碩士學位論文

空間論證幾何 單元의 教材內容 分析 및 改善 方案

指導教授 玄 進 五

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

李 重 錫

2001年 8月

空間論證幾何 單元의 教材內容 分析 및 改善 方案

指導教授 玄 進 五

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2001年 4月 日

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 李 重 錫

李重錫의 教育學 碩士學位 論文을 認准함.

2001年 7月 日

審查委員長 ________________ 印

審 查 委 員 ________________ 印

審 查 委 員 ________________ 印

<抄錄>

空間論證幾何 單元의 敎材內容 分析 및 改善 方案

李 重 錫

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 玄 進 五

고등학교 수학과 교육과정 해설(교육부, 1995. 6. 20)에서 수학Ⅱ의 공간도형의 논증기하 단원은 「공리계를 사용하지 않도록」 지도상의 유의점을 제시하고 있으나, 공간기하에 대한 공리를 논증의 출발점으로 삼지 않으므로써, 참이라고 쉽게 인정할 수 있는 명제들이 애매모호한 논리 전개에 의해 증명이된 교과서들이 발견되었다.

이에 본 논문에서는 현행 고등학교 수학Ⅱ 교과서의 논증기하에 대한 교과 내용을 분석하고 문제점을 도출하였으며, 그 개선책으로 공간기하에 대한 3개의 공리와 명제 증명의 기본이 되는 중요한 명제 약간을 도입하는 방안을 마련하였다.

* 본 논문은 2001년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목 차

Ⅰ. 서 론

논리적 사고력을 연마하는 데 유클리드 기하는 가장 알맞은 도구로 여겨져 왔다. 유클리드적인 사고의 틀인 **분석-증명-작도-결정**(Analysis-Proof-Construction-Determination)은 수학의 방법론의 원리일 뿐 아니라 수학의 교육 활동을 이끄는 원리이다.

대부분의 수학교재는 개념과 정의, 해법의 설명과 논리적 표현들로 나열되어 있다. 이러한 형식적 서술 때문에 영원한 진리로 인식되기도 하지만 융통성 없고 친숙해질 수 없으며 이해하기 어려운 교과로 느껴진다, 수학교재는 다른 교과의 서술 양식과는 많은 차이가 있다. 가령 우리가 소설책을 읽을 경우에는 일부분을 건너 뛰어도 내용을 파악할 수 있지만, 수학책의 경우는 책에서 전달하는 의미를 전혀 알 수 없게 된다. 수학책을 읽을 때는 모든 단어가 중요하다. 대개 수학교과서에는 간결하게 요점만 적혀 있고 각각의 낱말과 기호는 모두 특수한 의미를 지닌다. 또한 교과서에 삽입된 그림, 그래프, 표, 도형 등은 수천 마디의 말을 함축하고 있으므로 절대로 건너 뛰어선 안된다. 따라서 수학책을 읽을 때는 천천히, 주의 깊게 집중해서 읽어야만 한다. 각 개념을 파악한 후에 진도를 나가야 한다. 서둘러서도 안되고, 다른 교과에서처럼 중간단계를 건너 뛰어서도 안된다. 수학교재의 이러한 특성을 이해하지 못한 상태에서, 학생들은 자신의 능력을 비하하고 결국에는 수학에 대해 부정적인 생각을 갖게 된다.[1] 특히 논증기하 단원은 다른 어떤 단원보다도, 시를 감상하고 음미하듯이 천천히, 주의 깊게 집중해서 읽어야하고, 용어의 정의, 공리, 기본성질 등 각 개념을 이해하고 파악한 이후에 진도를 나가야 함에도 불구하고 현실은 그렇지 못한 경향이 있다. 그 이유는 수학능력시험과 각종 입시와 평가에서 출제의 어려움 때문인지는 몰라도 비중이 낮게 나타나고 있기 때문이며 일선학교 현장에서도 논리적 사고력을 기르는 데 강력한 도구인 공간기하 논증단원을 소홀히 다루고 있는 실정이다.

고등학교 수학Ⅱ(자연과정)에서 공간도형 단원의 논증기하는 공간에서의 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계 및 도형의 한 평면 위로의 정사영에 대한 용어의 정의와 명제의 증명으로 이루어져 있다. 고등학교 수학과 교육과정 해설(교육부, 1995, 6, 20)에서 「'수학Ⅱ'는 '공통수학'과 '수학Ⅰ'을 이수하고 난 후에 이수하는 과목으로서, 장차

---

1) 김연식·허혜자, 수학 불안 요인에 관한 연구, 대한수학교육학회 논문집 제5권 제2호(1995).

수학을 보다 더 요구하는 자연 과정 학생들이 이수해야 할 과목이며, 보다 심화되거나 새로운 수학적 지식과 기능 및 고차적인 사고력을 요구하는 과목이다. 따라서, '수학Ⅱ'의 학습은 '공통수학', '수학Ⅰ'에서 학습한 개념, 원리 및 법칙을 토대로 하여 이를 심화시키고, 새로운 내용을 학습하며, 수학적 사고력, 논리적 추론력, 창의적 문제 해결력을 기를 수 있도록 해야 한다.」고 기술되어 있으며, 「공간도형은 공리계를 사용하지 않도록 하며, 공간좌표는 평면좌표의 연속된 수준에서 간단히 다룬다.」고 지도상의 유의점을 제시하고 있으나, 공간기하에 대한 공리 5 개를 논의의 출발점으로 삼지 않으므로써 논리 전개가 애매모호하게 되고 이로 말미암아 직관적으로 참이라고 여겨지는 명제에 대한 증명을 대부분의 교사나 학생 모두가 어렵게 받아들여지고 있을 뿐만 아니라 교과 내용의 구성과 논리 전개가 부적절하고 미흡한 점이 발견되었다. 이는 논증기하에 대한 충분한 이해가 해석기하를 학습하는 데 도움이 된다는 점을 감안할 때 교과 내용의 구성 문제에 대하여 재고해야할 필요가 있다고 여겨진다.

제 Ⅱ장에서는 평면기하와 공간기하에서 논증의 토대가 되는 Hilbert의 공리를 살펴보고, 제 Ⅲ장에서는 증명지도의 방향을 모색해 보며, 제 Ⅳ장에서는 현행 교과서 내용을 분석하고 문제점을 도출하여 논증기하 내용 구성에 대한 개선 방안을 마련하였다.

Ⅱ. 평면기하와 공간기하에서의 Hilbert의 공리와 논리율

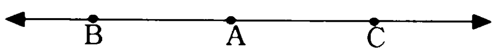
1. Euclid의 공준과 공리

[정의] 두 점 A, B가 주어질 때 **선분(segment)**AB는 그의 원소가 두 점 A, B와 직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 위의 A와 B 사이에 있는 점들로 이루어진 집합이다. 이 때 두 주어진 점 A, B를 선분 AB의 끝점이라고 부른다.

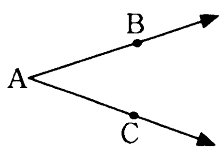
[정의] 두 점 O, A가 주어질 때 선분 OP가 선분 OA와 합동이 되는 모든 점 P의 집합을 **중심(center)**이 O인 **원(circle)**이라 하고 각각의 선분 OP를 원의 반지름이라고 한다.

[정의] **반직선(ray)** $\overrightarrow{AB}$ 는 직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 위에 놓여 있는 다음과 같은 점들의 집합이다 : 선분 AB에 속해 있는 점들과 B가 A와 C 사이에 있는 모든 점 C의 합집합. 반직선 $\overrightarrow{AB}$ 는 A로부터 방사되고 직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 의 부분이라고 말해진다.

[정의] $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{AC}$ 가 한 점 A에서 방사된 서로 다른 반직선이고 같은 직선 $\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{AC}$ 의 부분이면 그들은 서로 **반향(opposite)**이라고 한다.

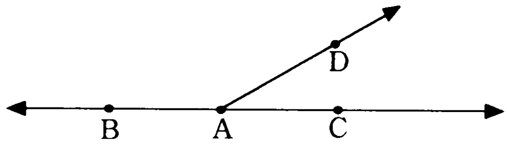


[정의] "**꼭지점이 A인 각**" (angle with vertex A)은 점 A로부터 방사된 반향이 아닌 두 반직선 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 와 그 점 A를 한 조로 하는 집합이다. 이 때 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 를 각의 **변(side)**이라고 한다.

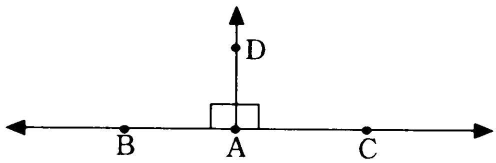


꼭지점이 A인 각을 ∡A, ∡BAC, ∡CAB 등으로 나타낸다.

[정의] 두 각 ∡BAD와 ∡CAD가 공통변 $\overrightarrow{AD}$ 를 갖고 또 다른 두변 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{AC}$ 가 반향 반직선을 이루면 이 각들은 서로 **보각(supplementary angles)**을 이룬다고 한다.



[정의] 각 ∡BAD가 그의 보각과 합동이면 그것을 **직각(right angle)**이라 한다.

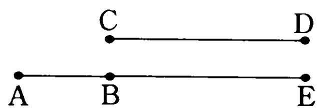


[정의] 두 직선 l, m 이 교차하지 않으면, 즉 그들이 어떤 공유점도 갖지 않으면 두 직선은 **평행(parallel)**이라고 한다.

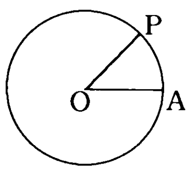
公準

1. 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 P와 Q를 지나는 직선 l 이 유일하게 존재한다.

2. 선분을 계속해서 직선으로 연장할 수 있다. 즉, 임의의 두 선분 AB, CD에 대하여 B가 A와 E사이에 있고 선분 CD가 선분 BE와 합동인 점 E가 유일하게 존재한다.



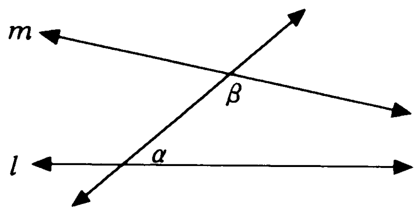
3. 임의의 서로 다른 두 점 O, A에 대하여 중심이 O이고 반경이 OA인 원이 존재한다.

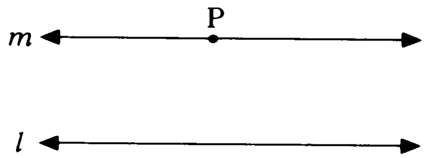


4. 모든 직각은 서로 합동이다.

5. 한 직선이 두 직선과 만나고 같은 쪽에서 합이 2직각보다 작은 내각을 만들 때, 이들 직선을 한없이 연장하면 2직각보다 작은 각이 있는 쪽에서 만나는 것

⇔ 한 직선 l과 l 위에 있지 않은 한 점 P가 주어질 때 P를 지나서 l과 평행인 직선 m이 유일하게 존재한다.





共通槪念(公理)

1. 같은 것에 같은 것은 또 서로 같다. $a=b,\ a=c \Rightarrow a=c$

2. 같은 것에 같은 것을 더하면 그 전체는 같다. $a=b \ \Rightarrow a+c=b+c$

3. 같은 것에서 같은 것을 빼면 그 나머지는 같다. $a=b \ \Rightarrow a-c=b-c$

4. 서로 포개지는 것은 서로 같다. $A=B \ \Rightarrow m(A)=m(B)$

5. 전체는 부분보다 크다. $A \subset B \ \Rightarrow m(A) < m(B)$

2. Hilbert의 공리

힐버트의 기하학 기초론은 공리주의 입장에선 수학을 유클리드기하학의 재구성이라는 형태로 실현시켜 낸 것과 또한 그렇게 함으로써 유클리드원론의 논리적 결함을 완전히 보완시킨 것으로, 그 후의 수학에 큰 영향을 주었고 높은 평가를 받았다.

힐버트는 무정의 용어로서 '점', '직선', '위에 있다', '사이에 있다', '합동이다'를 선택하여 이들에 대한 공리를 결합, 순서, 합동, 평행, 연속의 5 群으로 나누어 제시했다.

제 Ⅰ군 결합의 공리

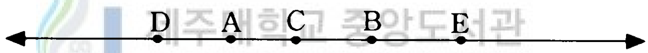
Ⅰ-1. 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 A, B를 지나는 직선은 적어도 하나 있고, 오직 하나뿐이다.

Ⅰ-2. 한 직선 위에 적어도 두 점이 있다. 또 임의의 직선에 대하여 그 직선 위에 없는 점이 적어도 하나 존재한다.

제 Ⅱ군 순서의 공리

Ⅱ-1. 점 C가 점 A와 B 사이에 있으면, A, B, C는 한 직선 위에 있고, 또 C는 B와 A 사이에 있으며, B는 C와 A 사이에 없고, A는 C와 B 사이에 없다.

Ⅱ-2. 서로 다른 임의의 두 점 A, B에 대하여 A와 B 사이에 점 C가 존재하고, A가 D와 C 사이에 있고, 또 B가 A와 E 사이에 있도록 하는 점 E가 존재한다.



Ⅱ-3. 한 직선 위에 서로 다른 세 점 A, B, C가 있으면 그 가운데 오직 한 점만이 다른 두 점 사이에 있다.

[정의] 선분 AB란, A, B와 A, B 사이에 있는 모든 점을 말한다. 이 때 A, B는 선분 AB의 끝 점이라고 한다. 점 C가 선분 AB 위에 있다 라는 것은 C가 A나 B이거나 A, B 사이의 점일 때를 말한다.

[정의] 두 직선, 한 직선과 한 선분, 두 선분이 만난다란 것은 그들 둘에 공통인 점이 존재할 때를 말한다.

[정의] A, B, C가 한 직선 위에 있지 않은 세 점일 때 삼각형 ABC란 세 선분 AB, BC, CA를 말한다. 이 때 선분 AB, BC, CA를 삼각형ABC의 변이라 하고, A, B, C를 꼭지점이라고 한다.

