad (Pe)_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad (Pe)_e = \frac{F_e}{D_e}$$

3.2 계산방법

일반적인 유동장의 해석은 기본방정식에서 알 수 있듯이 압력항과 속도항이 밀접한 관계를 가져 직접적인 계산으로는 정확한 해를 구하기가 어렵다. 따라

서 본 해석에서는 압력장을 예측하여 속도장을 계산하고 계산된 해를 보정과 수렴판정을 통해 해를 수렴시키는 과정을 반복계산하면서 해의 정확성을 기할 수 있는 알고리즘(Algorithm)으로 Patankar(1980)에 의해 개발된 SIMPLEX 알고리즘에 따라 모든 계산을 수행하였다. 구체적인 계산과정은 다음과 같으며 계통도(Flow Chart)는 부록 C에 나타내었다.

- (1) 압력장 P^* 를 가정하고 계산을 시작한다.
- (2) 식(A12)를 사용하여 속도장 u^* , v^* 를 계산한다.
- (3) 식(A17)를 사용하여 압력 보정값 P^* 를 구한다.
- (4) 식(A13)에서 압력장 P 를 구한다.
- (5) 식(A12)를 이용하여 속도장 u , v 를 구한다.
- (6) 과정(5)에서 구한 속도장을 이용하여 에너지 방정식을 계산한다.
- (7) 과정(5)에서 구한 P 값을 P^* 로 하여 과정(2)으로 되돌아가 수렴될 때까지 반복 계산한다.
- (8) 시간을 증가시켜 최종시간에 이를 때까지 (2)~(7)의 과정을 반복한다.



앞에서 구한 차분화방정식은 비선형을 띠고 있어 반복계산을 통해 해를 수렴시켜야 한다. 반복계산 방법으로는 Gauss-Seidel 점순법(Point-By-Point Method), 선순법(Line-By-Line), SIP(Strongly-Implicit Procedure) 그리고 ADI(Alternating-Direction Implicit) 등이 있다. 본 해석에서는 TDMA(Tri-Diagonal Matrix Algorithm)와, 수렴이 빠르며 경계조건의 영향이 해석영역 내부로 전달되는 속도가 빠른 선순법을 사용하였다. 계산과정에서 안정된 수렴을 위해 하향이완계수(Underrelaxation Factor)를 이용하였는데 속도량에 대해서만 0.5~0.7를 사용

하였다. 해석영역의 격자망(Grid)은 55×55 로 하였고 경계면에서의 복잡한 유동 현상을 해석하기 위해 Fig. 2와 같이 경계면으로 접근할수록 조밀하게 구성하였다. 유동현상은 시간에 크게 의존하므로 무차원시간증분 $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ 로 매우 작은 증분을 갖도록 했으며 안정된 진동현상을 관찰하기 위해 무차원 시간 $t = 0.035 \sim 0.1$ 까지 계산하였고, 식(A18)를 사용하여 b의 값이 5.0×10^6 에 이르렀을 때를 수렴되었다고 가정하였다. 각 시간스텝마다 수렴이 되기까지는 25~400회의 반복계산이 필요하였다.



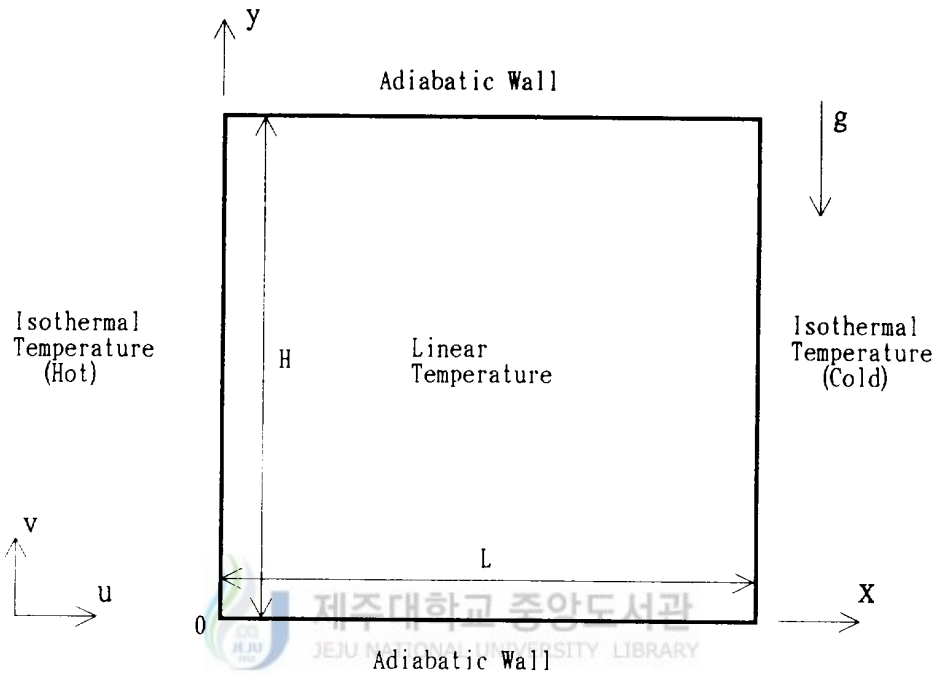


Fig. 1 Physical model of the present study

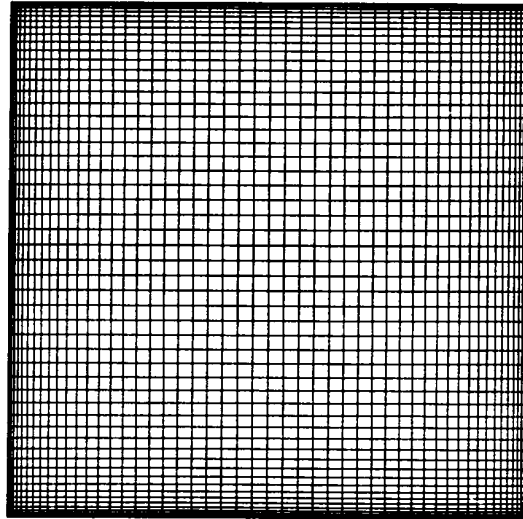


Fig. 2 Schematic of the system with grid allocation 55×55

Ⅲ. 결과 및 고찰

본 연구는 $A=1.0$ 인 직각밀폐용기내에 낮은 Pr수의 순수물질이 들어 있을 때 수직양단의 온도차에 의한 자연대류 현상에 대하여 조사하였다. 수치해석범위는 $A=1.0$, $Pr=0.015\sim 0.025$, $Ra=1.75\times 10^5\sim 2.3\times 10^5$ 이며 각각의 조건은 Table 2에 제시되어 있다. 해석 조건에서 Ra수와 Pr수에 따른 열전달 특성과 유동형태의 영향을 조사하였다. 또한 수치해석기법상의 영향을 조사하기 위하여 $Pr=0.02$ 일 때 $Ra=1.9\times 10^5\sim 2.2\times 10^5$ 의 경우에 대하여 중앙차분도식과 맥승도식을 이용하여 수치해석하여 그 결과를 비교하였다. 본 연구에서는 Intel Pentium 90MHz의 CPU를 사용하여 수치해석하였고, 각 경우에서 안정된 진동대류현상이 관찰되기까지 200~450시간의 CPU시간이 필요하였다.

1. 타당성 고찰




수치해석은 일반적으로 해석 기법과 해석 조건에 따라 해의 정확성이 달라진다. 일반적인 열전달 문제의 대류현상을 수치해석하는 기법으로는 맥승도식이 해의 정확성 및 수렴성이 양호하여 많이 사용되고 있다. 반면 맥승도식에 의한 수치해석 방법은 진동대류에 대한 해석에서는 많은 단점과 해의 부적확성이 나타난다고 보고(Zhou와 Zebib, 1992)됨에 따라 본 연구에서는 중앙차분도식과 맥승도식을 이용하여 $Pr=0.02$, $Ra=1.9\times 10^5\sim 2.2\times 10^5$ 인 조건에 대하여 수치해석하였고 그 결과를 기존의 연구(Mohamad와 Viskanta, 1993)와 비교하였다.

Fig. 3과 4는 $Pr=0.02$ 이고 $Ra=1.9\times 10^5$ 와 2.2×10^5 일 때의 각각의 수치해석기

법으로 구한 시간에 따른 Nu수의 분포를 도시한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 중앙차분도식을 사용한 경우(Fig. 3(b)와 4(b)) 진동현상이 보인 반면 먹승도식인 경우(Fig. 3(a)와 4(a)) Nu수가 곧 수렴되어 진동현상이 전혀 관찰되지 않고 있다. Fig. 5는 $Pr=0.02$, $Ra=2.2 \times 10^5$ 일 때 먹승도식과 중앙차분도식에 의해 구한 결과의 유동함수를 나타낸 것이다. 유동함수는 최대값과 최소값 사이에서 50개의 동일한 값을 제시한 것으로 $t=3.5 \times 10^{-2}$ 에서 $t=3.546 \times 10^{-2}$ 까지 1주기 동안의 유동형태의 변화를 도시하였다. 그림에서처럼 먹승도식에 의한 유동함수 분포는 아무런 변화가 없지만 중앙차분도식에 의한 결과의 경우 일정한 주기를 갖는 진동유동 현상을 관찰할 수 있다. 여기서 사용된 해석조건은 진동대류가 일어나는 범위(Ball과 Bergman, 1993)로 알려져 있으므로 진동대류현상을 해석하기 위한 수치해석 기법으로는 중앙차분도식이 적절함을 알 수 있고 이후 모든 해석은 중앙차분도식을 사용하였다.

본 해석에서 수치해석의 타당도를 검토하기 위하여 평균 Nu수를 아래와 같이 구하였다.



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$Nu_{ave} = - \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \quad (14)$$

위의 식을 이용하여 $Pr=0.02$ 일 때의 평균 Nu수를 구하고 기존의 연구(Mohamad와 Viskanta, 1993) 결과와 비교하여 Table 3에 제시하였다. Table 3에서 알 수 있듯이 본 해석에서의 결과와 실험식과의 차이는 5% 이내로 일치하고 있어서 본 연구의 수치해석 방법이 타당함을 알 수 있다.

2. Ra수에 따른 영향

Ra수의 영향을 조사하기 위해 Table 2에서 보듯이 $Pr=0.02$ 일 때 $Ra=1.75 \times 10^5 \sim 2.4 \times 10^5$, 그리고 $Pr=0.023$ 일 때 $Ra=1.75 \times 10^5 \sim 2.3 \times 10^5$ 의 범위에 대해 수치해석하였다. $Pr=0.02$ 일 때 $Ra=1.75 \times 10^5 \sim 2.4 \times 10^5$ 에서의 시간에 따른 Nu수의 변화를 Figs. 6~9에 제시하였다. 공기($Pr=0.7$)나 액체(물의 경우, $Pr=7.0$)에서 일어나는 자연대류의 경우 온도차가 가해지는 순간 초기에는 전도현상에 의한 열전달로 Nu수는 매우 크게 나타난 후 급격히 감소하다가 부력에 의한 효과가 나타나기 시작하면 Nu수가 증가하면서 일정한 값으로 수렴된다. 그러나 낮은 Pr수를 갖는 순수물질의 경우 전도 이후 대류에 의한 열전달 현상이 아주 짧은 시간(본 연구에서는 $t=0.001$ 이내)에 이루어지고 있고 열전달 현상이 시간적 주기를 가지며 변화하게 된 후 Nu수가 특정한 값으로 수렴하지 않고 일정한 주기와 진폭을 갖는 진동현상이 나타나고 있음을 Figs. 6~9에서 알 수 있다. Ra수가 증가할수록 이와 같은 현상은 더욱 이른 시간에 관찰된다. 또한 $Pr=0.023$ 이고 $Ra=1.9 \times 10^5$ 와 2.1×10^5 인 경우에 대한 시간에 따른 Nu수의 변화를 Fig. 10과 11에 도시하였는데 같은 현상을 보이고 있다. 각각의 Pr수에 대한 최대·최소 Nu수, 평균 Nu수 그리고 진동수를 Table 4와 5에 제시하였다. 여기서 평균 Nu수는 Nu수의 최대값과 최소값의 중간으로 정의하였다. Table에서 보듯이 일정한 Pr수에서 Ra수가 증가할수록 평균 Nu수와 진폭($Nu_{max}-Nu_{min}$)과 진동수는 증가함을 알 수 있다.

