碩士學位 請求論文

高等學校에서의 極限의 概念 指導에 관한 硏究

指導敎授 宋 錫 準

濟州大學校 敎育大學院

數 學 敎 育 專 攻

高 銀 姬

1997年 8月

高等學校에서의 極限의 概念 指導에 관한 研究

指導敎授 宋 錫 準

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

1997年 6月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 高 銀 姬

高銀姬의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1997年 7月 日

審査委員長 김 도 현
審 査 委 員 宋錫準
審 査 委 員

<초록>

高等學校에서의 極限의 槪念 指導에 관한 硏究

高 銀 姬

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 宋 錫 準

본 연구는 교육법에 의하여 고시된 제6차 교육 과정에서 교육부가 제시한 수학 교과 및 「고등학교 수학Ⅰ」 교과의 교육 과정 체제 및 이 고시에 의하여 제작된 「고교 수학Ⅰ」 교과서와 국내 대학 교재, 외국 대학 교재를 연구자료로 사용하여 「고등학교 수학Ⅰ」에서 사용하는 극한의 개념과 예제들을 조사하였다. 또 대학 교재에 실린 극한의 정의와 예제를 조사하여, 고등학교 교재 내용과의 차이를 비교 분석하였다. 그래서 그들 사이에 나타나는 차이점을 고교 수학의 성격, 목표 등에 비추어 문제점을 찾고 이를 해소하는 방안을 제시하고자 하였다. 특히 엄밀한 극한의 정의를 「고등학교 수학Ⅰ」 교과서에 도입하는 방향을 탐구하였다.

목 차

Ⅰ. 서 론

교육이란 인간의 성향을 바람직한 방향으로 변화시키는 계획적 활동이라고 한다면, 교육 과정은 이러한 교육 목적을 달성하기 위하여 선택한 문화 또는 생활 경험을 교육적인 관점에서 편성하고 학습 활동이 이루어지도록 묶는 계획인 것이다. 따라서 현대사회의 급격한 지식 팽창과 과학의 발달에서 오는 고도의 정보화, 산업화 사회에 능동적으로 대처하기 위해 학교 교육의 바탕이 되는 교육 과정의 수정 보완이 절실히 요구되며, 교육 과정은 시대적 유용성과 사회적 적절성을 고려하여 개정하는 것이 교육의 국제적 경쟁력을 높이는 길이 된다.

우리 나라의 교육 과정은 제정 당시 미국의 진보주의 교육 사조의 영향을 받아 생활 중심의 교육 과정이었고, 1950년대 말, 미국에서 시작된 혁신적 교육 변혁의 영향으로 1960년대에 한국에서도 이에 대한 연구가 활발히 일어났으며 그 영향으로 학문 중심 교육 과정으로 전환되었는데 이것이 제3차 교육 과정이다(교육부, 1995). 제3차 교육 과정은 교육 과정 내용에 많은 변화를 가져와 탐구 학습이 강조되고, 개념 체계가 중요시되기 위하여 교과 내용이 많이 어려웠고, 그 후 제4차, 제5차 교육 과정도 지나치게 학문 중심 교육 과정으로 편성되어 이에 대한 비판이 가중되었으며 이러한 문제점을 개선하기 위해 지나친 학습량을 줄이고 암기 위주의 주입식 수업을 지양하며 실생활과 관련된 새로운 교육 과정이 대두되었다. 따라서 제6차 교육 과정은 실생활 문제와 STS(Science Technology and Society)의 상호 관련성을 더욱 강조하였고, 학습의 흥미성을 높이고자 하였다.

이러한 6차 교육 과정 편성에서 「고등학교 수학Ⅰ」 교육 과정은 “수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 습득과 이를 활용하여 여러 가지 문제를 논리적으로

사고하게 하고, 단계적인 과정을 밟아 문제를 해결하는 습관을 가지도록 한다."고 그 성격을 규정하였다. 특히 본 연구에서 다루고자 하는 극한의 개념에 대해서도 "기본 개념과 법칙을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다."는 목표를 설정하였다.