Ⅱ-4. **(Pasch의 공리)** 삼각형의 한 변과 만나되, 그 삼각형의 꼭지점을 지나지 않는 직선은 그 삼각형의 다른 변과 반드시 만난다.

제Ⅲ군 합동의 공리

Ⅲ-1. A, B는 서로 다른 두 점이고, A′ 이 직선 m 위에 있는 점이라면 A, B가 A′ , B′ 과 합동이 될 점 B′ 과, A, B가 A′ , B″ 과 합동이 될 점 B″ 이 m 위에 존재하고, 또 이와 같은 점은 이 두 점뿐이다. 더욱 A′ 은 B′ 과 B″ 사이에 있다.

Ⅲ-2. A, B와 C, D가 E, F와 합동이면 A, B와 C, D는 서로 합동이다.

Ⅲ-3. C가 A와 B 사이에, C′ 이 A′ 과 B′ 사이에 있을 때 A, C가 A′ , C′ 과 합동이고 C, B가 C′ , B′ 과 합동이면 A, B는 A′ , B′ 과 합동이다.

[정의] 두 선분 AB, CD가 합동이란 A, B와 C, D가 합동일 때를 말한다. 이 때 AB≡CD로 나타낸다.

[정의] 반직선 AB란 A, B 사이의 모든 점과, 점 B 자신과, B가 A와 C 사이에 있는 모든 점 C를 말한다. 이 때 반직선 AB는 점 A를 끝점으로 갖는다고 한다.

[정리] B′ 이 반직선 AB의 임의의 점이라면 반직선 AB′ 과 AB는 같다.

[정의] 각 BAC란 점 A와 반직선 AB, AC를 말한다. 이 때 A를 각 BAC의 꼭지점, 반직선 AB, AC를 각 BAC의 변이라 한다.

[정의] 삼각형 ABC에서 각 BAC, CBA, ACB를 삼각형 ABC의 각이라고 한다. 또 ∠BAC를 변 AB, AC의 사이의 각이라 한다.

Ⅲ-4. 두 변이 한 직선 위에 있지 않는 각 BAC 및 서로 다른 두 점 A′ , B′ 에 대하여, 각 B′ A′ C′ 와 합동인 두 반직선 A′ C′ 과 A′ C″ 이 존재하고, 또 오직 그것 뿐이다. 더욱이 D′ 이 반직선 A′ C′ 위에, D″ 이 반직선 A′ C″ 위에 있으면 선분 D′ D″ 은 직선 A′ B′ 과 만난다. 두 각 BAC와 각 B′ A′ C′ 이 합동일 때 기호 ∠BAC≡∠B′ A′ C′ 으로 나타낸다.

Ⅲ-5. 모든 각은 자기 자신과 합동이다.

Ⅲ-6. 두 삼각형 ABC와 A′ B′ C′ 에서 AB≡A′ B′ , AC≡A′ C′ , ∠BAC≡∠B′ A′ C′ 이면 ∠ABC≡∠A′ B′ C′ , ∠ACB≡∠A′ C′ B′ 이다.

제Ⅳ군 평행의 공리

Ⅳ-1. (Playfair의 공리) m 을 직선, A를 m 위에 있지 않는 점이라고 할 때, A를 지나고 m과 만나지 않는 직선은 많아야 하나뿐이다.

Ⅴ군 연속의 공리

Ⅴ-1. (Archimedes의 공리) 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 있다면, 적당한 자연수 n에 대하여 반직선 AB위에 서로 다른 A_1, A_2, …, A_n을 잡아 다음 조건이 성립하도록 할 수 있다.

(1) $CD \equiv AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \cdots \equiv A_{n-1}A_n$

(2) B는 A와 A_n 사이에 있는점

Ⅴ-2. (완전성의 공리) 한 직선 위에 있는 점은 공리 Ⅰ-1, Ⅰ-2, Ⅱ-1, Ⅱ-2, Ⅱ-3, Ⅲ-1, Ⅲ-2, Ⅴ-1을 만족하는 한, 그 이상 확대 불가능한 점들이다.

3. 공간기하학에 관한 공리군

1. 각 평면에는 적어도 한 직선 위에 있지 않는 세 점이 존재한다.
2. 모든 점이 한 평면 위에 있는 것은 아니다.
3. 한 직선 위에 있지 않는 세 점은 오직 한 평면 위에 있다.
4. 만일 한 직선 위의 두 점이 한 평면 위에 있으면, 그 직선 위의 모든 점과 그 직선 자체는 그 평면 위에 있다.
5. 만일 두 평면 α, β가 한 점 A를 공유하면, α, β는 제 2의 점 B를 공유한다.

※증명이 옳다는 것을 동의하기 위해서 꼭 합의해야 할 약속

약속1. 더 이상 그 정당성을 보일 필요가 없는 “공리”, “공준”이라고 불리는 명제를 인정해야 한다.

약속2. 한 명제가 다른 명제로부터 "논리적으로 추론될 수 있다."는 사실, 즉 추론에 관한 어떤 규칙에 동의해야 한다.

4. 論理律

H, C, S가 명제들일 때, 통상적인 표기 "H⇒C"는 "H이면 C이다"를 의미하고 표기 "~S"는 S의 부정을 의미한다.

논리율 1. 서술되지 않은 가정은 결코 증명 속에서 사용될 수 없다.

논리율 2. (귀류법). 명제 "H⇒C"를 증명하기 위하여 결론 C의 부정을 가정하고 가정 H를 이용하여 모순명제를 추론하다.

논리율 3. 명제 "~(~S)"는 "S"와 동일한 의미를 갖는다.

논리율 4. 명제 "~[H⇒C]"는 "H 그리고 ~C"와 동일한 의미를 갖는다.

논리율 5. 명제 "~[S_1 그리고 S_2]"는 "[~S_1 또는 ~S_2]"와 동일한 의미를 갖는다.

논리율 6. 명제 (긍정식). P⇒Q이고 P가 증명 속에 있는 단계이면 Q도 정당한 단계이다.

논리율 7. (1) P⇒[P 또는 Q], Q⇒[P 또는 Q]

(2) [P 그리고 Q]⇒P, [P 그리고 Q]⇒Q

(3) [~Q⇒~P]⇔[P⇒Q]

(4) [[P⇒Q] 그리고 [Q⇒R]]⇒[P⇒R]

논리율 8. 모든 명제 P에 대하여 P가 성립하든지 아니면 그의 부정 ~P가 성립해야 한다.

Ⅲ. 증명지도

1.논증기하 지도의 목적

논증기하 지도의 주요한 목적은, 공간적인 상상력을 신장시키고 도형에 관한 기본적인 명제와 그 적용에 친숙케 하며, 연역적 증명에 대한 이해와 그 가치를 이해시키고, 정밀하고 간결한 표현과, 아이디어의 논리적인 조직과 기억 습관을 형성하는데 있으며, 특히 '…이면 …이다.' 형태의 가설-연역적 사고 방법과 증명의 본질을 이해시키고 증명 능력을 개발하는 것을 중요한 목표로 하고 있다. (Fawcett, 1938, pp.3-4)
유클리드 기하는 유클리드의 원론에서 유래된 정의, 공리, 공준으로부터 정리를 증명하는 연역적 · 공리적인 체계이다.

오늘날 그리스의 각급 학교는 교수 요목에서 유클리드 기하를 특별히 강화하고 있다. 그 이유는 유클리드 기하학은 고대 그리스의 자랑이며, 모든 수학 영역의 학문적 기초가 되는 표준으로 간주될 뿐 아니라 학생들의 사고력을 보다 훌륭히 함양할 수 있다고 여기기 때문이다. 특히 플라톤의 전통은 기하학이 실재적인 필요뿐만 아니라 궁극적인 존재에 대한 "진짜" 참인 지식에 목표를 둘 것을 요구하였는데, 후자의 목표는 수학교재의 내용이 유클리드 원론의 구성 체제를 따랐을 때 더 효과적으로 달성된다고 생각하기 때문이다.2)

최근 유클리드 기하는 20년 전 보다도 학교수학에서 그 위치가 약화되었다. 이러한 쇠퇴의 이유는 내용에 대한 불만족보다는 유클리드 기하의 본질을 형성하는 논리적 추론에 의해 야기되는 어려움에서 기인한다. 유클리드 기하가 학교 교재로 계속 다루어지고 있는 이유를 Fehr는 다음과 같이 지적하고 있다.3)

유클리드 기하가 잔존하고 있는 것은, 무엇보다도, 그것이 학생들에게 수학의 공리적 구조의 성격을 이해시키는 데 있어서, 현존하는 것 중 유일한 교재라고 하는 가정 때문이다. 이러한 사고 방식 때문에 산술이나 대수에서 반세기 이상 초등적인 방법으로 공리적 구조의 성격을 나타내는 전개를

2) Charalampos Toumasis(1990), The epos of euclidean geometry in greek secondary education(1836-1985): perssure for chang and resistance, Educational Studies in Mathematics 21, pp.491-508

3) Fehr, H. F.(1963), Reform of instruction in geometry, Mathematical Education Notes, March, p.324.

해 왔는데도 중등학교 수준에서는 극히 최근까지도 이들 교재를 고전적 형식 이외의 형태로 지도하는 것을 피해 왔다. 기하 이외의 영역을 사용해서 공리적 구조의 개념을 발전시킬 수 있고 그렇게 함으로써 학교 기하를 현대적 관점이라고 부를 수 있는 처리를 할 수 있다는 것은 분명하다. 이런 것을 충분히 알고 있으면서도 현재의 기하 교육의 개선을 위한 노력은 본질적으로 유클리드를 보존하는 일을 목표로 하고 있다.

2. 증명 지도의 원리

Dreyfus와 Hadars(1987)는 학생들이 증명 학습에서 겪는 어려움을 분석한 후에, 교사에게는 명백해 보일 수도 있지만 평균적인 능력을 지닌 대부분의 학생들에게는 잘 이해되지 않는 원리로서 다음 여섯 가지를 들고 있다.

① 정리는 예외가 없으며 수학적 명제는 상상할 수 있는 모든 예에서 정확할 때에만 옳다
② 명백한 명제조차도 증명되어야 하며 증명은 어떤 도형의 외견상의 특징에 따라 좌우되지 않는다.
③ 증명은 일반적이어야 하며 한 두 가지 특별한 경우로는 일반적인 명제를 증명할 수 없지만 하나의 반례는 그것을 반박하기에 충분하다.
④ 어떤 정리의 전제가 명확히 확인되어야 하며 결론과는 구분되어야 한다.
⑤ 옳은 명제의 역은 반드시 옳지는 않다.
⑥ 복잡한 도형은 기본적인 여러 요소로 구성되며 그 요소는 증명에서 필수적인 역할을 할 수도 있고 제시된 도형이 표준적인 위치에 있지 않은 경우에도 정확히 해석된다는 것 등이 그것이다.

3. 증명 지도의 방법

증명 지도는 학생들을 수학에 대한 새로운 이해 방법과 기술 방법, 새로운 형태의 수학적 사고 방법의 세계에 적응시켜가는 과정이다.[4] 증명을 뛰어 넘고 단지 정리만을 읽어 나아가면 내용이 피상적이 되고 결국 알 수 없게 된다. 따라서 수학을 이해하기 위해서는 증명을 명확히 하면서 따라가는 길 밖에 없다. 증명 체계를 이해하려면 각 단계의 이유를 찾기 위한 사고실험이 요구된다. 증명을 이해한다는 것은 증명에 오류가 없다는 것이 아니라

4) 우정호, 증명 지도의 재음미, 대한수학교육학회 논문집 제4권 제1호(1994), pp.18-19

스스로 사고실험을 해보는 것이다. 증명을 배우기 전까지 푼다든가 나타낸다든가 구하는 형식의 문제에서 증명하는 문제로의 이행은 학생들에게 상당히 어려움을 제기한다. 특히 기호에 의한 서술과 이유의 서술을 포함하는 증명 쓰기는 학생들에게 매우 생소한 내용으로 학습의 저해 요인이 된다. 증명 쓰기를 완전히 학생에게 맡기면 어려움이 지나치고 시간이 많이 소요되며, 교사가 완전한 증명을 일방적으로 제시하면 학생들의 사고가 발달되지 않으므로 교사의 안내를 받는 학생들의 적절한 사고 실험을 할 수 있는 활동이 요구된다. 증명의 발견과 발명은 분석적 사고, 추측과 귀납 추론, 발산적 사고가 개제되는 문제 해결의 특수한 경우로, Polya의 발견술은 답을 구하는 문제와 함께 증명 문제의 학습-지도에 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

Ⅳ. 교과서 내용 분석과 문제점 도출 및 개선 방안

1. 직선 · 평면의 위치 관계

※ 공간도형의 성질을 증명하기 위하여 다음의 기본 성질을 이용한다.

<공간도형의 기본 성질>

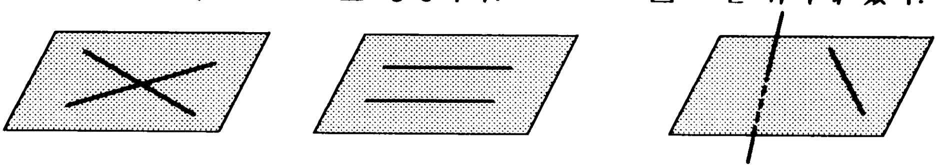
① 한 직선 위에 있지 않은 세 점을 지나는 평면은 오직 하나 뿐이다.

② 한 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 그 평면 위에 있다.

③ 한 점을 공유하는 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다.

<두 직선의 위치 관계>

① 만난다. ② 평행하다. ③ 꼬인 위치에 있다.



【명제 0-1】 두 직선 l, m 이 꼬인 위치에 있을 때, m을 포함하는 평면이 직선 l과 만나면 오직 한 점에서 만난다.