Fig. 12와 13는 $Pr=0.02$ 일 때 $Ra=1.9 \times 10^5$ 와 $Ra=2.4 \times 10^5$ 인 조건하에서의 유동함수와 온도분포를 한 주기내에서 4등분된 시간에 대해 나타낸 것이다. 이때 유동함수는 최대값과 최소값 사이에서 50개의 같은 유동함수선을, 온도의 경우

40개의 등온선을 등간격으로 분할하여 도시하였다. Fig. 12와 13에서 보면 한 주기 후(각 그림의 (a)와 (e))에 등유동함수선과 등온선이 완벽하게 일치함을 알 수 있다. 이는 각각의 해석조건에서 일어나는 유동이 일정한 주기를 가지며 반복적으로 일어나고 있음을 입증해주고 있는 것으로 일정한 진동수와 진폭을 갖는 진동대류형태로 일어나고 있음을 확인할 수 있다.

3. Pr 수에 따른 영향

순수물질의 진동대류현상에서 Pr수에 따른 영향을 조사하기 위해 $Ra=2.0 \times 10^5$ 로 일정하게 하고 $Pr=0.015 \sim 0.025$ 로 변화시키면서 수치해석한 결과를 Figs. 14~17에 제시하였다. Figs. 15~17에서 살펴보면 Pr수가 증가할수록 Nu수의 진동현상이 둔화되어 주기가 증가하고 진폭이 감소하며 안정된 진동현상에 이르는 무차원시간도 늦어지고 있다. 특히 Fig. 17에서 살펴볼 때 $Ra=2.0 \times 10^5$ 일 때 $Pr=0.025$ 인 경우 매우 작은 진폭을 보여 Pr수가 그 이상으로 증가하면 공기나 물에서의 자연대류현상과 같은 정상해 형태의 유동특성을 보일 것으로 예측된다. 결국 같은 Ra수에서는 Pr수가 감소할수록 유동이 불안정하여 유동의 진동수가 증가하고 큰 진폭으로 진동하게 될 것으로 추정이 가능하다. 특히 $Pr=0.015$ 인 Fig. 14에서 살펴보면 다른 경우와 달리 일정한 진폭과 주기를 갖지는 않아 상당히 불안정한 유동이 보이지만 광대역으로 보았을 때 역시 주기성을 보이고 있다. 이와 같이 변형된 주기유동형태는 3.2절과 위의 결과에서 미루어 보면 Pr수가 낮은 영역 또한 Ra수가 큰 영역에서 발생할 가능성이 높은 것으로 예측되며 차후 이와 같은 유동형태에 대한 추가 연구가 필요하다.


Fig. 18와 19는 $Ra=2.0 \times 10^5$ 이고 Pr수가 각각 0.018, 0.025일 때의 한 주기내

에서의 유동함수(50개의 등유동함수선)와 등온선(40개의 등온선)을 나타낸 것이다. 3.2절에서 살펴본 진동대류현상과 마찬가지로 한주기마다 유동이 완전히 일치함을 확인할 수 있다.

Fig. 20은 $Ra=2.0 \times 10^5$ 일 때 Pr수에 따른 평균 Nu수의 값을 도시한 것이다. 평균 Nu값은 3.2절에서와 마찬가지로 일정한 주기를 구간에서의 최대 Nu값과 최소 Nu값의 중간값으로 정의하였고 Pr=0.015에서처럼 광대역 진동대류현상의 경우 광역의 주기내의 Nu수의 평균값으로 하였다. 그림에서 Pr수가 증가할수록 평균 Nu수는 또한 증가하고 있음을 알 수 있다.

4. 평균 Nu수에 대한 관계식

자연대류에서 Nu수는 Ra수, Pr수 그리고 기타 기하학적 형상에 따라 달라진다. 본 연구에서 구한 해석 결과를 토대로 평균 Nu수와 Ra수, Pr수의 관계식을 식(14)와 같이 유출하였고 Fig. 21에 도시하였다.



$$Nu_{ave} = 0.518 Pr^{0.136} Ra^{0.211} \quad (15)$$

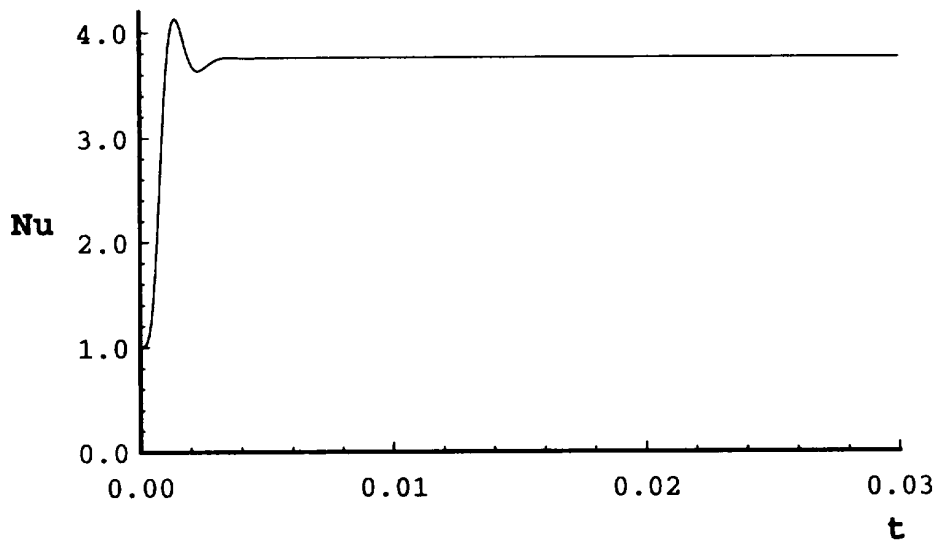
즉, 평균 Nu수는 Pr수와 Ra수의 지수승에 비례하는 관계식으로 나타나고 있음을 알 수 있다. 타당도의 조사에서도 살펴보았지만 본 연구의 결과가 기존연구 (Mohamad와 Viskanta, 1993)와 상당히 일치하고 있기 때문에 식(15)는 진동대류현상의 한 관계식으로 가치가 있다고 생각된다.

Table 2 Numerical conditions in the present study

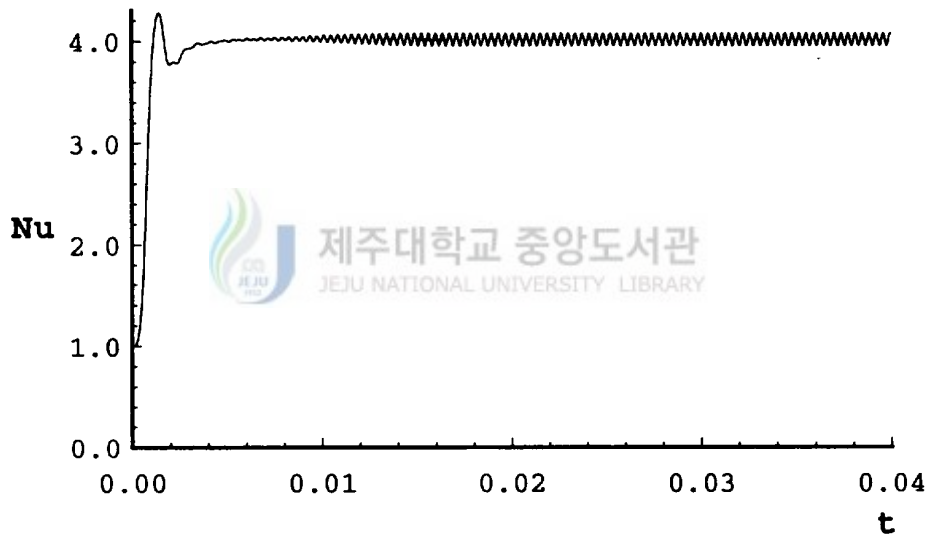
No.	A	Pr	$Ra \times 10^{-2}$	Using scheme	
1	1	0.015	2.0	CDS	
2		0.018	2.0	CDS	
3		0.02	0.02	1.75	CDS
4				1.8	CDS
5				1.85	CDS
6				1.9	CDS
7					PLS
8				2.0	CDS
9					PLS
10				2.1	CDS
11					PLS
12				2.2	CDS
13					PLS
14				2.3	CDS
15		2.4	CDS		
16		0.023	0.023	1.75	CDS
17				1.8	CDS
18				1.85	CDS
19				1.9	CDS
20				2.0	CDS
21				2.1	CDS
22				2.2	CDS
23				2.3	CDS
24		0.025	0.025	2.0	CDS

* CDS : Central Difference Scheme

* PLS : Power-Law Scheme



(a)



(b)

Fig. 3 Comparison of power-law(top diagram) and central-difference (bottom diagram) results for $Pr=0.02$ and $Ra=1.9 \times 10^5$