이 극한의 개념 지도의 중요성은 이것이 고교수학의 중심내용을 이루는 미분, 적분의 기초가 되기 때문이다. 또 극한의 개념은 해석학의 이론전개에 가장 기본이 되는 개념이다. 르네상스(17세기) 이후 극한개념을 이용하여 함수의 성질을 연구하는 미적분학이 발전하게 되었고, 이 극한이라는 수학적 도구를 사용하여 근세 수학이 발전하게 되었으며 그 주된 것은 해석학의 발전이었다. 수학의 한 분야인 해석학은 구조를 갖는 집합 사이에 정의된 함수의 성질을 조사하여 연구하는 학문이다. 해석학에서 함수의 성질을 연구함에 있어 기본이 되는 중요한 개념은 극한개념이다. 또 함수의 연속성, 미적분의 정의는 물론 다항함수 또는 삼각함수등 연속함수의 근사값 측정에도 모두 극한개념이 토대가 되어있다.

이러한 중요한 개념을 「고등학교 수학 I」에서 학습하고 있는데, 본 연구는 고등학교 교과서들이 사용하는 극한 개념과 그 지도를 교과서별로 정의와 예제들을 조사하고, 대학교 교재에서 정의한 엄밀한 극한의 개념을 살펴보면서, 그 사이의 차이를 비교 분석하며 극한의 정의에 관한 문제점들을 찾아내고, 이것을 해소하는 방향을 모색하고자 연구를 계획하였다.

Ⅱ. 연구방법

1. 연구자료

우리 나라의 초·중등 교육은 교육법에 의거하여 운영하도록 되어 있다. 교육법 제155조는 초·중등 학교의 교육 과정을 교육부 장관이 정하도록 규정하고 있다. 또 교육법 제150조는 "각 학교는 소정의 '교육 과정'을 수업하여야 한다."라고 되어 있으며, 지방 교육 자치에 관한 법률 제27조에는 각 시·도 교육감의 사무 중 교육 과정 운영에 관한 사항을 명시하고 있다. 이와 같이 교육 과정에 관련된 교육 법제에 의해 초·중등 학교의 교육 과정은 교육부가 결정하고 문서로 고시하여 존립해 왔다.

본 연구에서는 이 교육법에 의하여 고시된 제5차와 제6차 교육 과정을 비교한 내용<표1>과, 제6차 교육 과정에서 교육부가 제시한 고등학교 수학 교과 및「고교 수학Ⅰ」 교과의 교육 과정 체제 (부록1참조) 및 이 고시에 의하여 제작된 「고교수학Ⅰ」 교과서 5종과 국내 대학 교재 1권 및 외국 대학 교재 1권 <표2>를 연구자료로 사용한다.

<표1> 제5차 교육 과정과 제6차 교육 과정 비교

구분	제 5 차 교육 과정	제 6 차 교육 과정	비 고
추구하는 인간상	◦ 건강한 사람 ◦ 자주적인 사람 ◦ 창조적인 사람 ◦ 도덕적인 사람	◦ 건강한 사람 ◦ 자주적인 사람 ◦ 창조적인 사람 ◦ 도덕적인 사람	◦ 제5차 교육 과정과 교육 개혁 심의 심의 결과를 반영하여 지속적인 추구

구분	제5차 교육 과정	제6차 교육 과정	비 고
교육과정의 성격	◦ 미제시	◦ 제시함 ①국가수준의 법적 근거 마련 ②공통적 일반적 기준 제시 ③각 시·도 교육청의 편성·운영 지침 필요	◦ 국가 수준 교육 과정의 성격 명료화 ◦ 시·도 교육청 역할 기능부여
교육과정의 구성방침	◦ 구성 방향 (문장서술)	◦ 구성방침 (4개 항목) ①도덕성, 공동체 의식 -민주 시민 육성 ②창의적 능력 개발교육 내용, 방법의 다양화 ③편성·운영체제 개선	◦ 교육 과정의 구성 방침을 목표 내용 방법 운영면에 걸쳐 명확하게 제시
편성운영의 기본지침	◦ 계획(8개 항목) · 수업 일수 학기 구분 · 국민 정신 교육 강조 · 교재, 교구 및 시설 완비 등 ◦ 지도(7개 항목) . 학습 자료 활용 . 교과 및 특별활동 관련 . 탐구 생활 중시 등	◦ 편성(11개 항목) · 시도교육청(4개항목) -교육 과정 편성·운영 지침 작성 제시 -편성·운영 자문 기구 구성 등 · 학교(7개 항목) -학교 교육 과정 편성 -수업 시간 확보, 배정 운영 등 ◦ 운영(20개 항목) · 시·도 교육청 : 8개 항목 -교육 과정 편성·운영 지도 -교육 자료 개발, 교육 과정 연수 등	◦ 교육 과정 구성 제정, 편성·운영의 역할 분담 명확화 · 교육부 -구성·제정 지도 조언 · 시·도 교육청 -편성·운영 지침 -지도 조언, 평가 · 학교 -편성·운영, 평가