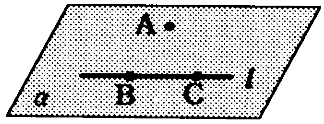
【증명】 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다고 가정하면 기본성질 ②에 의해 두 점 A, B를 지나는 직선 l은 m을 포함하는 평면 위에 있다.

따라서 두 직선 l, m은 같은 평면 위에 있게 되어 꼬인 위치에 있다는 조건에 모순이다.

그러므로 두 **직선 l, m 이 꼬인 위치에 있을 때, m을 포함하는 평면이 직선 l과** 만나면 오직 한 **점에서** 만난다.

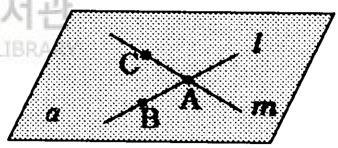
【명제 0-2】 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점을 지나는 평면은 오직 하나 존재한다.

【증명】 직선 l 위에 있지 않은 한 점을 A라 하자.
l 위의 서로 다른 두 점 B, C를 잡으면 A, B, C는 한 평면 위에 있지 않은 세 점이므로 기본성질 $\boxed{1}$에 의해 오직 한 평면 α를 결정하고 기본성질 $\boxed{2}$에 의해 B, C를 지나는 직선 l은 평면 α 위에 있다.
따라서 l과 A는 오직 하나의 평면 α를 결정한다.



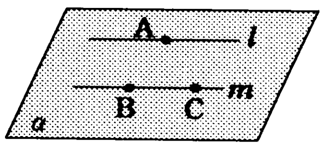
【명제 0-3】 한 점에서 만나는 두 직선을 포함하는 평면은 오직 하나 존재한다.

【증명】 만나는 두 직선 l, m의 교점을 A, l, m 위의 A아닌 점 B, C를 각각 잡으면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에있지 않으므로 기본성질 $\boxed{1}$에 의해 이 세 점을 지나는 평면 α가 단 하나 존재한다.
기본성질 $\boxed{2}$에 의해 α 위의 두 점 A, B를 지나는 직선 l과 두 점 A, C를 지나는 직선 m은 α 위에 있다.
따라서, 한 점에서 만나는 두 직선을 포함하는 평면은 오직 하나 존재한다.



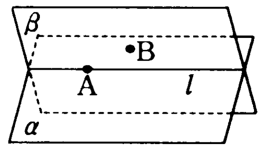
【명제 0-4】 평행한 두 직선을 포함하는 평면은 오직 하나 존재한다.

【증명】 평행한 두 직선 l, m을 포함하는 평면을 α라하자.
l 위의 한 점 A와 m 위의 두 점 B, C를 잡으면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않으므로 기본성질 $\boxed{1}$에 의해 세 점 A, B, C를 지나는 평면은 오직 하나뿐이다. 즉, 평면 α는 오직 하나 존재한다.



【명제 0-5】 서로 다른 두 평면이 한 점을 공유하면, 이 두 평면은 단 하나의 직선을 공유한다.

【증명】 서로 다른 두 평면 α, β가 한 점 A를 공유하면 기본 성질 **3**에 의해 α, β는 A를 지나는 한 직선 l을 공유한다.

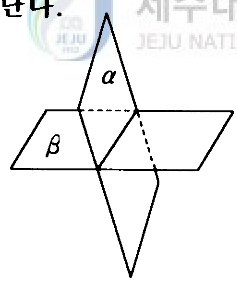


만일, α, β가 직선 l 밖의 다른 한 점 B를 공유한다고 가정하면, **명제 0-2** 에 의해 두 평면 α, β는 같아져야 하므로 가정에 모순이다. 따라서 두 평면 α, β는 직선 l만을 공유한다.

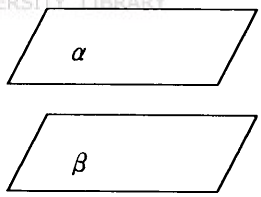
※ 공간에서 두 평면의 위치 관계는 다음 두 가지 경우가 있다.

<두 평면의 위치 관계>

1 만난다.



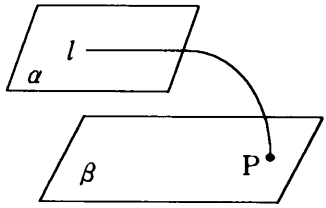
2 평행하다.



[정의] 서로 다른 두 평면 α, β가 공유점을 가질 때, 이 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다, 이 때, 두 평면은 만난다고 하고, 그 직선을 **교선**이라고 한다.

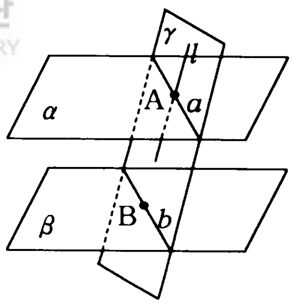
이에 대하여 두 평면 α, β가 점을 공유하지 않을 때, 이 두 평면은 **평행**이라 하고, $\boldsymbol{\alpha /\!/ \beta}$로 나타낸다.

【명제 0-6】 두 평면 α, β가 평행일 때, α 위의 임의의 직선을 l이라고 하면 l과 β는 서로 만나지 않는다. 즉, $l // \beta$



【증명】 l 이 β와 한 점 P에서 만난다고 가정하면 점 P는 α, β의 공유점이 되어 $\alpha // \beta$인 조건에 모순이다.
따라서 l과 β는 서로 만나지 않는다.

【명제 0-7】 두 평면 α, β가 평행일 때, α와 한 점에서 만나는 직선 l은 β와도 한 점에서 만난다.



【증명】 (i) l이 β와 만나지 않는다고 가정하자.
l이 α와 만나는 점을 A라 하고, l과 β 위의 한 점 B가 결정하는 평면을 γ라 하면 γ와 α는 한 점 A를 지나는 직선 a를 공유하고, γ와 β는 한 점 B를 지나는 직선 b를 공유한다.
$\alpha // \beta$이므로 a와 b는 만나지 않고 같은 평면 γ 위에 있으므로 $a//b$이다. 또 l과 b는 같은 평면 γ 위에 있고 만나지 않으므로 $l//b$이다.
따라서 a와 l은 b밖의 한 점 A를 지나고 모두 b에 평행한 직선이다.
한 직선 밖의 한 점을 지나 이 직선에 평행한 직선은 하나 밖에 없으므로 $a=l$이 되어 모순이다. 즉, α와 한 점에서 만나는 직선 l은 β와도 만난다.

(ii) l과 β가 두 점 ~~A, P~~에서 만난다고 가정하면 기본성질 $\boxed{2}$에 의해 두 점 ~~A, P~~를 지나는 직선 l은 평면 β 위에 있으므로 A는 α, β의 공유점이 되어 $\alpha // \beta$ 인 조건에 모순이다. 따라서 직선 l은 β와 한 점에서만 만난다.

♣윤옥경의 증명

(i) 평면 α 위의 점 A를 지나는 직선 l이 β와 만나지 않는 다고 하자. l을 포함하고 α, β와 직선 a, b에서 만나는 평면 γ를 생각하면 $\alpha // \beta$이므로 $a//b$이다. l과 β가 만나지 않으면 평면 γ 위에서 $l//b$이고 l, a는 A를 지나므로 $l=a$가 되어 모순이다.

♠검토 : 「l을 포함하고 α, β와 직선 a, b에서 만나는 평면 γ의 존재」에 대한 논거 제시가 없다.

♣이홍천의 증명

직선 l이 β와 만나지 않는다고 하면, l은 β 위에 있거나 $l//\beta$이다.

그런데 $\alpha // \beta$이므로, l은 α 위에 있거나 $l//\alpha$이다.

이것은 가정에 모순이므로 l은 β와도 만난다.

♠검토 : 「$\alpha // \beta$이므로, l은 α 위에 있거나 $l//\alpha$이다.」는 논리적인 근거에 의한 결론으로서 적당하지 않다.

♣박규홍의 증명

l이 β와 만나지 않으면

$l//\beta \Rightarrow \alpha // \beta$이므로 $l//\alpha$. 이것은 가정에 모순

$\therefore$ l과 β는 만난다.

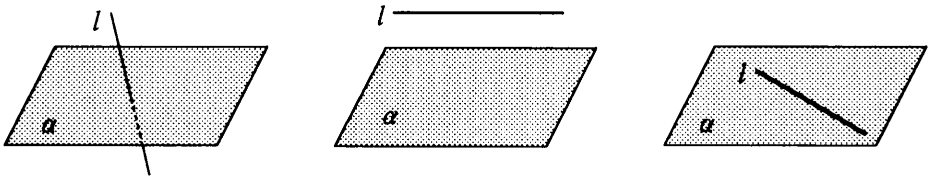
♠검토 : 「$l//\beta \Rightarrow \alpha // \beta$이므로 $l//\alpha$」는 논리적인 근거에 의한 결론으로서 적당하지 않다.

★ 조사대상 12개 교과서에서 명제 0-7을 다룬 교재는 3개뿐이나 공간기하 이론 전개에서 필요한 내용이므로 교과 내용에 포함시켜야 한다.

※ 공간에서의 직선과 평면의 위치 관계는 다음 세 가지 경우가 있다.

<직선과 평면의 위치 관계>

① 만난다. **② 평행하다.** **③ 직선이 평면에 포함된다.**



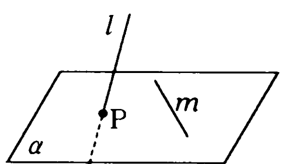
【정의】 직선 l과 평면 α가 단 한 점 P를 공유할 때, l과 α는 만난다고 하고, **점 P를 l과 α의 교점**이라고 한다.

이에 대하여 직선 l과 평면 α가 공유점을 가지지 않을 때, **l과 α는 평행이라 하고, $l // \alpha$**로 나타낸다.

직선 l과 평면 α가 서로 다른 두 점을 공유하면 **l은 α에 포함된다**. 즉, l 위의 모든 점은 α 위의 점이다.

【명제 0-8】 평면 α와 직선 l이 한 점 P에서 만날 때, P를 지나지 않는 α 위의 임의의 직선 m은 직선 l과 꼬인 위치에 있다.

【증명】 직선 l이 직선 m과 만나지 않음은 명백하다.



직선 l이 직선 m과 평행하다고 하면 l과 m이 결정하는 평면을 β라 할 때, β는 m과 점 P를 포함하므로 m과 점 P가 결정하는 평면 α와 일치한다.

따라서 평면 α는 직선 l을 포함하게 되어 모순이다.

그러므로 직선 l과 직선 m은 평행하지 않다.

직선 l이 직선 m과 만나지 않고 평행하지도 않으므로 l과 m은 꼬인 위치에 있다.

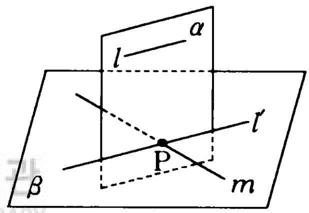
♣윤옥경의 증명

l, m은 만나지도 않고, 동일 평면상에 있지 않으므로 l, m은 꼬인 위치에 있다.

♠검토 : 「l, m이 동일 평면상에 있지 않다는 것」에 대한 논거를 제시해야 한다.

【명제 0-9】 두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 l을 포함하는 평면 α가 직선 m과 한 점 P에서 만난다고 한다. 평면 α 위에서 P를 지나고 l과 평행인 직선을 l'이라 하면 l'과 m이 결정하는 평면 β는 직선 l에 평행하다.

【증명】 평면 α는 평행한 두 직선 l, l'이 결정하는 평면이 되고, 직선 l'은 두 평면 α, β의 교선이다. 직선 l이 평면 β와 만난다고 하면 그 교점은 α, β의 교선 l' 위에 있고, $l \mathbin{/\!/} l'$이라는 조건에 모순이다. 따라서 l은 β와 만나지 않으므로 $l \mathbin{/\!/} \beta$이다.



2. 평행과 수직

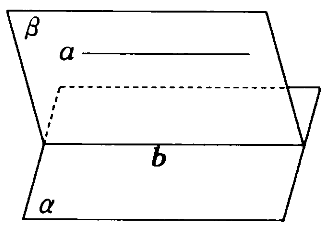
<정리 1>

직선 a와 평면 α가 평행할 때, a를 포함하는 평면 β와 α의 교선 b는 직선 a에 평행하다

【증명】 $a \mathbin{/\!/} \alpha$ 이므로 a와 α는 공유점을 가지지 않는다.

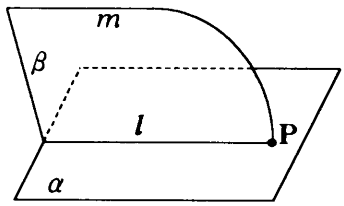
따라서 a는 α 위의 직선 b와 만나지 않는다.

a와 b는 같은 평면 β 위에 있고 만나지 않으므로 $a \mathbin{/\!/} b$



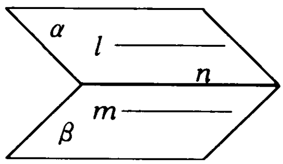
【명제 1-1】 평행한 두 직선 l, m 중에서 l 만을 포함하는 평면 α는 직선 m에 평행하다

【증명】 $l // m$ 이므로 l과 m은 한 평면 β를 결정하고, α, β의 교선이 l이다. 만일 α와 m이 평행하지 않다면 m과 α는 한 점 P에서 만나고, 점 P는 α와 β의 교선 l 위에 있게 된다. 따라서 두 직선 l, m이 한 점 P에서 만나게 되어, $l // m$ 이라는 가정에 모순이다. $\therefore m // \alpha$



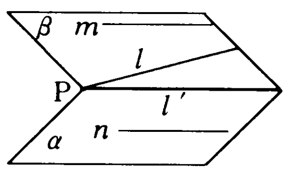
【명제 1-2】 두 직선 l, m이 평행할 때, l, m을 하나씩만 품는 두 평면 α, β의 교선 n은직선 l, m에 모두 평행하다.

【증명】 명제 1-1에 의하여 m을 포함하고 l을 포함하지 않는 평면 β와 직선 l은 평행하며, m을 포함하지 않는 평면 α는 직선 m과 평행이다. n은 α, β의 교선이므로 **정리 1** 에의하여 $l // n$, $m // n$ 이다.