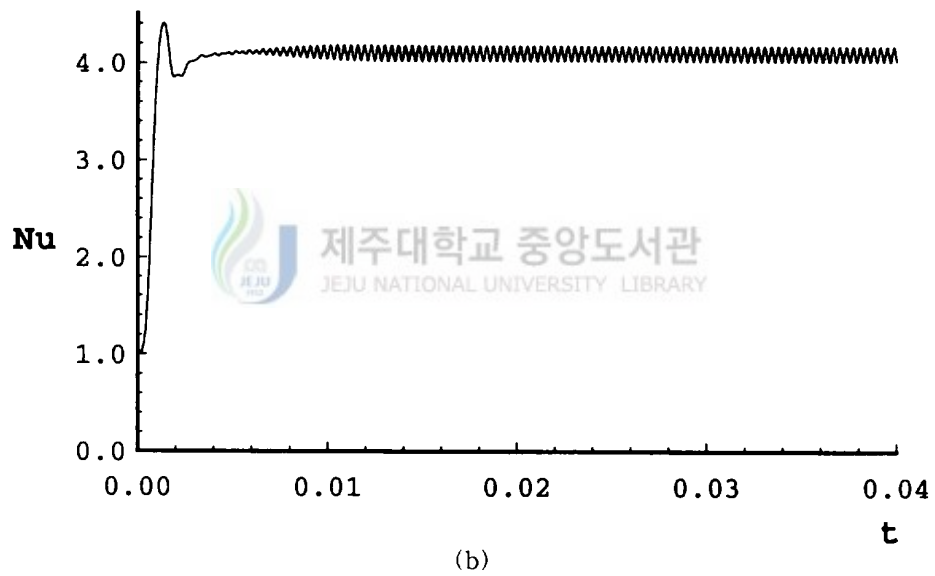
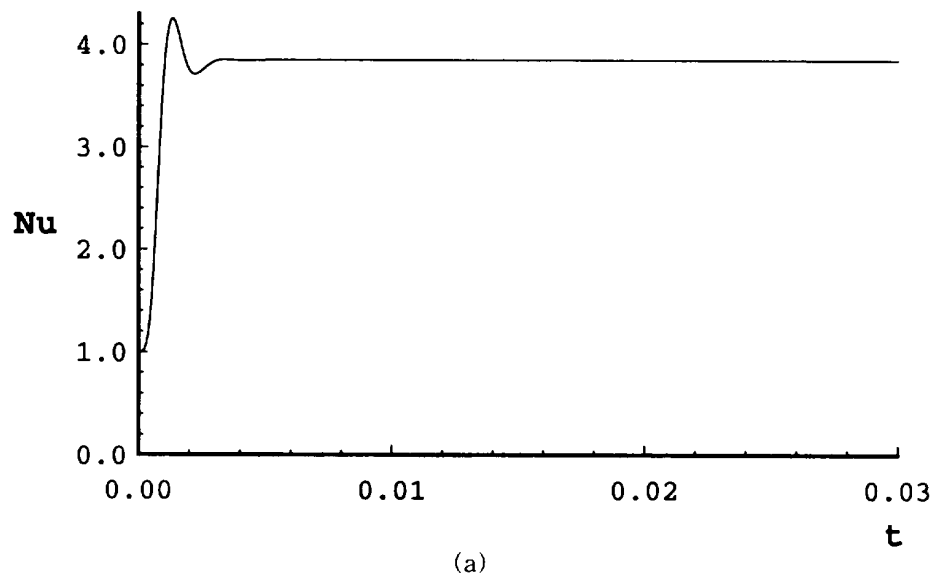


Fig. 4 Comparison of power-Law(top diagram) and central-difference (bottom diagram) results for $Pr=0.02$ and $Ra=2.2 \times 10^5$

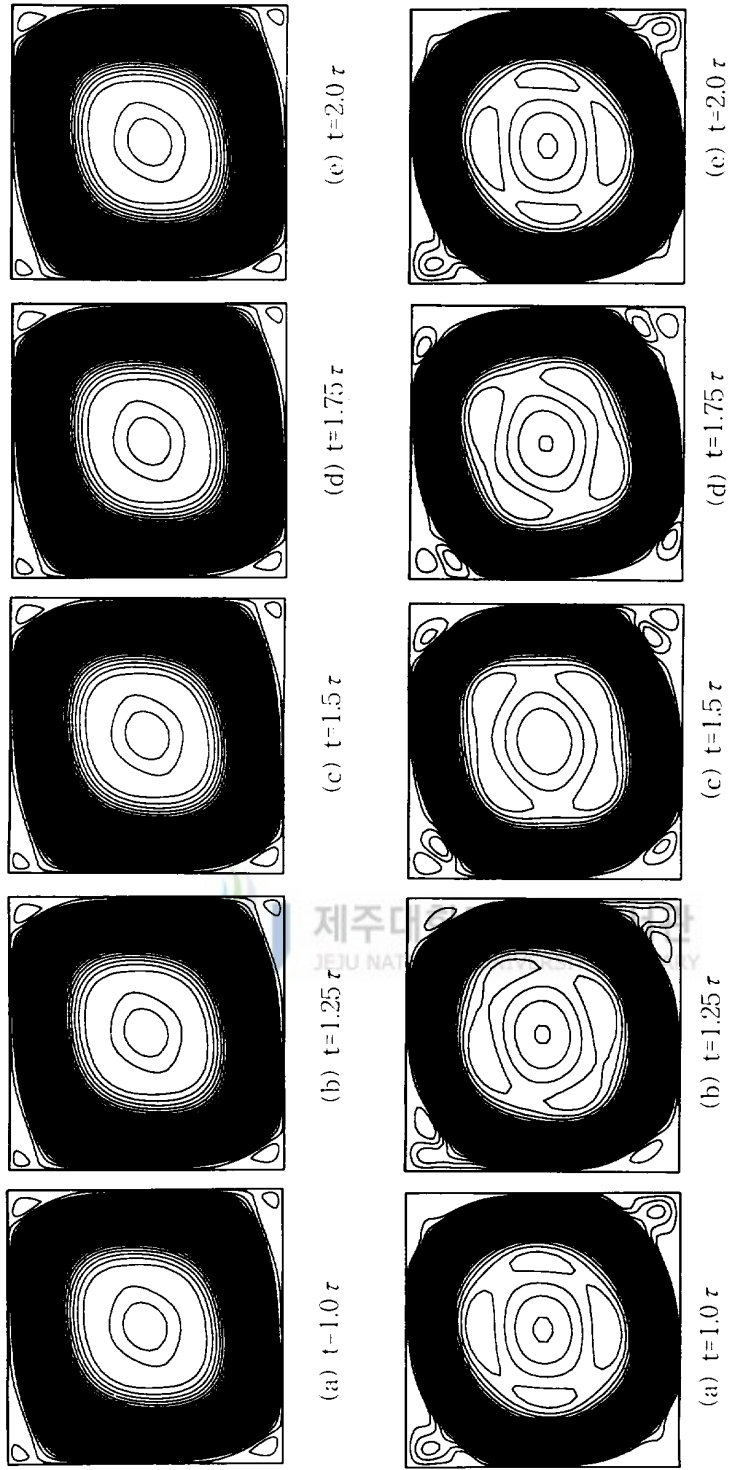


Fig. 5 A time series of streamline distribution for $Pr=0.02$, $Ra=2.2 \times 10^3$ and $t=3.5 \times 10^{-2} \sim 3.546 \times 10^{-2}$

(top diagrams : power law scheme, bottom diagrams : central difference scheme)

Table 3 Comparison of average Nusselt number with other result

A	Pr	$Ra \times 10^{-3}$	Nu_{ave}		Error (%)
			Present	Mohamad and Viskanta(1993)	
1	0.02	1.75	3.892695	3.890144	0.066
		1.8	3.916990	3.924695	0.196
		1.85	3.940180	3.947450	0.168
		1.9	3.964235	4.077607	2.780
		2.0	4.010065	4.137860	3.088
		2.1	4.054615	4.196010	3.369
		2.2	4.097280	4.252000	3.639
		2.3	4.142450	4.309615	4.044
		2.4	4.181475	4.359615	4.086