【명제 1-3】 세 직선 l, m, n에 대하여 $l // m$, $m // n$ 이면 $l // n$이다.

【증명】 세 직선이 한 평면 위에 있는 경우는 명백하다. 따라서 한 평면 위에 있지 않는 경우를 증명하면 된다. l 위의 한 점 P와 n에 의해 결정되는 평면을 α, l과 m에의해 결정되는 평면을 β라 하고, α,β의



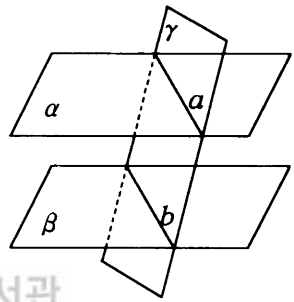
교선을 l' 라 하면, $m//n$ 이므로 **명제 1-2** 에 의하여 $l'//m$, $l'//n$

β 위에서 점 P를 지나고 m과 평행인 직선은 오직 하나뿐이므로 $l=l'$

$$\therefore l // n$$

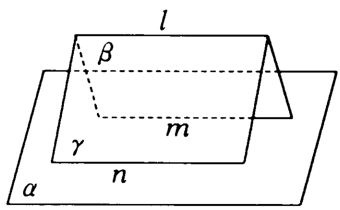
【명제 1-4】 평행한 두 평면 α, β가 다른 한 평면 γ와 만날 때, 그 교선을 각각 a, b라 하면 $a//b$이다.

【증명】 두 직선 a, b는 한 평면 γ 위에 있다.
또 두 평면 α, β가 만나지 않으므로 직선 a, b도 만나지 않는다.



【명제 1-5】 직선 l과 평면 α가 평행할 때, l을 품는 두 평면과 α와의 교선을각각 m, n이라고 하면, $m//n$ 이다.

【증명】 직선 l을 포함하는 두 평면 β,γ와 평면 α와의 교선을 각각 m, n이라 한다. $l//\alpha$이고 l을 포함하는 평면 β와 평면 α의 교선이 m이므로 **정리** 1에 의하여 $l//m$ 이다.
마찬가지로 $l//n$ 이다. $l//m$, $l//n$ 이므로
명제 1-3에 의하여 $m//n$ 이다.



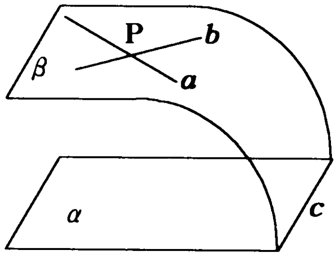
<정리 2>

평면 α 밖의 한 점 P를 지나는 두 직선 a, b가 모두 α에 평행하면 a, b로 결정되는 평면 β는 α에 평행하다.

【증명】 α, β가 평행하지 않다고 가정하고, 그 교선을 c 라고 하면 $a//\alpha$, $b//\alpha$ 이므로 **정리 1** 에 의하여 $a//c$, $b//c$

따라서, $a//b$ 이고 이것은 a, b가 한 점 P에서 만난다는 가정에 모순이다.

$\therefore\ \alpha//\beta$



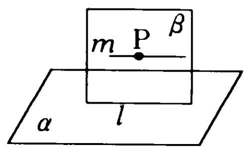
【명제 2-1】 평면 α 밖의 한 점 P를 지나고, α 위의 직선 l과 평행한 직선 m은 단 하나 존재하며 평면 α와 평행하다.

【증명】 직선 l과 점 P가 결정하는 평면을 β라 하자.

β 위에서 P를 지나고 l에 평행한 직선 m은 오직 하나 존재한다.

m이 평면 α와 한 점에서 만난다고 가정하면 그 교점은 α, β 의 교선 l 위에 있게되고 이 교점은 l, m의 공유점이 되므로 모순.

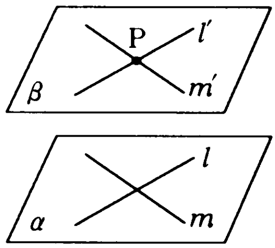
$\therefore\ m//\alpha$



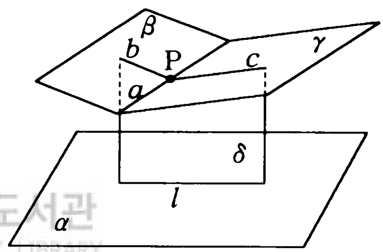
★ **조사대상 12개 교과서에서 명제 2-1을 다룬 교재는 하나도 없으나 명제 2-2의 증명을 위해 필요한 명제이다.**

【명제 2-2】 평면 α 밖의 한 점 P를 지나고, α와 평행한 평면은 오직 하나 있다.

【증명】 (i) 평면 α 위에서 만나는 임의의 두 직선을 l, m라하고, P를 지나고 l, m과 평행한 직선을 각각 l', m' 라 하면 **명제 2-1** 에 의하여 $l' // \alpha$, $m' // \alpha$
따라서 **정리 2** 에 의하여 $\beta // \alpha$



(ii) α와 평행한 평면은 오직 하나 있음을 보이자.
P를 지나고 α와 평행한 평면이 β, γ의 두 개가 있다고 가정하고 β, γ의 교선을 a라 하자.
α 위에서 a와 평행이 아닌 직선을 l라하고, 직선 l과 점 P가 결정하는 평면 δ와 β, γ의 교선을 각각 b, c라 하면 $l // \beta$, $l // \gamma$ 이므로 $l // b$, $l // c$ 이다.



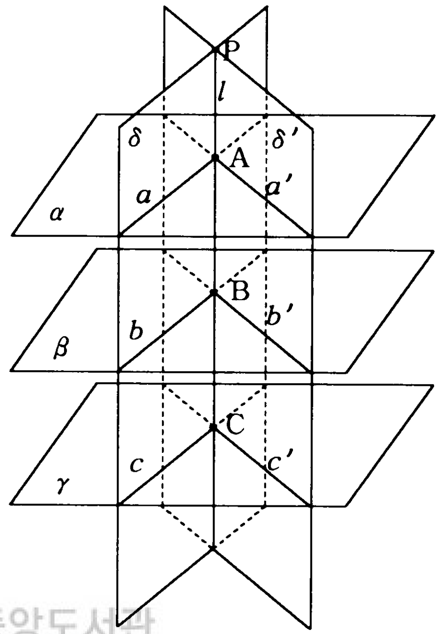
l 밖의 한 점 P를 지나고 l에 평행한 직선은 오직 하나 뿐이므로 b와 c는 일치한다.
따라서 a와 b, a와 c가 결정하는 두 평면 β, γ는 일치한다.
그러므로 α 밖의 한 점 P를 지나고, α와 평행한 직선은 오직 하나 있다.

♣박한식의 교과서는 **명제 2-1**를 제시하지 않고 **명제 2-2**를 증명하고 있다.

♠검토 : 「평면 α의 유일성에 대한 증명 」이 필요하다.

★ **조사대상 12개 교과서에서 명제 2-2를 다룬 교재는 박한식의 교과서 한 개뿐이나 이 명제의 증명 없이 이를 다른 명제(2-3)의 증명에 이용하는 교과서가 있다.**
명제 2-2는 논증기하 지도를 위해 필요한 명제라고 생각하며 교과 내용에 포함시킬 필요가 있다.

【명제 2-3】 세 평면 α, β, γ에 대하여, $\alpha // \beta$, $\beta // \gamma$ 이면 $\alpha // \gamma$ 이다.



【증명】 평면 α 위의 한 점 A와 α 밖의 한 점 P를 지나는 직선 l은 **명제 0-7**에 의해 평면 β, γ와 각각 점 B, C에서 만난다.
A에서 만나는 α 위의 두 직선을 a, a' 라하고, l과 a, l과 a' 에 의해 결정되는 평면을 각각 δ, δ' 라 하면, δ와 β의 교선 b, δ와 γ의 교선 c에 대하여 $a // b$ 이고 $b // c$ 이므로 $a // c$ 이다.
δ' 과 β의 교선 b', δ' 과 γ의 교선 c' 에 대하여 $a' // b'$ 이고 $b' // c'$ 이므로 $a' // c'$ 이다.
$a // c$ 이고 c를 포함하는 평면이 γ이므로 $a // \gamma$, $a' // c'$ 이고 c' 를 포함하는 평면이 γ이므로 $a' // \gamma$
따라서 γ 밖의 한 점 ~~P~~A를 지나고 γ에 평행한 두 직선 a, a' 이 결정하는 평면 α는 평면 γ와 평행하다.

♣ 윤옥경의 증명에서는 세 평면 α, β, γ와 만나는 두 평면 δ, δ' 의 존재성에 대한 서술 없이 논리를 전개하고 있어 직관에 의존한 증명이 되고 있다.

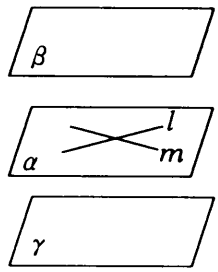
♣ 금종해, 양승갑의 증명

α와 γ가 평행이 아니면 α, γ는 한 점 P를 공유한다.
따라서 β 위에 없는 점 P를 지나 β에 평행한 두 평면 α, γ가 존재하게 되어 모순이다.

$$\therefore\ \alpha // \gamma$$

♠ 검토 : 「β 위에 없는 점 P를 지나 β에 평행한 두 평면 α, γ가 존재하게 되어 모순이다. 」는 **[한 평면 밖의 한 점 P를 지나고, 이 평면과 평행한 평면은 오직 하나 있다.](명제 2-2)**를 이용하고 있으나 금종해, 양승갑의 교과서에는 명제 2-2를 제시하지 않고 있어 추론의 정당성을 확보하지 못하고 있다.

♣ 김연식의 증명



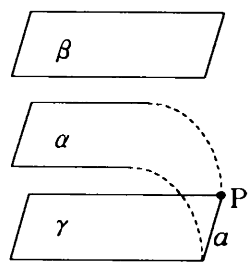
$\alpha // \beta$, $\beta // \gamma$라고 하자. 평면 α 위에서 서로 만나는 두 직선 l, m을 잡으면, $l // \beta$, $m // \beta$ … ①

그런데 직선 l, m은 평면 α 위의 직선이므로, 평면 γ와는 서로 평행하거나 한 점만을 공유한다. 또한 $\beta // \gamma$이므로 직선 l, m이 γ와 한 점을 공유하면, 직선 l, m은 평면 β와도 한 점을 공유하게되어 ①에 모순이다.

따라서, $l // \gamma$, $m // \gamma$이고, $\alpha // \gamma$이다.

♠ 검토 : 「$\beta // \gamma$이므로 직선 l, m이 γ와 한 점을 공유하면, 직선 l, m은 평면 β와도 한 점을 공유 하게되어」는 직관에 의한 논거 제시가 되어 증명의 정당성을 확보하지 못하고 있다. 이는 **[평행한 두 평면 중 한 평면과 만나는 직선은 다른 직선과도 만난다.](명제 0-7)**를 추론의 근거로 제시하여야 하나 김연식의 교과서에서는 이 명제를 다루지 않고 있다.

♣ 이홍천의 증명



α와 γ가 평행이 아니라 하면, 그 교선을 a라 할 때

$a // \beta$

직선 위의 한 점을 P라 하면 α와 γ는 각각 한 점 P를 지나 β와 평행한 평면이다.

이것은 평면 밖의 한 점을 지나 이 평면에 평행인 평면은 하나뿐이라는 데 모순이다.

그러므로 $\alpha // \gamma$

♠ 검토 : 「α와 γ는 각각 한 점 P를 지나 β와 평행한 평면이다.
이것은 평면 밖의 한 점을 지나 이 평면에 평행인 평면은 하나뿐이라는 데 모순이다.」는

[한 평면 밖의 한 점 P를 지나고, 이 평면과 평행한 평면은 오직 하나 있다.](명제 2-2)를 이용하고 있으나 이홍천의 교과서에는 **명제 2-2**를 제시하지 않고 있어 추론의 정당성을 확보하지 못하고 있다.

♣ 박규홍의 증명

평면 β 위에 한 점에서 만나는 두 직선을 a, b라 하면

$\alpha // \beta \Rightarrow a // \alpha$, $b // \alpha$. 또한 $\beta // \gamma \Rightarrow a // \gamma$, $b // \gamma$

정리 2에 의하여 $\alpha // \gamma$

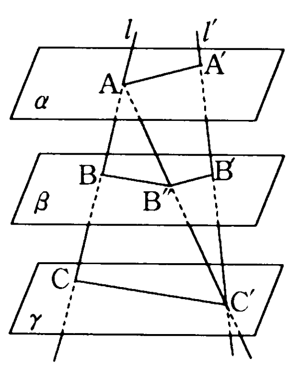
♠ 검토 : 「정리 2에 의하여 $\alpha // \gamma$」라는 결론은 전혀 논리적 추론의 결과가 될 수 없다.

★ **조사대상 12개 교과서에서 명제 2-3을 다룬 교과서는 윤옥경, 금종해, 김연식, 이홍천, 양승갑, 박규홍의 6 개 교과서가 있으나 존재성의 증명이 필요한 윤옥경의 교과서를 제외하면 증명되지 않은 명제를 추론의 근거로 삼거나 또는 논리적 추론이 합당하지 않는 결함을 갖고 있다. 명제 2-3을 증명하는 데 추론의 근거로 삼은 명제 0-7이나 명제 2-2는 모든 교과서에서 취급을 해야할 중요한 명제라고 판단된다.**

【명제 2-4】 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여, $\alpha // \beta // \gamma$라 하자. 두 직선 l, l' 이 각각 세 평면과 A, B, C, A′, B′, C′ 에서 만날 때,

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$ 가 성립한다.

【증명】 $\overline{AC'}$ 과 평면 β의 교점을 B″ 라 하면,



$\alpha // \beta$이므로 $\overline{B''B'} // \overline{AA'}$

$\therefore \overline{A'B'} : \overline{B'C'} = \overline{AB''} : \overline{B''C'}$ …①

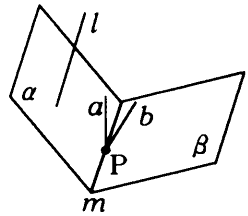
$\beta // \gamma$이므로, $\overline{BB''} // \overline{CC'}$

$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AB''} : \overline{B''C'}$ …②

①, ②에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$

【명제 2-5】 한 직선 l에 평행한 두 평면 α, β의 교선 m은 l과 평행하다.

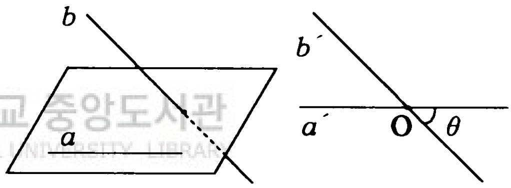
【증명】 직선 l과 m 위의 점 P에 의해 결정되는 평면과 평면 α의 교선을 a, 직선 l과 점 P에 의해 결정되는 평면과 평면 β의 교선을 b라 하면, $l // \alpha$이므로 $l//a$이고, $l//\beta$이므로 $l//b$이다.



l 밖의 한 점 P를 지나고 l과 평행인 직선은 하나뿐이므로 $a=b=m$. 그러므로 $l//m$이다.

<꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기>

【정의】 두 직선 a, b가 꼬인 위치에 있을 때, 한 점 O를 잡아, 이 점을 지나 a, b에 평행인 직선을 각각 a', b' 라 하면 두 직선 a', b' 이 이루는 각의 크기를 두 직선 a, b가 이루는 각의 크기라고 한다.



【명제 3-1】 두 직선 a, b가 꼬인 위치에 있을 때 한 점 O를 잡고, O를 지나고 a, b에 평행한 직선을 각각 a', b' 라 하면 두 직선 a', b' 이 이루는 각의 크기는 O의 위치에 관계없이 일정하다.

【증명】 O 아닌 다른 한 점 O′ 을 지나고 a, b와 평행한 직선을 각각 a'', b''라 하고, 직선a', b', a'', b'' 위에 각각

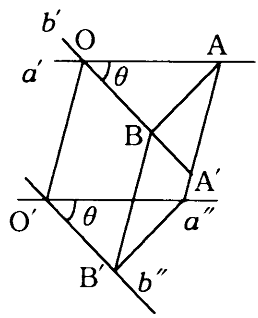
$\overline{OA} = \overline{O'A'}$, $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ 인

점 A, B, A', B' 을 잡으면,

$\square AOO'A'$, $\square BOO'B'$ 은

평행사변형이므로 $\overline{AA'} // \overline{OO'}$,

$\overline{OO'} // \overline{BB'}$ 이고, $\overline{AA'} = \overline{OO'}$, $\overline{OO'} = \overline{BB'}$



따라서 $\overline{AA'} // \overline{BB'}$ 이고, $\overline{AA'} = \overline{BB'}$

∴ $\square ABB'A'$ 은 평행사변형이고 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

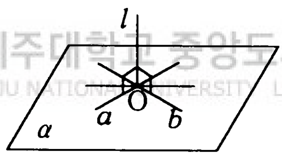
따라서 $\triangle AOB \equiv \triangle A'O'B'$ 이고 $\angle AOB = \angle A'O'B'$

즉, 두 직선 a' , b' 이 이루는 각의 크기는 O의 위치에 관계없이 일정하다.

[정의] 두 직선 a, b가 이루는 각의 크기가 직각일 때, 두 직선 a, b는 서로 수직이라 하고 $\boldsymbol{a \perp b}$ 로 나타낸다.

<직선과 평면의 수직>

[정의] 직선 l이 평면α와 점 O에서 만나고, 점 O를 지나는 α 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l은 평면 α와 **수직**이라 하고, 기호 $\boldsymbol{l \perp \alpha}$로 나타낸다. 이 때 직선 l을 평면 α의 **수선**이라 하고, 점 O를 **수선의 발**이라고 한다.

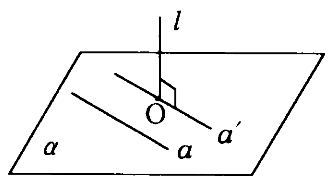


> **【명제 3-2】 직선 l과 평면α가 수직이기 위한 필요충분조건은 l이 α 위의 모든 직선과 수직인 것이다.**

【증명】 직선 l과 α의 교점을 O라 하자

(ⅰ) $l \perp \alpha$ 이면

α 위의 임의의 직선 a에 대하여 O를 지나고 a와 평행인 α 위의 직선을 a' 라 할 때, $a // a'$ 이고



$a' \perp l$ 이므로 $a \perp l$ 이다. 따라서 l 은 α 위의 모든 직선과 수직이다.

(ⅱ) l이 α 위의 모든 직선과 수직이면 l은 α 위의 O를 지나는 모든 직선과 수직이므로$l \perp \alpha$

【명제 3-3】 평행한 두 직선 l, m 에 대하여 l이 평면α와 수직이면 $m \perp \alpha$ 이다.

【증명】 $l \perp \alpha$이면 α 위의 임의의 직선 a 에 대하여 $l \perp a$ 이고, $l \,//\, m$ 이므로 $m \perp a$

$$\therefore\ m \perp \alpha$$

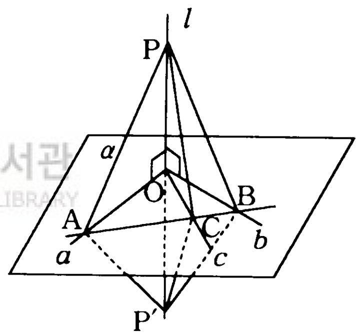
<정리 3>

직선 l이 평면 α 위의 점 O를 지나고, O를 지나는 α 위의 서로 다른 두 직선 a, b 에 수직이면 $l \perp \alpha$ 이다.

【증명】 평면 α 위에서 점 O를 지나고 a, b와는 서로 다른 한 직선을 c 라고 하자.

직선 a, b, c 와 점 O 이외의 점에서 만나는 직선을 그어, 그 교점을 각각 A, B, C 라고 하자.

직선 l 위의 점 O에 대한 두 대칭점 P, P′ 을 잡으면 a, b 는 모두 선분 P, P′ 의 수직이등분선 이므로 $\overline{AP} = \overline{AP'}$, $\overline{BP} = \overline{BP'}$ 이고



선분 AB는 공통이므로

$\triangle PAB \equiv \triangle P'AB$

따라서, $\angle PAB = \angle P'AB$ 즉, $\angle PAC = \angle P'AC$

$\overline{AP} = \overline{AP'}$, $\overline{AC}$는공통이므로 $\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$

$\therefore\ \overline{PC} = \overline{P'C}$

즉, $\triangle CPP'$ 은 이등변삼각형이고, 점 O는 $\overline{PP'}$ 의 중점이므로

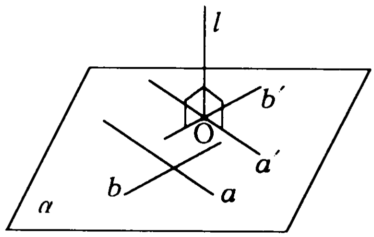
$l \perp \overline{OC}$, 즉, $l \perp c$ 이다.

그러므로 **$l \perp \alpha$ 이다.**

【명제 3-4】 평면 α 위에서 만나는 두 직선 a, b 에 수직인 직선 l은 평면 α와 수직이다.

【증명】 직선 l과 평면 α의 교점을 O라 할 때, 평면 α 위에서 O를 지나고 직선 a, b 에 평행인 직선을 각각 a', b' 라 하면 $l \perp a$, $l \perp b$ 이므로 $l \perp a'$, $l \perp b'$ 이다.

따라서 **정리 3** 에 의하여 $l \perp \alpha$



【명제 3-5】 평면 α 밖의 한 점 P에서 α에 내린 수선은 오직 하나 있다.

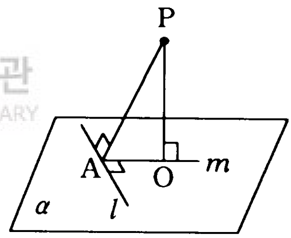
【증명】 (i) P에서 α에 그은 수선이 존재함을 보이자.

P에서 α 위에 있는 임의의 직선 l에 그은 수선의 발을 A, α 위에서 A를 지나고 l에 수직인 직선 m을 그어 P에서 m에 내린 수선의 발을 O라 하면 l은 한 점 A에서 만나는 두 직선 m, $\overleftrightarrow{AP}$ 에 수직이므로

$l \perp (\triangle AOP$ 평면$)$

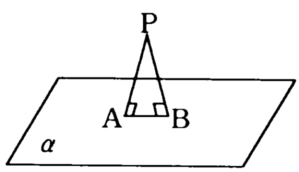
따라서 $\overleftrightarrow{PO} \perp l$, $\overleftrightarrow{PO} \perp m$

그러므로 $\overleftrightarrow{PO} \perp \alpha$



(ii) 수선이 유일함을 보이자.

P에서 α에 내린 수선이 두 개 있고, 그 수선의 발을 각각 A, B라고 하면 $\triangle$PAB의 세 내각의 합이 180° 보다 크게 되어 모순이다.



♣ 김연식의 증명에서는 P에서 평면 α에 그은 수선의 존재성에 대한 증명이 없다.

♣ 박배훈의 증명

점 P에서 평면 α에 두 수선 PO, PO′ 을 긋는다고 가정하자.

즉, $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PO'} \perp \alpha$

동위각이 90° 이므로 $\overline{PO} // \overline{PO'}$

그런데 가정에서 $\overline{PO}$와 $\overline{PO'}$은 점 P에서 만나므로 모순이다.

따라서 $\overline{PO}$와 $\overline{PO'}$은 일치한다.

♠ 검토 : 박배훈의 증명에서는 P에서 평면 α에 그은 수선의 존재성에 대한 증명이 없다.

★ **조사대상 12개 교과서에서 명제 3-5을 다룬 교과서는 김연식과 박배훈의 2 개 교과서뿐이나 이 명제를 이용하여 정사영 개념을 다루게 되므로 교과내용에 포함시킬 필요가 있다고 보며 수선의 유일성 과 아울러 존재성에 대한 문제도 함께 취급해야 한다.**

【명제 3-6】 평면 α위의 한 점 O에서 α에 그은 수선은 오직 하나 있다.

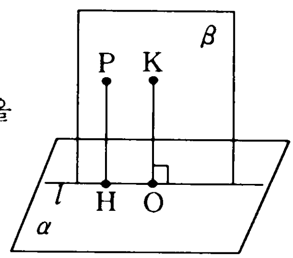
【증명】 (i) O에서 그은 수선이 존재함을 보이자.

α 밖의 한 점 P에서 α에 내린 수선의 발을 H라 하면(명제3-5)

H가 O일 때는 $\overleftrightarrow{PH} = \overleftrightarrow{PO}$ 가 O에서 α에 그은 수선이 된다.

H가 O와 같지 않을 때, $\overleftrightarrow{PH}$ 와 O에 의해 결정되는 평면을 β, β와 α의 교선을 l라 하면 l은 점 O를 지난다.

β 위에서 O를 지나 $\overleftrightarrow{PH}$ 와 평행인 직선 $\overleftrightarrow{OK}$ 를 그으면 $\overleftrightarrow{OK} \perp \alpha$

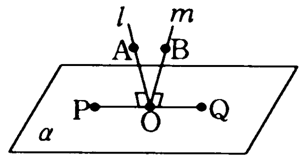


(ii) 수선이 유일함을 보이자.

O에서 α에 그은 수선이 l, m의 두 개가 있다고 가정하면 한 점 O에서 만나는 두 직선 l,

m이 결정하는 평면과 α와의 교선 위에서 O에 관하여 반대쪽에 있는 두 점을 P, Q라 할 때 l 위의 한 점 A와 m 위의 한 점 B에 대하여

(∠AOP의 보각의크기)=90° =∠AOQ=(∠AOB+∠BOQ) >90° 가 되어 모순이다.



【명제 3-7】 한 직선 a에 수직인 서로 다른 두 평면 α, β는 서로 평행하다.

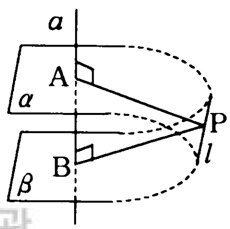
【증명】 a와 α, β의 교점을 각각 A, B라 하자.

α와 β가 평행이 아니라 가정하면 α와 β는 만난다.

그 교선을 l라하고, l 위에 한 점 P를 잡으면

$\overleftrightarrow{PA} \perp a$, $\overleftrightarrow{PB} \perp a$

따라서 $\overleftrightarrow{PA}$와 $\overleftrightarrow{PB}$는 일치한다.



그러므로 두 평면 α, β는 한 점 P에 만나는 두 직선 l과 $\overleftrightarrow{PA}$ 를 공유하여 일치하게 된다. 이것은 α, β가 서로 다른 평면이라는 가정에 모순이므로, $\alpha // \beta$

<삼수선의 정리 >

평면 α 위에 있지 않은 점을 P라 하고, l을 평면 α위의 직선이라고 한다.