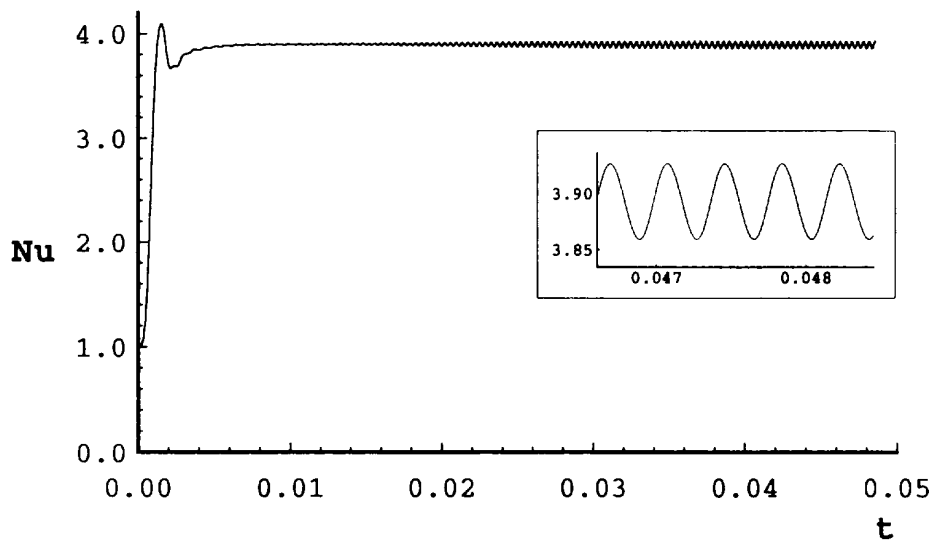


Fig. 6 Transient Nusselt number for $Ra=1.75 \times 10^5$ at $Pr=0.02$

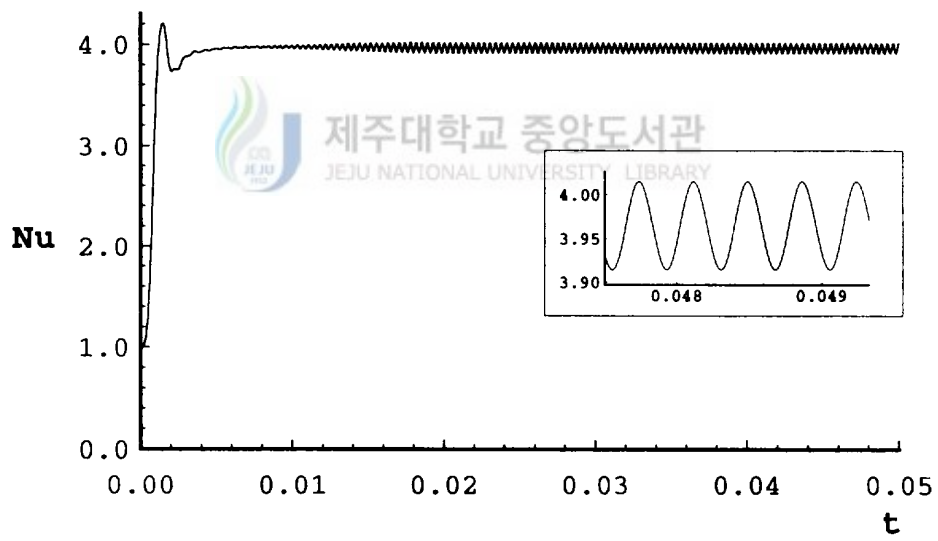


Fig. 7 Transient Nusselt number for $Ra=1.9 \times 10^5$ at $Pr=0.02$

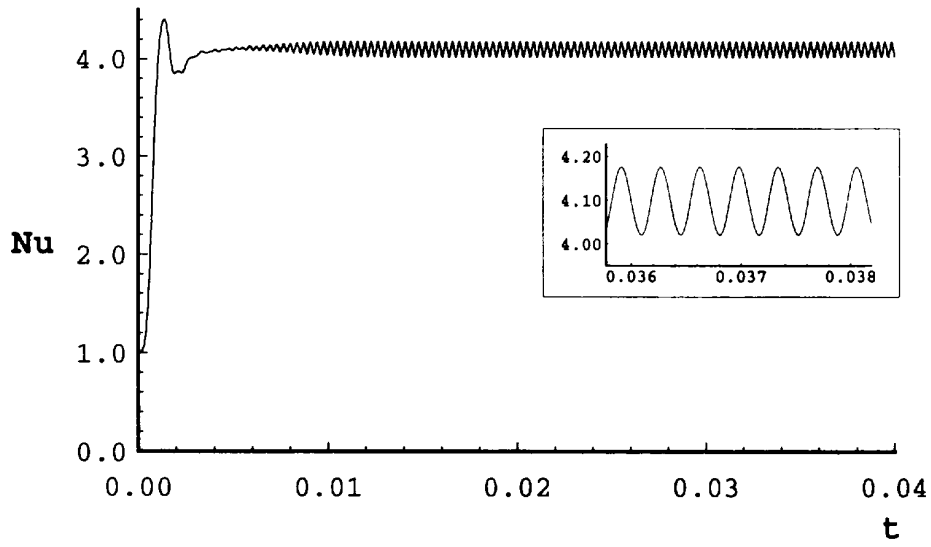


Fig. 8 Transient Nusselt number for $Ra=2.2 \times 10^5$ at $Pr=0.02$

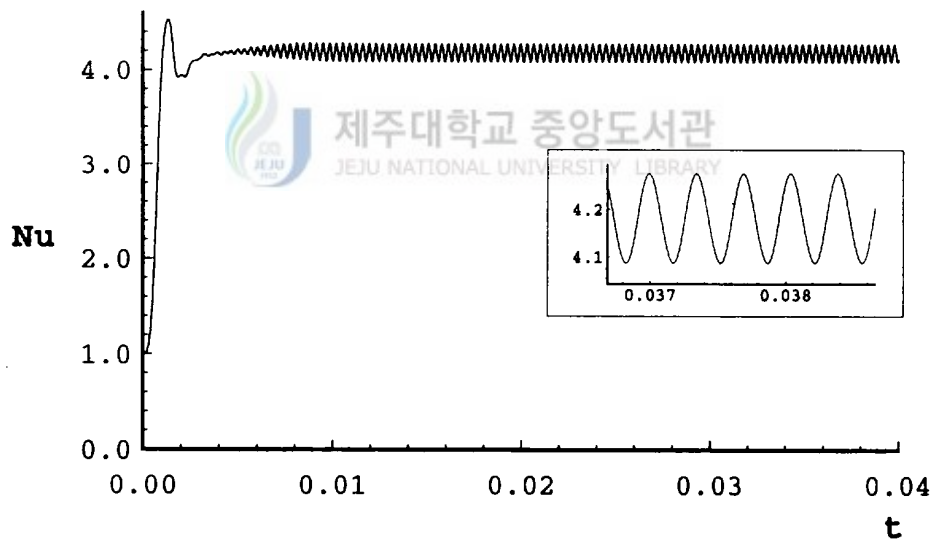


Fig. 9 Transient Nusselt number for $Ra=2.4 \times 10^5$ at $Pr=0.02$

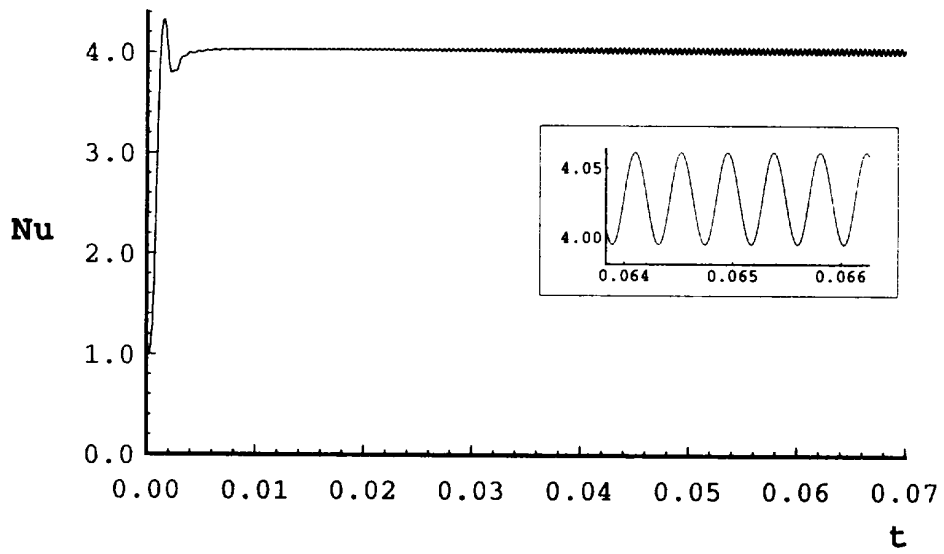


Fig. 10 Transient Nusselt number for $Ra=1.9 \times 10^5$ at $Pr=0.023$

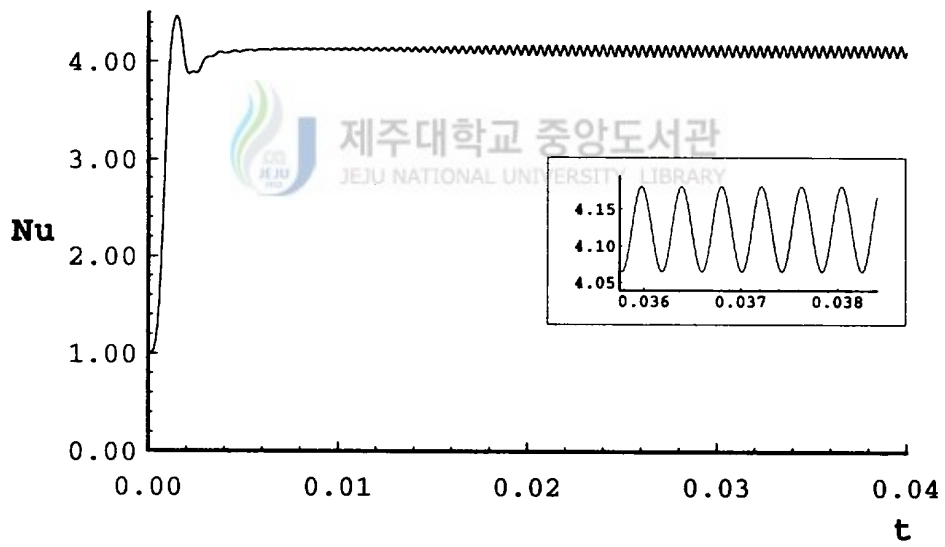


Fig. 11 Transient Nusselt number for $Ra=210000$ at $Pr=0.023$

Table 4 Average Nusselt number and frequency with Rayleigh number for Pr=0.02

$Ra(\times 10^{-3})$	Nu_{max}	Nu_{min}	Nu_{ave}	f
1.75	3.92617	3.85922	3.892695	2564
1.8	3.95668	3.87730	3.916990	2597
1.85	3.98615	3.89547	3.940810	2632
1.9	4.01461	3.91386	3.964235	2684
2.0	4.07015	3.94998	4.010065	2703
2.1	4.12378	3.98545	4.004615	2740
2.2	4.17584	3.98545	4.097280	2778
2.3	4.22494	4.03635	4.130645	2890
2.4	4.27572	4.08723	4.181475	2989

Table 5 Average Nusselt number and frequency with Rayleigh number for Pr=0.023

$Ra(\times 10^{-3})$	Nu_{max}	Nu_{min}	Nu_{ave}	f
1.75	3.95273	3.95229	3.952510	2247
1.8	3.98290	3.97556	3.978525	2298
1.85	4.02222	3.98722	4.004810	2345
1.9	4.06132	3.99455	4.025935	2380
2.0	4.12239	4.02924	4.075810	2410
2.1	4.18005	4.06432	4.122185	2469
2.2	4.23473	4.08657	4.16085	2548
2.3	4.28882	4.13402	4.21142	2607

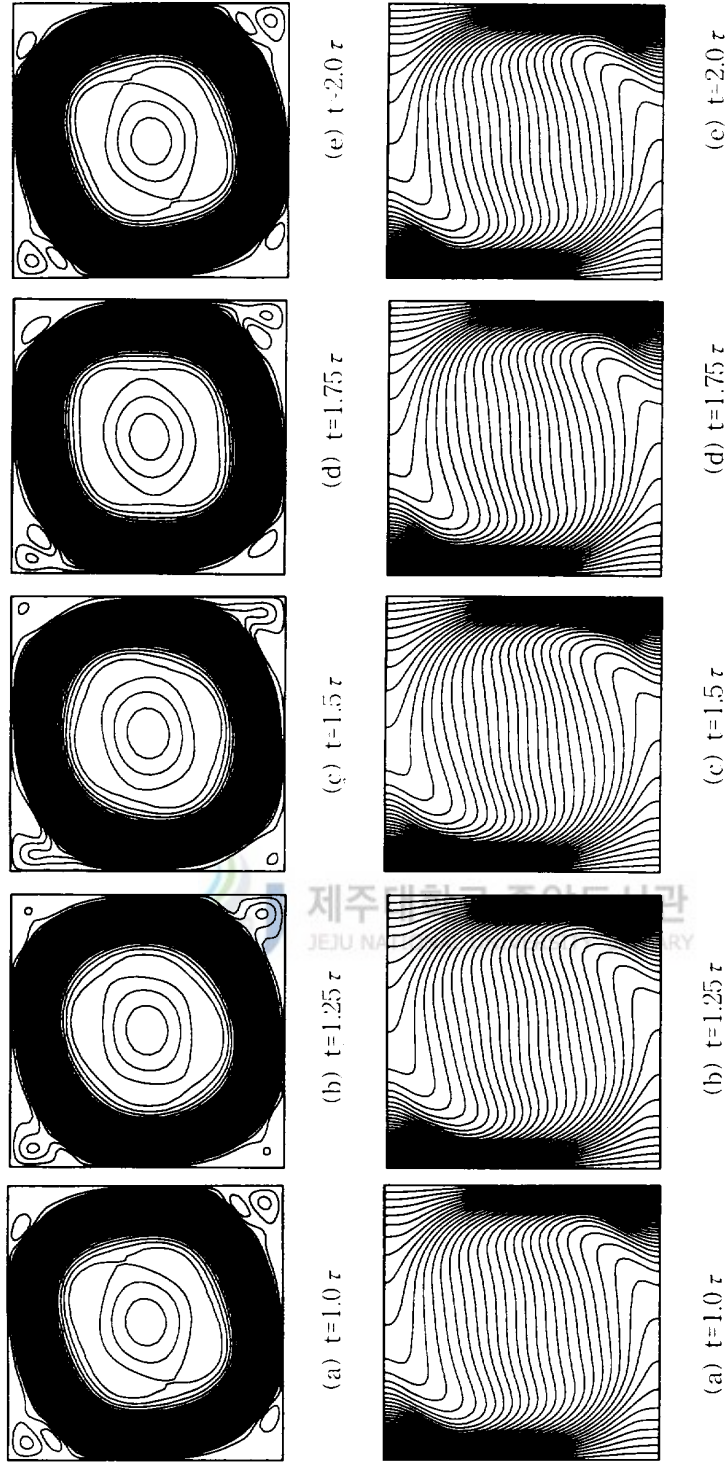


Fig. 12 A time series of streamline(top diagrams) and isothermal (bottom diagrams) distributions for $Pr=0.02$ and $Ra=190000$