[1]점 P 에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 P 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 A라고 하면

$$\overline{PA} \perp l$$

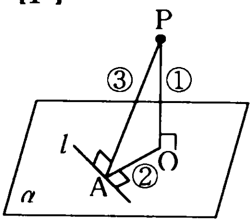
[2]점 P 에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 A라고 하면

$$\overline{OA} \perp l$$

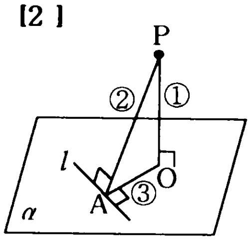
[3] 점 P 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 A라 하고, 평면 α 위에서 A를 지나 직선 l 에 수직인 직선을 긋고 점 P에서 이 직선에 내린 수선의 발을 O라고 하면

$$\overline{PO} \perp \alpha$$

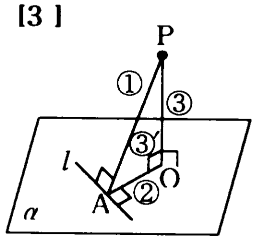
[1]



[2]



[3]



【증명】 [1] $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고, 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO} \perp l$

또, 가정에 의하여 $\overline{OA} \perp l$ 이므로 l은 한 점 O에서 만나는 두 직선 PO, OA가 결정하는 평면에 수직이다. 즉, $l \perp (\triangle AOP$ 평면$)$

$$\therefore \ \overline{PA} \perp l$$

[2] $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고, 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO} \perp l$

또, 가정에 의하여 $\overline{PA} \perp l$ 이므로 l은 한 점 P에서 만나는 두 직선 PO, PA가 결정하는 평면에 수직이다. 즉, $l \perp (\triangle AOP$ 평면$)$

$$\therefore \ \overline{OA} \perp l$$

[3] 가정에 의하여 $\overline{PA} \perp l$ 이고, $\overline{OA} \perp l$ 이므로 l은 한 점 A에서 만나는 두 직선 PA, OA가 결정하는 평면에 수직이다. 즉, $l \perp (\triangle AOP$ 평면$)$

$$\therefore \ \overline{PO} \perp l$$

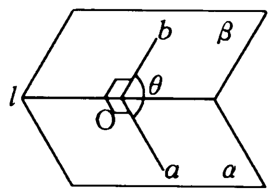
$\overline{PO} \perp l$ 이고, $\overline{PO} \perp \overline{OA}$ 이므로 직선 $\overline{PO}$는 한 점 A에서 만나는 두 직선 l, OA가 결정하는 평면에 수직이다. 즉, $\overline{PO} \perp \alpha$

3. 이면각

<두 평면이 이루는 각의 크기>

[정의] 두 평면 α, β가 만날 때, 그 교선 l을 경계로 하여 두 반평면이 이루는 도형을 **이면각**이라고 한다. 이 때, 교선 l을 **이면각의 변**, 두 반평면 α, β를 **이면각의 면**이라고 한다.

이면각의 한 변 위의 한 점 O를 지나 각 면 위에서 변에 수선 a, b를 그으면 이 두 수선이 이루는 각의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기 θ를 **이면각의 크기**라고 한다.



두 평면이 만나면 4 개의 이면각이 생긴다. 그 중에서 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각이라고 한다.

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 직각일 때, 두 평면은 서로 수직이라 하고, 기호 $\alpha \perp \beta$로 나타낸다.

<정리 4>

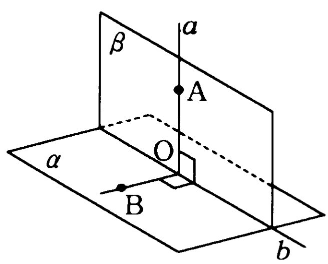
한 평면 α 에 수직인 직선 a 를 포함하는 평면을 β라고 하면 $\alpha \perp \beta$이다.

[증명] 직선 a 와 α의 교점을 O, α와 β의 교선을 b 라 하고 a 위의 한 점 A를 잡아 α 위에서 O를 지나 b 에 수직인 직선 $\overleftrightarrow{OB}$ 를 그으면 $b \perp \overleftrightarrow{OB}$, $b \perp a$

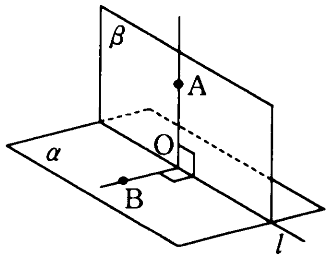
즉, $\angle$AOB는 α,β 의 이면각의 크기이다.

$a \perp \overleftrightarrow{OB}$ 이므로 $\angle AOB=90^\circ$

$\therefore\ \alpha \perp \beta$



【명제 4-1】 평면 α에 수직인 평면 β 위의 점 A에서 α, β의 교선 l 에 그은 수선은 평면α와 수직이다.

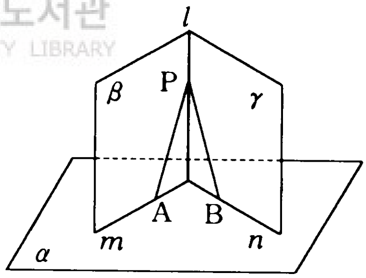


【증명】 β 위의 점 A에서 α, β의 교선 l 에 그은 수선의 발을 O라 하고, α 위에서 O를 지나고 l 에 수직인 직선 $\overleftrightarrow{OB}$ 를 그으면, $\angle AOB$ 는 α, β가 이루는 이면각의 크기이므로 $\overleftrightarrow{AO} \perp \overleftrightarrow{OB}$, 가정에서 $\overleftrightarrow{AO} \perp l$

따라서 $\overleftrightarrow{AO}$ 는 α 위의 두 직선 $\overleftrightarrow{BO}$, l 에 수직이므로

$$\overleftrightarrow{AO} \perp \alpha$$

【명제 4-2】 평면 α에 수직인 평면 β, γ의 교선 l 은 평면α에 수직이다.



【증명】 l 위의 한 점 P에서, α와 β의 교선 m 에 내린 수선의 발을 A, α와 γ의 교선 n 에 내린 수선의 발을 B라고 하면 **명제 4-1** 에 의하여

$\overleftrightarrow{PA} \perp \alpha$, $\overleftrightarrow{PB} \perp \alpha$

점 P에서 α에 내린 수선은 오직 하나뿐이므로

A와 B는 일치.

$\overleftrightarrow{PA}$ 는 β 위에, $\overleftrightarrow{PB}$ 는 γ 위에 있으므로

$\overleftrightarrow{PA}$ 와 $\overleftrightarrow{PB}$ 는 β와 γ의 교선 l 과 일치한다.

$$\therefore l \perp \alpha$$

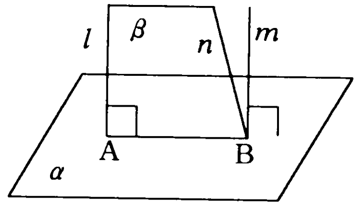
【명제 4-3】 서로 다른 두 직선 l, m 이 평면 α에 수직이면 $l // m$ 이다.

【증명】 직선 l, m과 평면 α의 교점을 각각 A, B라 하자.

직선 l 과 점 B가 결정하는 평면을 β라 할 때, β 위에서 B를 지나고 직선 l 과 평행한 직선을 n 라 하면 $l \perp \alpha$ 이므로 $n \perp \alpha$

따라서 두 직선 m, n 은 α 위의 한 점 B에서 α에 그은 수선이다. 그런데 α 위의 한 점 B에서 α에 그은 수선은 오직 하나뿐이므로(명제 3-6)

$m = n$ 이고, $l // n$ 이므로 $l // m$ 이다.



♣ 윤옥경의 증명

$l \perp \alpha$, $m \perp \alpha$ 라 하고 l, m과 α와의 교점을 각각 A, B라 하면 $l \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{AB}$

또 $\overline{AB}$, l을 포함하는 평면을 β라 하면 $\beta \perp \alpha$,

또 $\overline{AB}$, m을 포함하는 평면을 γ라 하면 $\gamma \perp \alpha$

∴ 평면 α 위의 직선 AB를 포함하고 α에 수직인 평면은 하나뿐이므로 $\beta = \gamma$

∴ $l // m$

♠ 검토 : 「평면 α 위의 직선 AB를 포함하고 α에 수직인 평면은 하나뿐이므로 $\beta = \gamma$」 에서 **[한 평면 위의 한 직선을 포함하고 이 평면에 수직인 평면은 하나뿐이다]** 라는 명제는 윤옥경의 교과서에 증명이 제시되지 않은 명제이므로 이를 이용한 증명은 논리의 비약이다.

♣ 박규홍의 증명

$l \perp \alpha$, $m \perp \alpha$ 라 하고 l, m과 α와의 교점을 각각 A, B라 하자.

직선 l 과 점 B가 결정하는 평면을 β라 하면 $\beta \perp \alpha$

그런데 직선 m도 점 B에서 α와 수직이고 α와 β의 교선 AB와도 수직이므로 직선 m은 평면 β 위에 있다.

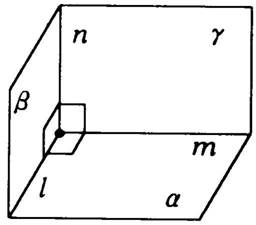
따라서 l, m은 같은 평면 β 위에 있으므로 $l // m$이다.

♠ 검토 : 「직선 m도 점 B에서 α와 수직이고 α와 β의 교선 AB와도 수직이므로 직선 m은 평면 β 위에 있다.」 는 증명이 제시되어야 할 명제이므로 증명 없이 이를 이용한 것은 논리의 비약이다.

★ 조사대상 12개 교과서에서 명제 4-3을 다룬 교과서는 윤옥경과 박규홍의 2 개 교과서뿐이나 이 명제를 이용하여 평행한 두 평면 사이의 거리(명제5-2)를 다루게 되므로 교과내용에 포함시킬 필요가 있다.

【명제 4-4】 세 평면 α, β, γ 중 어느 두 평면도 서로 수직이면 각각 그 두 평면에 의해 결정되는 세 교선은 서로 수직이다.

【증명】 α와 β의 교선을 l, α와 γ의 교선을 m, β와 γ의교선을 n 라 하면 **명제 4-2** 에 의하여 β와 γ의 교선 n은 α와 수직이다.



따라서 $n \perp l$, $n \perp m$

마찬가지로 **명제 4-2** 에 의하여 α와 β의 교선 l은 γ와 수직이다.

따라서 $l \perp m$

∴ 세 교선은 서로 수직이다.

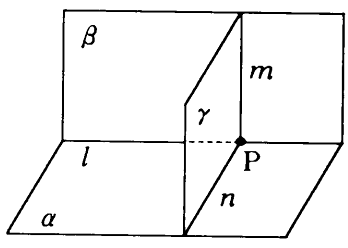
【명제 4-5】 서로 수직인 두 평면 α, β의 교선 l 위의 점 P를 지나고 l 에 수직인 평면을 γ, 평면 β, γ의 교선을 m, 평면 γ, α의 교선을 n이라 하면

(1) $l \perp m$, $m \perp n$, $n \perp l$

(2) $\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$

【증명】 (1) $l \perp \gamma$ 이므로 $l \perp m$, $l \perp n$

$\alpha \perp \beta$ 이고, 두 직 선 m, n 이 이루는 각의 크기가 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기이므로 $m \perp n$



(2) (1)의 결과에 의해

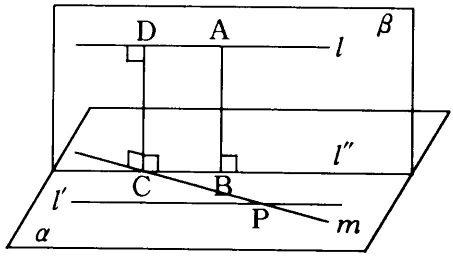
(γ와 α가 이루는 각의 크기) = (l 과 m 이 이루는 각의 크기)

(γ와 β가 이루는 각의 크기) = (l 과 n 이 이루는 각의 크기)

$l \perp m$, $l \perp n$ 이므로 $\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$

【명제 4-6】 꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m에 공통인 수선은 오직 하나 있다.

【증명】 (i) 공통수선이 존재함을 보이자.



직선 m 위의 한 점 P를 지나고 직선 l과 평행인 직선 l' 과 m에 의해 결정되는 평면을 α라 하면

명제 2-1에 의해 $l // \alpha$이다.

l 위의 한 점 A에서 α에 그은 수선의 발을 B라 하면 점 B와 직선 l에 의해 결정되는 평면 β와 α의 교선 l'' 은 **정리** 1에 의해 l과 평행하다.

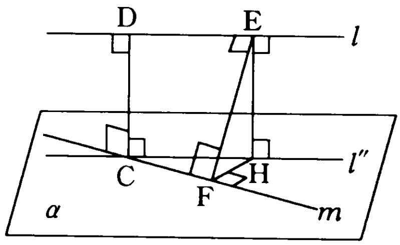
l'' 과 m은 평행이 아니므로 한 점 C에서 만난다.

C에서 l에 그은 수선의 발을 D라 하면

$\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \alpha$ 이므로 $\overleftrightarrow{CD} \perp \alpha$

따라서 $\overleftrightarrow{CD} \perp m$ 이다. 즉, 선분 CD는 l과 m의 공통수선이다.

(ii) 공통수선이 유일함을 보이자.



공통수선이 오른쪽 그림에서와 같이 $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ 의 두 개가 있다고 하자.

E에서 l''에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{EH} \perp \alpha$

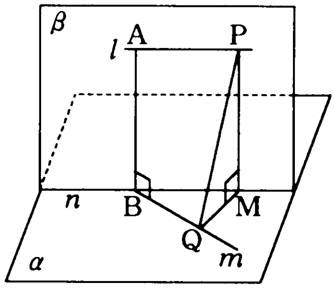
$l // l''$, $l \perp \overline{EF}$ 이므로 $l'' \perp \overline{EF}$

$l'' \perp \overline{EF}$, $m \perp \overline{EF}$ 이므로 $\overline{EF}$ 는 l'', m이 결정하는 평면 α와 수직이다.

한 점 E에서 평면 α에 내린 수선이 $\overline{EF}$, $\overline{EH}$ 의 두 개가 있으므로 모순이다.

따라서 $\overline{EF}$ 는 공통 수선이 아니고 공통수선은 $\overline{CD}$ 의 하나뿐이다.

♣ 김연식의 증명



오른쪽 그림과 같이 직선 m을 포함하고, 직선 l에 평행한 평면 α와, l을 포함하고 α에 수직인 평면 β를 만든다.

(i) 먼저 존재성에 대하여 밝혀 보자.