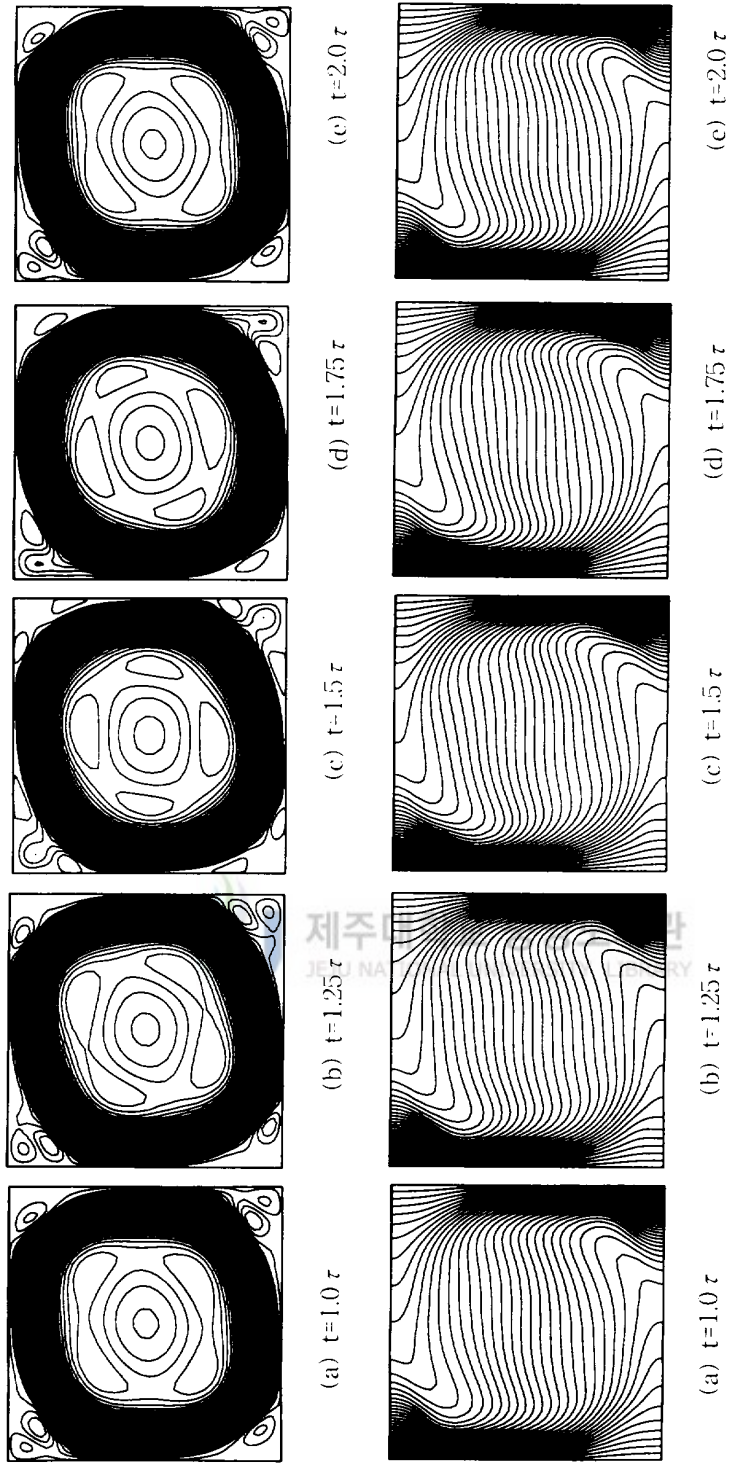


Fig. 13 A time series of streamline(top diagrams) and isothermal (bottom diagrams) distributions for $Pr=0.02$ and $Ra=2.4 \times 10^7$

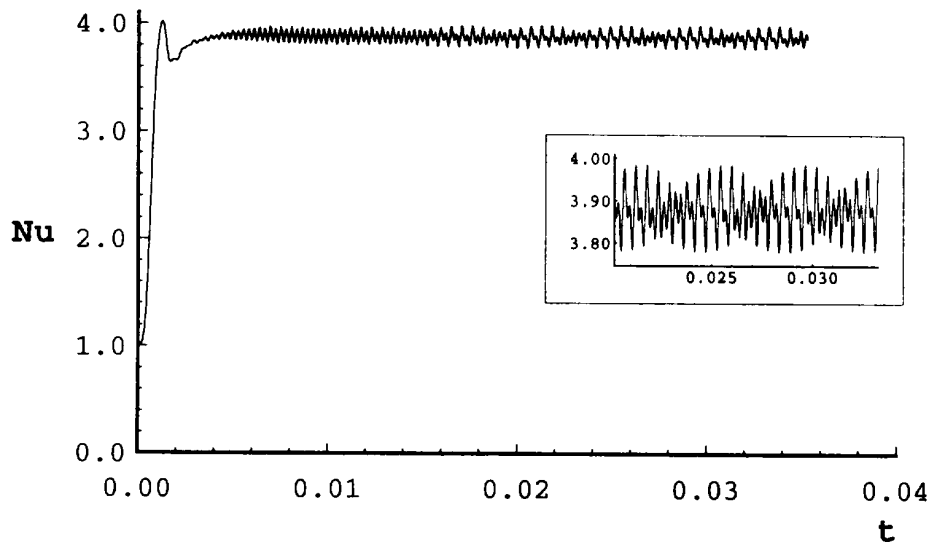


Fig. 14 Transient Nusselt number for $Ra=2.0 \times 10^5$ at $Pr=0.015$

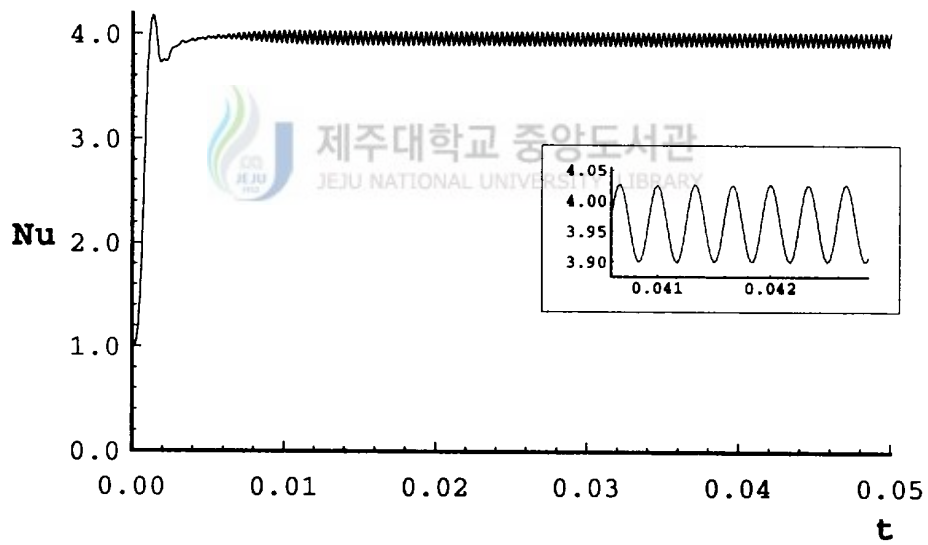


Fig. 15 Transient Nusselt number for $Ra=2.0 \times 10^5$ at $Pr=0.018$

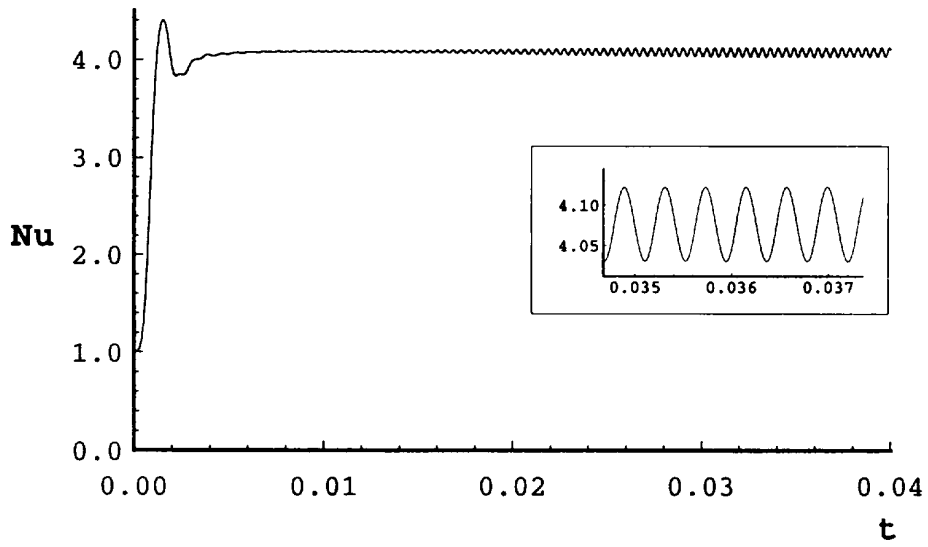


Fig. 16 Transient Nusselt number for $Ra=2.0 \times 10^5$ at $Pr=0.023$

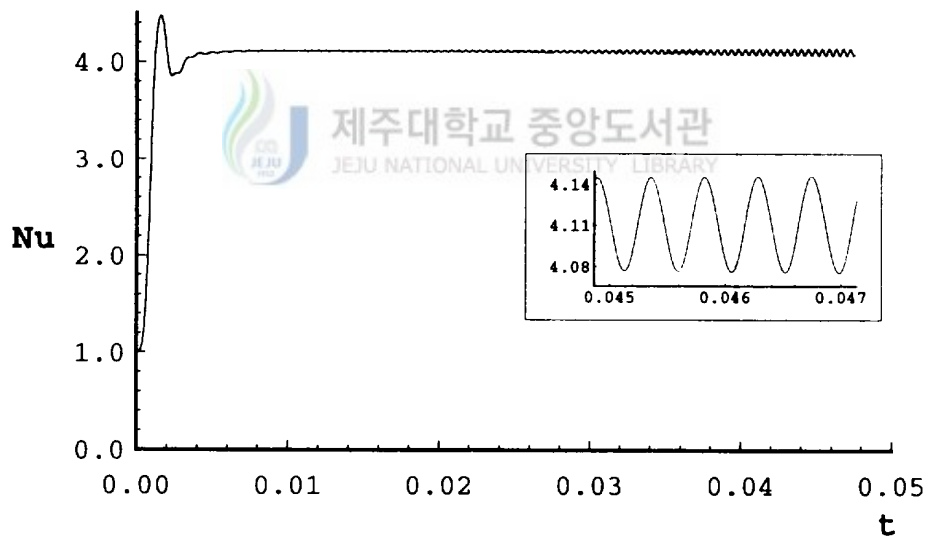


Fig. 17 Transient Nusselt number for $Ra=2.0 \times 10^5$ at $Pr=0.025$

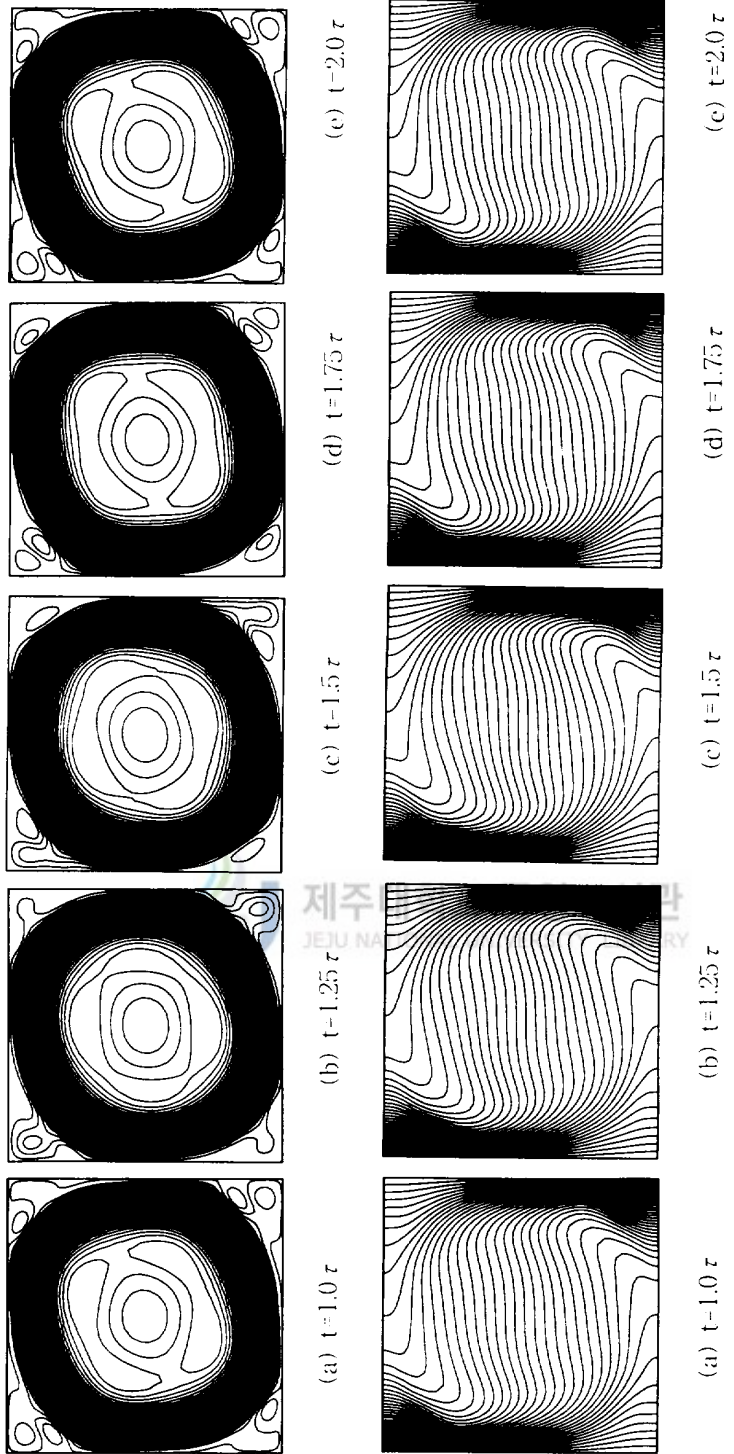


Fig. 18 A time series of streamline(top diagrams) and isothermal(bottom diagrams) distributions for $Pr=0.018$ and $Ra=2.0 \times 10^7$

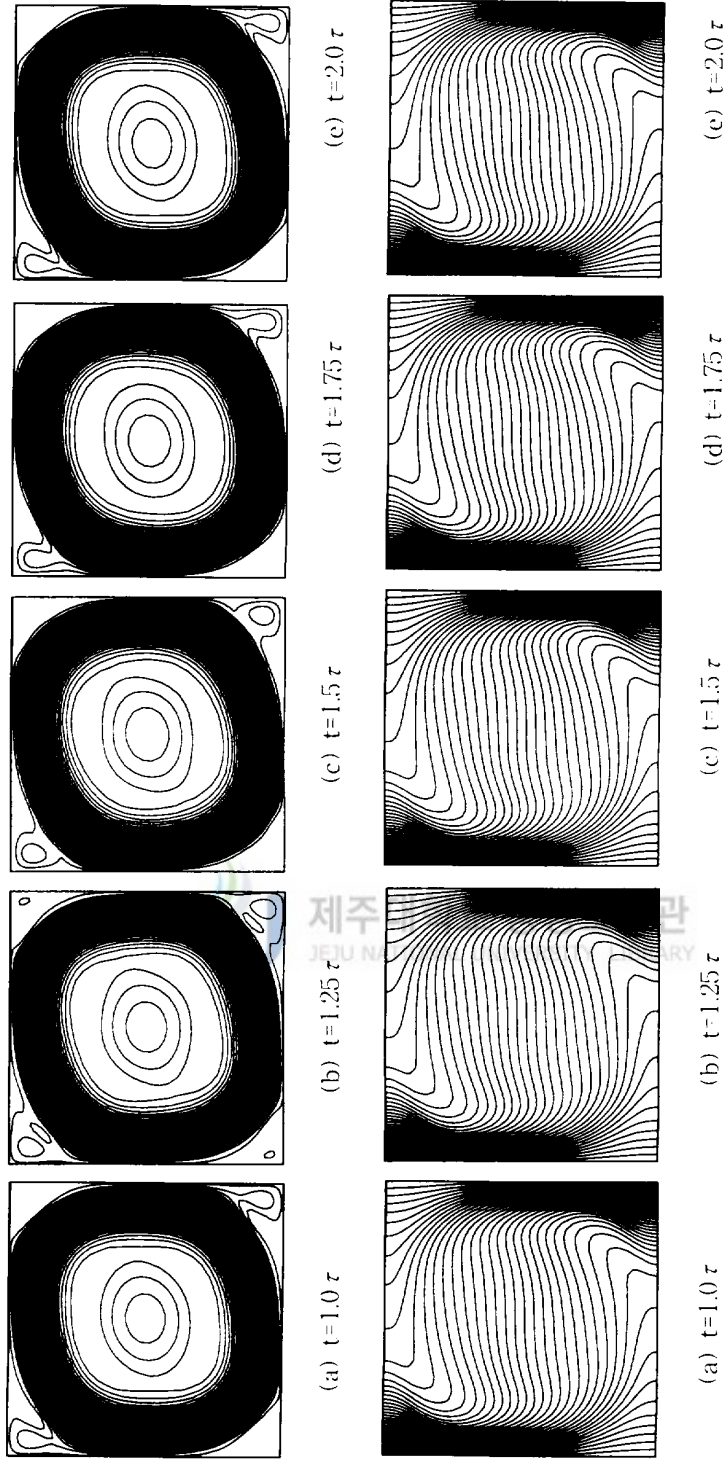


Fig. 19 A time series of streamline(top diagrams) and isothermal(bottom diagrams) distributions for $Pr=0.025$ and $Ra=2.0 \times 10^7$

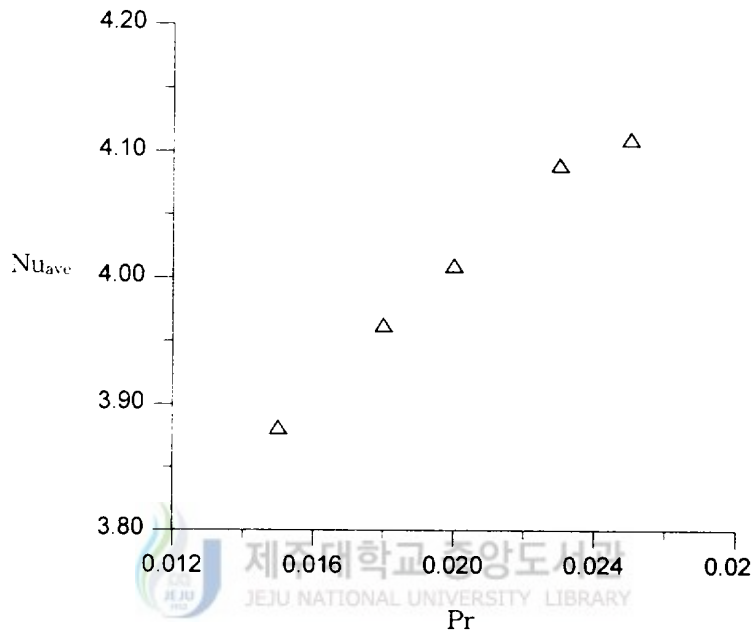


Fig. 20 Average Nusselt number with a Prandtl number at $Ra=2.0 \times 10^5$

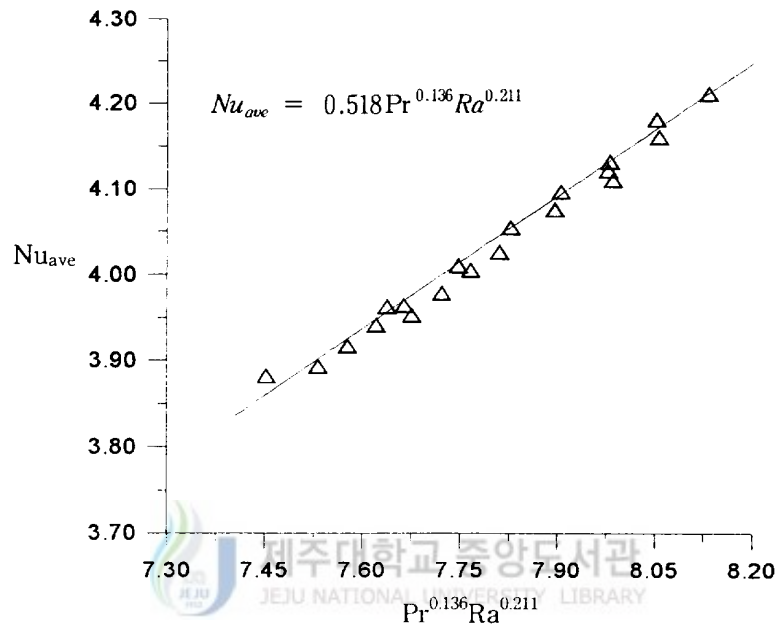



Fig. 21 Average Nusselt number correlations

IV 결론

직각밀폐용기내에서 낮은 Pr수를 갖는 순수물질이 온도차에 의한 유동이 유발될 때 발생하는 진동대류에 관해 수치해석하였다. 해석범위는 $A=1$, $Pr=0.015 \sim 0.025$, $Ra=1.75 \times 10^5 \sim 2.4 \times 10^5$ 이며, 연구결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. Ra수가 증가할수록 평균 Nu수, 진동대류의 진폭 그리고 진동수는 증가한다. 또한 Pr수가 증가할수록 평균 Nu수는 증가하나 진동대류의 진폭과 진동수는 감소한다.
2. 진동대류를 해석하기 위한 수치해석 방법으로는 중앙차분도식이 맥승도식보다 적절하다.
3. 진동대류에서 열전달은 Ra수와 Pr수에 매우 크게 의존하며 본 실험범위에서 평균 Nu수, Ra수, Pr수의 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$Nu_{ave} = 0.518Pr^{0.136}Ra^{0.211}$$

V. 참고문헌

- Ball, K. and Bergman T. L., 1993, Numerical Simulation of Unsteady Low Pr Convection Using a Chebyshev Collocation Technique, ASME Winter Meeting, New Orleans, Louisiana, November 28-December 3, pp. 1-7.
- Bargach, M. and Vasseur P., 1992, Numerical Computation of Thermocapillary Convection in two Superimposed Layer of Fluids, Ecole Polytechnique of Montreal Dept. Mech. Eng. C. P. 6079, pp. 742-751.
- Bénard, C., Gobin D. and Martinez F., 1985, Melting in Rectangular Enclosure : Experiments and Numerical Simulations, J. Heat Transfer, Vol. 107, pp. 794-803.
- Carslaw, H. S. and Jaeger J. C., 1959, Conduction of Heat in Solid, Oxford Univ. Press, 2nd Ed., Chap. 11.
- Crochet, M. J., Geyling F. T. and Van Schaftingen J. J., 1983, Numerical Simulation of the Horizontal Bridgman Growth of a Gallium Arsenide crystal, J. Crystal Growth, Vol. 65, pp. 166-172.
- Gau, C. and Viskanta R., 1986, Melting and Solidification of a Pure Metal on a Vertical Wall, J. Heat Transfer, Vol 108, pp. 174-181.
- Gobin, D. and Benard C., 1990, Influence of Prandtl Number on the Melting of Metals, Winter Annual Meeting ASME. New York, pp. 75-81.
- Hart, J., 1983, A Note on the Stability of Low-Prandtl-Number Hadley Circulations, J. Fluid Mech., Vol. 132, pp. 271-281.