직선 m과 교선 n과의 교점 B에서 n에 수선을 그어 l과의 교점을 A라고 하면, $l /\!/ n$이므로 $\overleftrightarrow{AB} \perp l$

또, $\overleftrightarrow{AB} \perp \alpha$ 이므로 $\overleftrightarrow{AB} \perp m$

따라서, $\overleftrightarrow{AB}$는 l, m에 직교한다.

(ii) 오직 하나 있음을 밝히자.

$\overleftrightarrow{AB}$ 이외에 l, m에 직교하는 직선 PQ가 있다고 하면,

$l \perp \overleftrightarrow{PQ}$, $l /\!/ n$ 이므로 $\overleftrightarrow{PQ} \perp n$

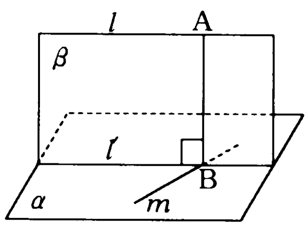
$m \perp \overleftrightarrow{PQ}$ 이므로 $\overleftrightarrow{PQ} \perp \alpha$. 따라서 $\overleftrightarrow{PQ}$와 $\overleftrightarrow{AB}$는 일치한다.

♠ 검토 : 「직선 m을 포함하고, 직선 l에 평행한 평면 α와, l을 포함하고 α에 수직인 평면 β」의 존재성에 대한 증명이 필요하고,

「$m \perp \overleftrightarrow{PQ}$ 이므로 $\overleftrightarrow{PQ} \perp \alpha$. 따라서 $\overleftrightarrow{PQ}$와 $\overleftrightarrow{AB}$는 일치한다.」라는 추론의 결과는 논리의 비약이다.

왜냐하면 , 「Q는 P에서 α에 그은 수선의 발이 되므로 Q는 α, β의 교선 n 위에 있게 되어 Q와 B는 일치하고 α 위의 한 점 B(=Q)에서 α에 그은 수선은 하나뿐이므로 $\overleftrightarrow{PQ}$와 $\overleftrightarrow{AB}$는 일치한다.」라고 서술되어야 하기 때문이다.

♣ 박한식의 증명



m을 포함하면서 l과 평행한 평면을 α라 하고, 직선 l의 평면 α 위로의 정사영을 l' , l과 l' 을 포함하는 평면을 β라고 하자.

이 때, l' 과 m이 만나는 점을 B라 하고, B를 지나서 l' 에 수직인 직선을 β 위에 그어 l과의 교점을 A라고

하면, $l // \alpha$ 이므로 $l // l'$ 이다.

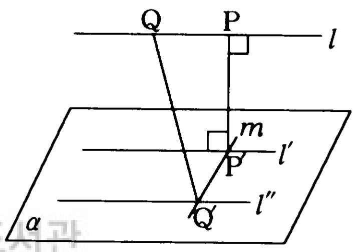
따라서, $\overline{AB} \perp l'$, $\overline{AB} \perp l$ …①

또, l' 은 직선 l의 α 위로의 정사영이므로, l과 l' 을 포함하는 평면 β는 α와 수직이다. 따라서, $\overline{AB} \perp m$ …②

①, ②에서 $\overline{AB}$ 는 l, m의 공통수선이다.

♠ 검토 : 「m을 포함하면서 l과 평행한 평면 α」의 존재성에 대한 문제가 제기되며 공통수선의 유일성에 대한 증명이 필요하다.

♣ 양승갑의 증명



꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m에 대하여 m을 품고 l에 평행인 평면을 α라고 하자.

직선 l의 평면 α 위로의 정사영을 l' 라 하면

$l // l'$

그런데 l과 m은 꼬인 위치에 있으므로 l' 과 m은 한 점 P′ 에서 만나는 서로 다른 직선이다.

이제 α 위로의 정사영이 P′ 이 되는 직선 l위의 점을 P라 하면

$\overleftrightarrow{PP'} \perp l$, $\overleftrightarrow{PP'} \perp m$

한편 직선 QQ′ 이 직선 l, m과 각각 점 Q, Q′ 에서 수직으로 만난다고 하자.

$\overline{QQ'} \perp l''$ ($\because$ $l // l'$, $\overline{QQ'} \perp l$) 이므로 Q′ 은 Q의 평면 α 위로의 정사영이다.

따라서 Q′ 은 l' 위로의 점이어야 하므로 Q′ =P′

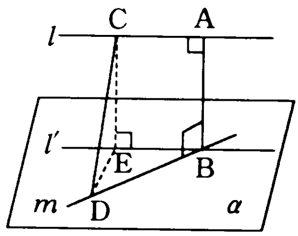
그러므로 l, m과 수직으로 만나는 직선은 PP′ 하나뿐이다.

♠ 검토 : 「Q′ 은 l' 위로의 점이어야 하므로 Q′ =P′ 이고 l, m과 수직으로 만나는 직선은 PP′ 하나뿐이다.」는 김연식의 증명과 마찬가지로 논리의 비약이다.

★ 조사대상 12개 교과서에서 명제 4-6을 다룬 교과서는 김연식, 박한식, 양승갑의 3 개 교과서뿐이다. 공통수선의 문제는 중요한 내용이므로 교과내용에 포함시킬 필요가 있다.

【명제 4-7】 꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m에 공통인 수선은 이 두 직선 위에 있는 한 점씩을 잡아 연결한 선분 중에서 길이가 가장 짧은 것이다.

【증명】 m을 품고 l 에 평행한 평면을 α라 하고 공통수선과 두 직선 l , m 의 교점을 각각 A, B라 하자. l , m 위에 각각 점 C, D를 잡고, α 위에서 B를 지나고 l과 평행한 직선을 l' , C 에서 l' 에 그은 수선의 발을 E라 하면 선분 CD가 선분 AB와 같지 않을 때



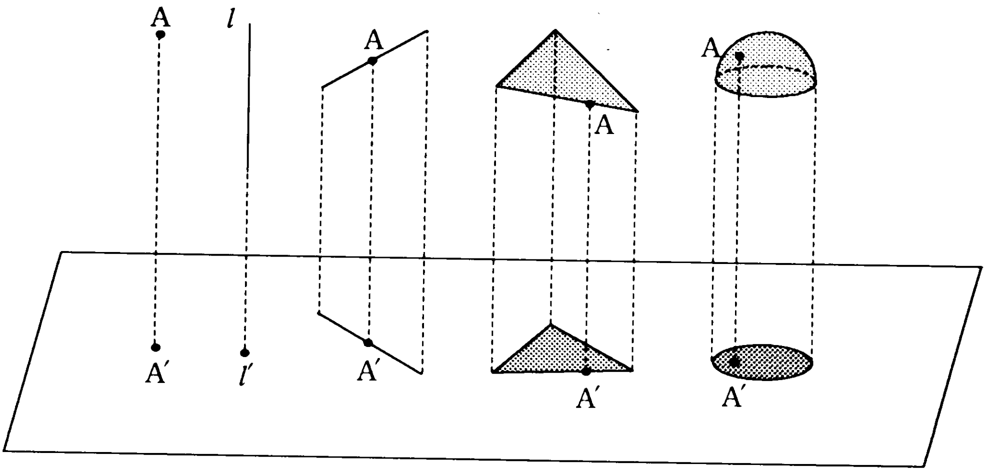
△CDE에서 $\overline{CD} > \overline{CE}$ 이고 $\overline{CE} = \overline{AB}$ 이다.

그러므로 공통수선 AB가 가장 길이가 짧은 선분이다.

4. 정사영

[정의] 평면 α 밖의 점 A에서 평면 α에 그은 수선의 발 A′ 을 점 A의 평면 α위로의 **정사영**이라고 하고, 선분 AA′ 의 길이를 점 A와 평면 α 사이의 거리라고 한다.

일반적으로 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F′ 을 도형F의 평면 α위로의 정사영이라 하고, 평면 α를 **투영면**이라고 한다.



<정리 5>

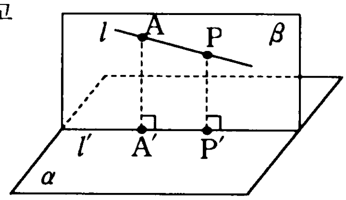
평면 α 에 수직이 아닌 직선 l 의 평면 α 위로의 정사영은 직선이다.

【증명】 l 위의 한 점 A의 평면 α 위로의 정사영을 A′ , 직선 l 과 $\overleftrightarrow{AA'}$ 으로 결정되는 평면을 β, α와 β의 교선을 l' 이라고 하면 **정리 4** 에 의해 $\alpha \perp \beta$ 이다.

l 위의 임의의 점 P에서 l' 에 내린 수선의 발을 P′ 이라고 하면 **명제 4-1** 에 의해 $\overleftrightarrow{PP'} \perp \alpha$

따라서 P′ 은 P의 정사영이고, l' 위에 있다.

$\therefore$ l' 은 l 의 평면 α 위로의 정사영이다.



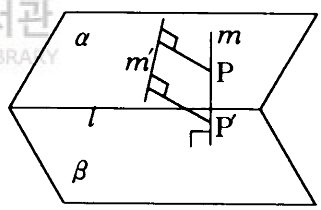
【명제 5-1】 두 평면 α, β의 교선을 l 이라 하고, 직선 m이 평면 α에 수직일 때, m의 β 위로의 정사영 m' 은 l 에 수직이다.

【증명】 두 직선 m , m' 이 결정하는 평면을 γ라고 하면

직선 m 위의 점 P의 평면 β 위로의 정사영을 P′ 라 할 때, $\overleftrightarrow{PP'} \perp \beta$ 이고 l은 β위의 직선이므로

$\overleftrightarrow{PP'} \perp l$

$m \perp \alpha$ 이고 l은 α 위의 직선이므로 $m \perp l$



따라서 l은 γ 위에서 만나는 두 직선 m, $\overleftrightarrow{PP'}$ 과 수직이다.

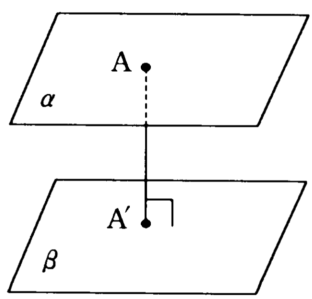
그러므로 l은 두 직선 m, $\overleftrightarrow{PP'}$ 가 결정하는 평면 β와 수직이다.

따라서 **l**은 β 위의 직선 **m'** 와 **수직**이다.

<평행한 두 평면 사이의 거리>

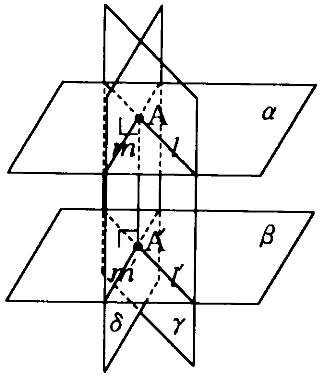
평행한 평면 α, β가 있을 때, 평면 α 위의 한 점 A의 β 위로의 정사영을 A′ 이라고 하면 선분 AA′ 은 α, β의 **공통 수선**이고, 그 길이는 A의 위치에 관계 없이 일정하다.

이 길이를 **평행한 두 평면 사이의 거리**라고 한다.



【명제 5-2】 평행한 평면 α, β가 있을 때, 평면 α 위의 한 점 A의 β 위로의 정사영을 A′ 이라고 하면 선분 AA′ 은 α, β의 공통 수선이고, 그 길이는 A의 위치에 관계 없이 일정하다.

【증명】 (i) 선분 AA′ 은 α, β의 공통 수선임을 보이자



평면 α 위에서 점 A를 지나는 서로 다른 두 직선을 l, m 라하고, l과 점 A′ 이 결정하는 평면을 γ,

γ와 β의 교선을 l', m과 점 A′ 이 결정하는 평면을 δ, δ와 β의 교선을 m' 라 하면

$\overleftrightarrow{AA'} \perp \beta$ 이므로 $\overleftrightarrow{AA'} \perp l'$, $\overleftrightarrow{AA'} \perp m'$

$\alpha // \beta$ 이므로 α 위의 직선 l과 β 위의 직선 l' 은 만나지 않고 l, l' 은 같은 평면 γ 위에 있으므로

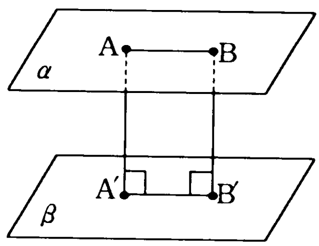
$l // l'$

$l // l'$ 이고 $\overleftrightarrow{AA'} \perp l'$ 이므로 $\overleftrightarrow{AA'} \perp l$

같은 방법으로 생각하면 $\overleftrightarrow{AA'} \perp m$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\overleftrightarrow{AA'}$은 두 직선 l, m이 결정하는 평면 α와 수직이다.

(ii) 선분 AA′ 의 길이는 A의 위치에 관계 없이 일정함을 보이자.



평면 α 위의 A아닌 한 점 B를 잡고 B의 평면 β 위로의 정사영을 B′ 라 하면 한 평면 β에 수직인 두 직선 $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$은 서로 평행하고, $\alpha // \beta$ 이므로 선분 AB와 선분 A′B′ 은 평행하다.

따라서 □$AA'BB'$은 직사각형이다.

$\therefore\ \overline{AA'} = \overline{BB'}$

즉 선분AA′ 의 길이는 A의 위치에 관계 없이 일정하다.

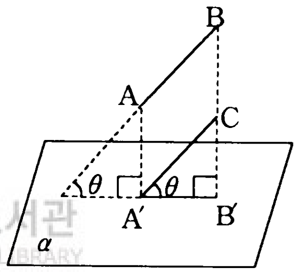
♣ 윤옥경의 교과서에서는 선분AA′ 이 공통수선임을 보이지 않고 있다.