-
- Ho, C. J. and Viskanta R., 1984, Heat Transfer During Melting from an Isothermal Vertical Wall, *J. Heat Transfer*, Vol. 106, pp. 12-19.
- Hsu, C. F., Sparrow E. M. and Patankar S. V., 1981, Numerical Solution of Moving Boundary Problems by Immobilization and a Control-Volume-Based Finite-Difference Scheme, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 1335-1343.
- Incropera, F. P. and De Witt D. P., 1990, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Wiley 3th Ed.
- Kamotani, Y., Weng F. B. and Platt J., 1984, Oscillatory Nature Convection of a Liquid Metal in Circular Cylinders, *J. Heat Transfer*, Vol. 106, pp. 627-632.
- Kamotani, Y. and Sahraoui T., 1990, Oscillatory Natural Convection in Rectangular Enclosure Filled with Mercury, *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 253-255.
- Koseff, J. R. and Street R. L., 1984a, On End Wall Effects in a Lid-Driven Cavity Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol 106, pp. 385-389.
- Koseff, J. R. and Street R. L., 1984b, The Lid-Driven Cavity Flow: A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observation, *J. Fluid Mech.*, Vol 106, pp. 390-398.
- Mohamad, A. A. and Viskanta R., 1991a, Transient Natural Convection of Low-Prandtl-Number Fluid in a Differentially Heated Cavity, *Int. J. Numer. Method in Fluids*, Vol. 13, pp. 61-81.
- Mohamad, A. A. and Viskanta R., 1991b, Transient Low Prandtl Number Fluid Convection in a Lid-Driven Cavity, *Numerical Heat Transfer, Part A*.

-
- Vol. 19, pp. 187-205.
- Mohamad, A. A. and Viskanta R., 1993, Modeling of Turbulent Buoyant Flow and Heat Transfer in Liquid Metals, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2815-2826.
- Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw Hill.
- Pulicani, J. P., Crespo Del Arco E., Randriampianina A., Bontoux P. and peyret R., 1990, Spectral Simulations of Oscillatory Convection at Low Prandtl Number, *Int. J. Numer. Method Fluids*, Vol. 10, pp. 481-517.
- Rathjen, K. A. and Jiji L. M., 1971, Heat Conduction with Melting or Freezing in Corner, *J. Heat Transfer*, Vol. 93, pp. 101-109.
- Shamsunder, N. and Sparrow E. M., 1975, Analysis of Multi-Dimensional Conduction Phase Change via the Enthalpy Model, *J. Heat Transfer*, Vol. 97, pp. 333-340.
- Viskanta, R., 1988, Heat Transfer During Melting and Solidification of Metals, *J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 1205-1219.
- Zhou, H. and Zeib A., 1992, Oscillatory Convection in Solidifying Pure Metals, *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 22, pp. 435-468.

부록 A 기본방정식의 이산화

1. 이산화 방정식(Discretized Equation)

식(5)~(7)를 하나의 일반화된 보존식의 형태(Generalized Conservation Form)로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}) + S_\phi \quad (A1)$$

여기서 ϕ 는 독립변수, Γ_ϕ 는 확산계수(Diffusion Coefficient), S_ϕ 는 나머지 항들을 나타내며 기본방정식과 이들의 관계는 Table 1에 나타냈다.

Table A1 Define of ϕ , Γ_ϕ and S_ϕ of the government equation.

Conserved property	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
mass	1	0	0
X-momentum	u	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial x}$
Y-momentum	v	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial y} + Ra \cdot Pr \ T$
energy	t	1	0

식(A1)을 이산화(Discretization)를 시키기 위해 대류항과 확산항을 합친 총유속

j (Total flux)를 아래와 같이 정의한다.

$$j_x = \rho u \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad j_y = \rho v \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (A2)$$

로 정의된다. 식(A1)에 식(A2)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y = S_\phi \quad (A3)$$

식(A3)를 시간에 대하여 음함수 방법(Implicit Method)으로 공간에 대해서는 fig. A1의 미소 검사체적에 대하여 적분하고 검사체적내의 S_ϕ 항의 평균치를

$$\overline{S_\phi} = S_c + S_P \phi_P \text{라 하면}$$

$$(\rho_P \phi_P - \rho_P^0 \phi_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = (S_c + S_P \phi_P) \Delta x \Delta y \quad (A4)$$



와 같이 얻을 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} J_e &= \Delta y \cdot j_e, \quad J_w = \Delta y \cdot j_w, \\ J_n &= \Delta x \cdot j_n, \quad J_s = \Delta y \cdot j_s \end{aligned} \quad (A5)$$

연속방정식인 식(5)를 위와 같은 방법으로 적분하면

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F = 0 \quad (A6)$$

여기서 F는

$$\begin{aligned} F_e &= (\rho u)_e \cdot \Delta y, \quad F_w = (\rho u)_w \cdot \Delta y \\ F_n &= (\rho u)_n \cdot \Delta x, \quad F_s = (\rho u)_s \cdot \Delta x \end{aligned} \quad (A7)$$

으로 미소검사체적의 각 면을 통과하는 질량유속(Mass Flux)을 의미한다. 그리고 식(A4)-(A6) × ϕ_p 를 계산하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\phi_p - \phi_p^0) \rho_p^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_w) + (J_n - F_n \phi_p) \\ - (J_s - F_s - \phi_s) = (S_C + S_P \phi_p) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (A8)$$

부록 B에서 계산된 각 검사면(Control Volume Face)에서의 유속에 관한 식(B10)을 중앙차분도식(Central Difference Scheme)를 적용하면 다음과 같은 최종적인 이산화 방정식을 구할 수 있다.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (A9)$$

여기서

$$a_E = D_e (1 - 0.5 |Pe|_e) + \max(-F_e, 0)$$

$$\begin{aligned}
a_w &= D_w(1 - 0.5|Pe|_w) + \mathbf{[-F_w, 0]} \\
a_n &= D_n(1 - 0.5|Pe|_n) + \mathbf{[-F_n, 0]} \\
a_s &= D_s(1 - 0.5|Pe|_s) + \mathbf{[-F_s, 0]} \\
a_p^0 &= \frac{\rho_p^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} \\
b &= S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 \phi_F^0 \\
a_p &= a_E + a_w + a_n + a_s + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y
\end{aligned} \tag{A10}$$

이며 식(A10)에서 표시된 양들은 식(A11)에서와 같고 **【 】**의 표기는 괄호안의 값들중 최고값을 의미한다

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}, \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n}, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\
(Pe)_e &= \frac{F_e}{D_e}, \quad (Pe)_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad (Pe)_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad (Pe)_e = \frac{F_e}{D_e}
\end{aligned} \tag{A11}$$

2. 운동방정식의 이산화

연속방정식과 운동방정식에 포함되어 있는 1차 미분항에 의해 나타나는 속도와 압력의 진동현상(계산과정에서 건너 뛴 격자에서의 압력이 동일시되는 현상)이 발생으로 계산이 오류가 발생할 수 있다. 따라서 이러한 현상을 방지하기 위해 압력의 계산을 운동방정식을 이용하여 Fig. A1(a)의 주 검사체적(Main Central Volume)에서 계산하고 속도 u, v는 엇갈린 검사체적(Staggered Control Volume)인 Fig. A1(b)에서 계산한다. x-방향의 e-면과 y-방향의 n-면에서의 운

동방정식을 차분화 방정식으로 표현하며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_e u_e &= \sum a_{nb} u_{nb} + b + (P_W - P_E) \Delta y \\ a_n u_n &= \sum a_{nb} u_{nb} + b + (P_S - P_N) \Delta x \end{aligned} \quad (A12)$$

여기서 $\sum a_{nb}$ 는 이웃 격자점들이고 b 는 생성항 S_ϕ 에서 압력항을 제외한 나머지 항들을 나타낸다. 식(A12)에서 구한 속도 u, v 는 일반적으로 연속방정식을 만족시키지 못하므로 아래와 같이 속도장과 압력장에 대하여 보정이 필요하다.

$$u = u^* + u'' \quad , \quad v = v^* + v'' \quad , \quad P = P^* + P'' \quad (A13)$$

여기서 u'' , v'' , P'' 는 보정값이고 P^* 는 임의 압력값이고 속도장 u^* , v^* 는 식(A12)에서 계산된 값이다. 식(A13)을 식(A12)에 대입하고 P^* 에 의해 계산된 u^* , v^* 를 빼어 계산하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} a_e \tilde{u}_e &= \sum a_{nb} \tilde{u}_{nb} + (P_W - P_E) \Delta y \\ a_n \tilde{u}_n &= \sum a_{nb} \tilde{u}_{nb} + (P_S - P_N) \Delta x \end{aligned} \quad (A14)$$

간략한 계산을 위해 식(A14)에서의 합산항 $\sum a_{nb} \tilde{u}_{nb}$ 를 무시하면

$$u_e = \frac{(P_W - P_E) \Delta y}{a_e} \quad , \quad u_n = \frac{(P_S - P_N) \Delta x}{a_n} \quad (A15)$$

와 같이 된다. 따라서 속도보정식은 다음과 같이 된다.

$$u_e = u_e^* + (P_p - P_e) \frac{\Delta y}{a_e}, \quad v_n = v_n^* + (P_p - P_e) \frac{\Delta x}{a_n} \quad (\text{A16})$$

또한 식(A16)을 구한 방법으로 속도 u_w 와 v_s 를 구하고 연속방정식인 식(A6)에 대입하여 계산하면 다음과 같은 압력보정 방정식을 구할 수 있다.

$$a_p P_p = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (\text{A17})$$

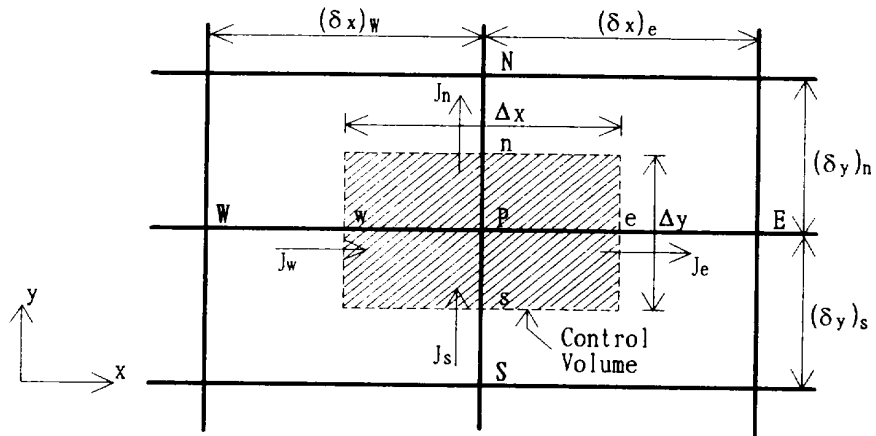
여기서 각 계수들은 아래의 식(A18)과 같다.