♣ 김연식과 박규홍의 교과서의 명제 「**두 평면 α, β가 평행하고, 직선 l이 평면 α와 수직이면, l은 α와도 수직이다.**」의 증명에서 「**명제 0-7: 두 평면 α, β가 평행일 때, α와 한 점에서 만나는 직선 l은 β와도 한 점에서 만난다.**」에 대한 사전 서술없이 직관적으로 성립함이 명백함을 이용하여 논리를 전개하는 것은 논증기하 논리 전개의 취지에 적합하지 않다.

<정리 6>

선분 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)라고 하면, $\overline{AB}$ 의 α 위로의 정사영 $A'B'$ 의 길이는 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$

【증명】 점 A′ 을 지나고 직선 AB에 평행인 직선을 그어 선분 BB′ 과의 교점을 C라고 하자.



이 때, $\overline{AA'}\perp\alpha$, $\overline{BB'}\perp\alpha$ 이므로

$\overline{AA'}//\overline{BB'}$, $\overline{AB}//\overline{A'C}$

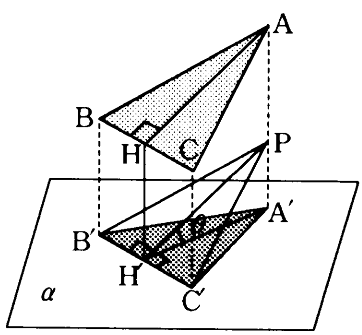
따라서, 사각형 AA′ CB는 평행사변형이다.

$\therefore\ \overline{A'B'}=\overline{A'C}\cos\theta=\overline{AB}\cos\theta$

<정리 7>

△ABC의 평면 α 위로의 정사영을 △A′ B′ C′ 이라 하고, 이 두 삼각형의 넓이를 각각 S와 S′ , 또 △ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)라고 하면, $S'=S\cos\theta$

【증명】 (i) △ABC의 한 변 BC가 α에 평행한 경우



$\overline{B'C'}$ 을 품고 평면 ABC에 평행한 평면과 직선 AA′ 과의 교점을 P라고 하면 △PB′ C′ ≡△ABC

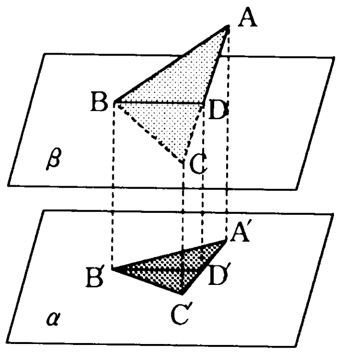
P에서 변 B′ C′ 에 내린 수선을 $\overline{PH'}$ 이라고 하면, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{A'H'}\perp\overline{B'C'}$

$\therefore\ S' = \frac{1}{2}\overline{B'C'}\cdot\overline{A'H'} = \frac{1}{2}\overline{B'C'}\cdot\overline{PH'}\cos\theta$

$= \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}\cdot\cos\theta = S\cos\theta$

(ii) △ABC의 어느 변도 α에 평행하지 않은 경우

오른쪽 그림에서 $\overline{AA'} > \overline{BB'} > \overline{CC'}$ 이라고 가정한다.



B를 지나고 α에 평행한 평면 β와 변 AC와의 교점을 D라 하고, D의 α 위로의 정사영을 D′이라고 하면,

(i)에 의하여 $\triangle A'B'D' = \triangle ABD\cos\theta$

$\triangle B'C'D' = \triangle BCD\cos\theta$

$$\therefore\ \triangle A'B'C' = \triangle A'B'D' + \triangle B'C'D' = (\triangle ABD + \triangle BCD)\cos\theta$$

$\therefore\ S' = S\cos\theta$

5. 교과 내용 비교표

차례	저자 / 명제	윤옥경	금종해	김연식	이홍천	장태환	박한식	박두일	박세희	양승갑	정봉화	박배훈	박규홍	계	비고
1	기본성질	○	○		○	○				○				5	
2	0-1	○			○									2	
3	0-2	○	○		○	○				○				5	
4	0-3		○		○	○				○				4	
5	0-4		○		○	○				○				4	
6	0-5		○											1	
7	0-6	○			○				○	○	○	○		5	
8	0-7	○			○								○	3	증명 검토, 교과내용 포함 필요
9	0-8	○	○							○				3	증명 검토
10	0-9	○												1	
11	정리1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12	
12	1-1	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	11	
13	1-2	○	○	○	○	○				○	○	○	○	9	
14	1-3	○	○	○	○					○	○			6	
15	1-4	○			○	○	○	○		○		○	○	8	
16	1-5		○	○						○	○		○	5	
17	정리2	○	○	○		○	○			○	○	○	○	9	
18	2-1														교과내용 포함 필요
19	2-2						○							1	증명 검토, 교과내용 포함 필요
20	2-3	○	○	○	○					○				5	증명 검토
21	2-4				○			○				○		3	
22	2-5												○	1	
23	3-1	○	○	○	○	○				○		○		7	
24	3-2	○	○						○			○	○	5	
25	3-3	○												1	
26	정리3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12	
27	3-4	○			○						○	○	○	5	
28	3-5			○								○		2	증명 검토, 교과내용 포함 필요
29	3-6														교과내용 포함 필요
30	3-7									○				1	
31	삼수선정리	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12	
32	정리4	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12	
33	4-1	○	○		○	○	○	○		○	○	○		9	
34	4-2	○	○	○	○		○	○	○			○	○	9	
35	4-3	○											○	2	증명 검토, 교과내용 포함 필요
36	4-4	○	○	○			○						○	5	
37	4-5	○												1	
38	4-6			○			○			○				3	증명 검토, 교과내용 포함 필요
39	4-7						○							1	
40	정리5	○	○	○	○	○	○			○	○		○	9	
41	5-1	○		○	○	○	○			○	○		○	8	
42	5-2	○		○									○	3	증명 검토, 교과내용 포함 필요
43	정리6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12	
44	정리7	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12	
	계	31	24	20	25	18	17	11	9	25	16	18	22	234	

V. 결론 및 제언

고등학교 수학II 교과에서는 공간에서의 직선·평면의 위치 관계 등 공간도형에 관한 기본 성질을 이해하고, 공간 지각력을 획득할 수 있도록 교과내용이 구성되어 있다.

수학II 논증기하 단원에서 다루어지는 명제들은 직관적으로 참이라는 것을 쉽게 납득할 수 있는 것들이다. 교육부에서 펴낸「고등학교 수학과 교육과정 해설」에 의하면 「공간도형을 지도하는 데 있어서는 공리계를 이용하여 엄밀성을 추구하는 것보다 직관에 의해 쉽게 이해할 수 있도록 하는 것이 바람직하다.」고 기술되어 있다. 이와 같은 기술은 공간도형에 대한 논증기하의 성격을 잘못 판단한 것으로 생각한다. 공간 논증기하 단원의 교과내용들은 직관적으로 쉽게 이해되는 명제들로 구성되어 있고, 이들 명제가 참이라는 것을 밝히려면 공리계를 사용할 수밖에 없는 실정이다. 공리계를 이용하지 않고 명제의 증명을 시도하는 과정에서 증명되지 않는 명제들을 추론의 근거로 삼게 됨으로써 순환 논리에 빠지게될 위험성이 있을 뿐만 아니라 논리 전개의 일관성이 결여되고 애매모호하게 되며 지도하는 교사와 배우는 학생들이 난처한 입장에 처하게 된다.

6차 교육과정의 12개 수학II 교과서를 비교 분석한 결과 타당성이 결여된 논리 전개로 증명이 이루어진 명제들을 발견할 수 있었으며, 명확한 증명제시의 어려움 때문에 필수적으로 취급해야할 중요한 명제들이 다수의 교과서에서 제외되고 있다.

공간기하에서의 공리는 5 개로 이 중 공간기하의 논리 전개에 필요한 다음 3 개의 공리는 기본 성질로서 다루고 이를 논리 전개의 발판으로 삼아야할 것이다.

1 한 직선 위에 있지 않은 세 점을 지나는 평면은 오직 하나 뿐이다.

2 한 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 그 평면 위에 있다.

3 한 점을 공유하는 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다.

조사 대상 12 개의 교과서 중에서 위의 공리 3 개를 기본 성질로서 채택된 교과서는 5 개로 취급한 명제는 평균 22 개 정도이고, 채택되지 않는 7 개의 교과서에서 다루어진 명제는 평균16 개로서 6 개의 차이를 보이고 있다. 위의 기본 성질 3 개를 택한 교과서는 논리 전개가 타 교과서에 비해 비교적 명료한 편이나, 채택하지 않는 교과서는 논리적 결함을 피하기 위하여 명제를 적게 다룬 일부 교과서를 제외하면 결함이 많은 편이다.

직선과 평면의 위치 관계에 관한 명제 가운데 다음의 명제들은 교과내용에 포함시켜야 한다.

「명제 0-7 :두 평면 α, β가 평행일 때, α와 한 점에서 만나는 직선 l은 β와도 한 점에서 만난다.」

「명제 2-1: 평면 α 밖의 한 점 P를 지나고, α 위의 직선 l과 평행한 직선 m은 단 하나 존재하며 평면 α와 평행하다.」

「명제 2-2: 평면 α 밖의 한 점 P를 지나고, α와 평행한 평면은 오직 하나 있다. 」

「명제 3-5: 평면 α 밖의 한 점 P에서 α에 내린 수선은 오직 하나 있다.」

「명제 3-6: 평면 α위의 한 점 O에서 α에 그은 수선은 오직 하나 있다. 」

「명제 4-3: 서로 다른 두 직선 l, m 이 평면 α에 수직이면 $l // m$ 이다.」

「명제 4-6: 꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m에 공통인 수선은 오직 하나 있다.」

「명제 5-2: 평행한 평면 α, β가 있을 때, 평면 α 위의 한 점 A의 β 위로의 정사영을 A′ 이라고 하면 선분 AA′ 은 α, β의 공통 수선이고, 그 길이는 A의 위치에 관계 없이 일정하다.」

명제 0-7은 다른 명제의 증명에 이용되는 중요한 명제이고, **명제 2-1**, **명제 2-2**는 직선과 평면의 위치 관계에서 평행에 관한 여러 가지 정리를 만들어 내는데 필요하며, **명제 3-5**, **명제 3-6**은 직선과 평면의 수직 관계에 관한 정리를 증명하는데 많이 이용된다. **명제 4-6**은 공통 수선, **명제 4-3**, **명제 5-2**는 두 평면 사이의 거리를 정의 내리는데 필요한 명제라고 여겨진다.

앞에서 언급한 공리 3 개를 기본 성질로 제시하고 위의 8 개의 명제를 교과 내용에 포함시키면 논리 전개를 명확하게 할 수 있게 되므로 합리적이고 논리적인 사고력, 비판적 능력을 기르는 논증기하 교육의 목적을 달성하는데 도움이 되리라 생각한다.

참 고 문 헌

[1] 교육부, 고등학교 수학과 교육과정 해설, 1995. 6. 20

[2] 금종해외, 고등학교 수학Ⅱ, 한샘출판사, 1995. 10. 20

[3] 김연식외, 고등학교 수학Ⅱ, 동아출판사, 1995. 10. 20

[4] 김응태 · 김연식, 수학교육 교재론, 이우출판사, 1982. 2. 25

[5] 박규홍외, 고등학교 수학Ⅱ, 동화사, 1995. 10. 20

[6] 박두일외, 고등학교 수학Ⅱ, 교학사, 1995. 10. 20

[7] 박배훈외, 고등학교 수학Ⅱ, 교학사, 1996. 7. 10

[8] 박세희외, 고등학교 수학Ⅱ, 동아서적, 1996. 7. 10

[9] 박한식외, 고등학교 수학Ⅱ, 지학사, 1995. 10. 20

[10] 신용태, 기하학 개론, 교학연구사, 1993. 8. 30

[11] 양승갑외, 고등학교 수학Ⅱ, 금성교과서, 1995. 10. 20

[12] 윤옥경외, 고등학교 수학Ⅱ, 중앙교육진흥연구소, 1999. 3. 1

[13] 이홍천외, 고등학교 수학Ⅱ, 동아출판사, 1995. 10. 20

[14] 장태환외, 고등학교 수학Ⅱ, 두산동아, 1996. 7. 10

[15] 정봉화외, 고등학교 수학Ⅱ, 형설출판사, 1996. 7. 10

[16] 김연식 · 허혜자, 수학불안 요인에 관한 연구, 대한수학교육학회 논문집 제5권 제2호, 1995

[17] 서동엽, 중학교 학생의 증명 능력 분석, 대한수학교육학회 논문집 제9권 제1호, 1999

[18] 우정호, 증명지도의 재음미, 대한수학교육학회 논문집 제4권 제1호, 1994

[19] 허혜자, Euclid 기하의 교육의 비판에 대한 재고, 대한수학교육학회 논문집 제6권 제2호, 1996

[20] M.J.Greenberg(이우영 譯), EUCLID 幾何學과 非EUCLID幾何學, 경문사, 1997. 8. 7

[21] Charalampos Toumasis(1990), The epos of euclidean geometry in greek secondary education(1836-1985): perssure for chang and resistance, Educational Studies in Mathematics 21, pp.491-508

[22] Fawcett, H.P.(19380, The Nature of Proof, Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

[23] Fehr, H. F.(1963), Reform of instruction in geometry, Mathematical Education Notes, March, p.324.

<Abstract>

The Analysis of Contents of Space Axiomatic Geometry Unit and the Ways of Improvement *

Lee, Joong-Seok

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by professor Hyun, Jin-Oh

The axiomatic geometry unit of the space figure in Mathematics II in the expository book of high school math curriculum(published by Ministry of Education, June 20, 1995) suggests some teaching points to bear in mind , so as not to make use of the system of axiom. However, it doesn't take the axiom about the space geometry as a starting point of argument, and so many textbooks can be found, in which intuitively true propositions are proved acceptable by the logical ambiguous statements.

Thus, this study analyzes the contents of axiomatic geometry in high school math II textbooks and draws their problems. As an alternative improvement, 3 kinds of axiom on the space geometry and some important propositions, which are basic to proofs of proposition, will be presented here in this paper.

---

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2001.