$$a_E = \frac{\rho_e \Delta y}{a_e}, \quad a_W = \frac{\rho_w \Delta y}{a_w}, \quad a_N = \frac{\rho_n \Delta x}{a_n}, \quad a_S = \frac{\rho_s \Delta x}{a_s}, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s}$$

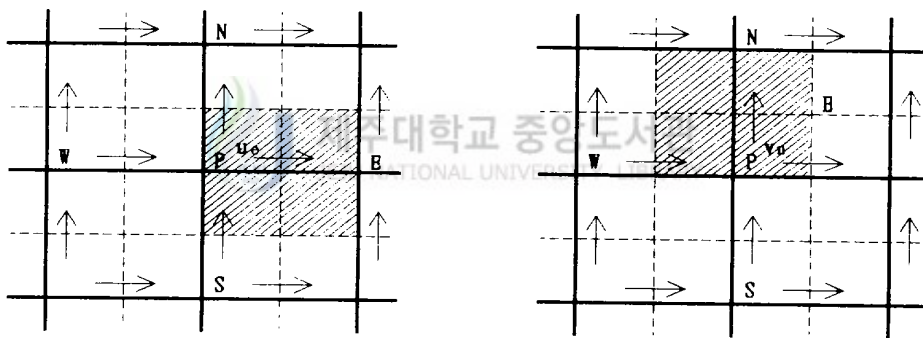
$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{A18})$$

$$b = (\rho_p^0 - \rho_p) \rho_b^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta x$$

여기서 b의 값은 미소체적에서의 연속방정식과 동일하므로 b의 값이 0으로 접근에 따라 정확한 압력장과 속도장을 구할 수 있다.



(a) Main control volume



(b) u-control volume

(c) v-control volume

Fig. A1 Illustration of main and staggered control volume

부록 B 검사면에서의 총유속

각 검사면에서의 총유속을 계산하기 위해 Fig. B1에서와 같이 두 격자점사이의 검사면에서의 유속 j' 를 다음과 같이 정의한다.

$$j^+ = \frac{j\delta}{\Gamma} = Pe \cdot \phi - \frac{\partial \phi}{\partial(x/\delta)} \quad (B1)$$

Fig. B1에서 검사면에서의 ϕ 값은 및 ϕ_{i+1} 의 가중 평균치(Weighted Average)로, $d\phi/d(x/\delta)$ 는 $(\phi_{i+1} - \phi_i)$ 의 적절한 배수로 표시될 수 있으므로

$$j^- = Pe[f \cdot \phi_i + (1 - f) \cdot \phi_{i+1}] - h(\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (B2)$$

가 된다. 여기서 f, h 는 Pe 수에 의존하는 무차원 계수이다. A, B 를 각각 Pe 수의 함수인 무차원 계수라 하면 식(B1)은

$$j^+ = B\phi_i - A\phi_{i+1} \quad (B3)$$

로 나타낼 수 있으면 무차원계수 $A(Pe)$ 및 $B(Pe)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A(Pe) &= Pe(f - 1) + h \\ B(Pe) &= f \cdot Pe + h = A(Pe) + Pe \end{aligned} \quad (B4)$$

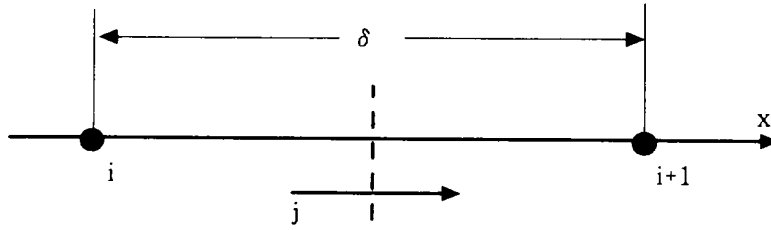


Fig. B1 Total flux of j between two grid point

또한 좌표를 반대로 취하면 Pe 는 $-Pe$ 가 되고 계수 A 와 B 는 서로 역할이 바뀌므로

$$\begin{aligned} A(-Pe) &= B(Pe) \\ B(-Pe) &= A(Pe) \end{aligned} \tag{B5}$$

이때 식(A4)와 식(A5)로 $Pe < 0$ 에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} A(Pe) &= A(|Pe|) - Pe \\ B(Pe) &= A(|Pe|) \end{aligned} \tag{B6}$$

따라서 Pe 수의 부호에 관계없이 $A(Pe)$ 와 $B(Pe)$ 는 식(B7)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} A(Pe) &= A(|Pe|) + [-Pe, 0] \\ B(Pe) &= A(|Pe|) + [Pe, 0] \end{aligned} \tag{B7}$$

식(B7)을 식(B3)에 대입하면

$$j^* = (A(|Pe|) + [Pe, 0])\phi_i - (A(|Pe|) + [-Pe, 0])\phi_{i+1} \quad (B8)$$

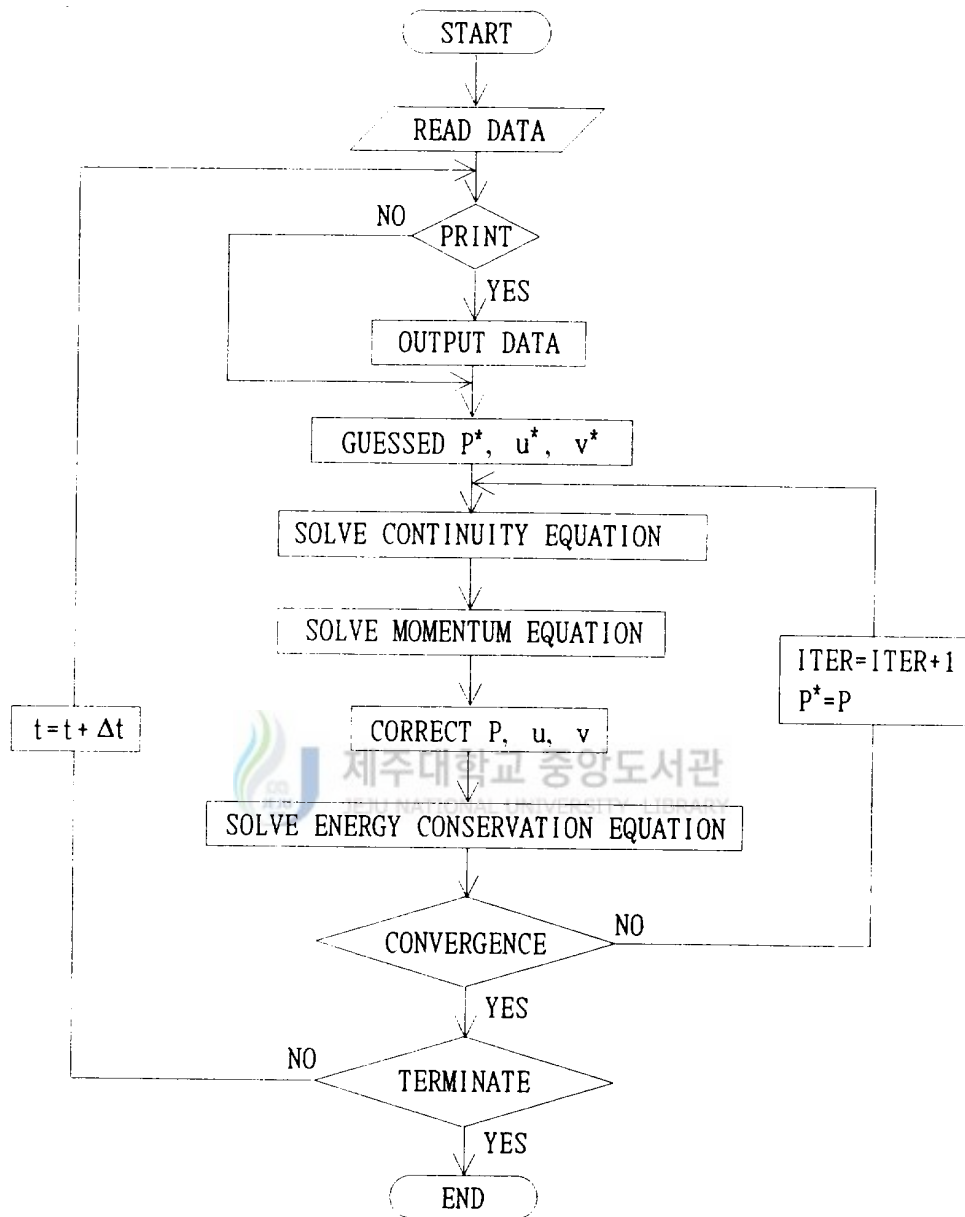
이고 식 (B1)을 고려하면 Fig. B1의 검사면을 통과하는 유속은 다음과 같다.

$$J^* = \frac{\Gamma}{\delta} [(A(|Pe|) + [Pe, 0])\phi_i - (A(|Pe|) + [-Pe, 0])\phi_{i+1}] \quad (B9)$$

이 관계식을 검사체적에 적용하면 총유속은 식(B10)이 된다.

$$\begin{aligned} J_e &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} [(A(|Pe|_e) + [(Pe)_e, 0])\phi_P - (A(|Pe|_e) + [-(Pe)_e, 0])\phi_E] \\ J_w &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} [(A(|Pe|_w) + [(Pe)_w, 0])\phi_W - (A(|Pe|_w) + [-(Pe)_w, 0])\phi_P] \\ J_n &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} [(A(|Pe|_n) + [(Pe)_n, 0])\phi_P - (A(|Pe|_n) + [-(Pe)_n, 0])\phi_N] \\ J_s &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} [(A(|Pe|_s) + [(Pe)_s, 0])\phi_S - (A(|Pe|_s) + [-(Pe)_s, 0])\phi_P] \end{aligned} \quad (B10)$$

부록 C 계산과정의 개통도



감사의 글

모든 일이 시작이 있으면 끝맺어야 할 때가 있듯이 끝맺어야 할 때를 앞에 두고 남아있는 것은 주의에 있었던 분들의 고마움과 자신의 허물만 남아 있습니다. 그동안 본 논문의 결실을 이룰수 있도록 세심한 배려와 지도로 학업을 이끌어 주셨던 현명택 교수님과 논문이 완성되기까지 많은 가르침을 주셨던 권기린 교수님, 김귀식 교수님, 허종철 교수님 그리고 임종환 교수님께 감사를 드립니다. 또한 어려운 환경속에서도 격려를 아끼지 않았던 홍남호 선생님과 오맹종선생님을 비롯한 대학원생 여러분에게도 감사를 드리며 바쁜 시간속에서도 많은 배려를 아끼지 않았던 강승균 선생님과 양순량 선생님의 고마움은 잊지 못할 것입니다. 그리고 같은 실험실에서 서로 부대끼며 고생하였던 김기웅과장님 양종훈 선생님 그리고 성혁이와 양훈이에게도 고마움을 전하며 그동안의 추억은 민 훗날 인생의 추억이 되어 언제나 기억속에 남아 있을 것입니다.

지금의 내가 있기까지 묵묵히 뒤에서 정성을 다했던 아버지와 어머니 그리고 큰 누님을 비롯한 형제분들에게도 감사의 마음을 전합니다.