구분	제5차 교육 과정	제6차 교육 과정	비 고
	∘ 평가(4개항목)	· 학교 : 12개 항목 -기초·기본 사항 지도 -학습 목표 성취 -선택 교과 운영 -도덕, 환경, 진로 지도 등 ∘ 평가(4개 항목)	
교육과정 체제	· 평가 목적, 방법, 중점 ∘ 기타(5개 항목) · 특수 학급 · 야간수업의단위시간 [총론] 제1장 교육 과정 구성의 방향 제2장 중학교 교육 과정 1. 교육 목표와 편제 2. 교과 활동의 목표와 내용 3. 특별 활동의 목표와 내용 [각론] 가. 교과 목표 나. 학년 목표 및 내용 1. 목표 2. 내용 다. 지도 및 평가상의 유의점 1. 지도 2. 평가	-평가 목적, 방법, 활용 등 ∘ 기타(12개 항목) -야간 수업의 단위 시간 [총론] 제1장 교육 과정의 편성과 운영 1. 교육 과정의 성격 2. 교육 과정의 구성 방침 3. 편제 4. 시간 배당 기준 5. 편성·운영의 기본 지침 제2장 교과와 특별 활동 1. 교과 2. 특별 활동 [각론] 1. 성격 2. 목표 3. 내용 가. 내용 체계 나. 학년별 내용 4. 방법 5. 평가	∘ 국가수준의 교육 내용 기준으로서 체계 ∘ 교육 과정의 성격 제시 ∘ 교과의 성격을 명시 ∘ 목표-내용-방법-평가의 일관성 있는 기준 제시 ∘ 내용 체계 제시 (교과의 내용 기준 명확히 파악 가능)

<표2> **제6차 교육 과정에 의한 「고등학교 수학 I」 교과서 5종과 대학 교재 목록**

책 명	저 자	기호	출 판 사	발행년도
·수학 I	금종해, 정순영, 박평순	M1	한샘출판사	1995년도
· 〃	김연식, 김홍기	M2	동아출판사	〃
· 〃	박배훈외 5인	M3	교학사	〃
· 〃	박한식외 5인	M4	지학사	〃
· 〃	조승제	M5	재능교육	〃
·미분적분학	양성호외 6인	M6	학문사	1997년
·Caclus with analytic geometry	Thurman S. Peterson	M7	Marper & Row	1966년

2. 연구내용

본 연구는 제6차 교육 과정에 따른 「고교 수학 I」 교과서의 극한의 정의와 예제를 조사하여 문제점을 찾아내고, 개선 방향을 제시하고자 한다. 그런데 「고등학교 수학 I」 교과서를 전부 분석하는 것이 연구의 목적에 부합되겠지만, 「수학 I」 교과의 교과목표에 따라서 제작된 각종 교과서가 대동소이 할것으로 생각되어서 5가지만 분석하였다.

곧 「고등학교 수학 I」 교과서에서 정의하는 극한의 개념과 이에 관련한 예제들을 조사하였고, 또 대학 교재들에 실린 극한의 정의와 예제를 조사하여 이를 비교 분석하였다. 그래서 그들 사이에 나타나는 차이점을 고교 수학의 성격, 목표 등에 비추어 문제점을 찾고 이를 해소하는 방안을 모색하였다.

Ⅲ. 결과 및 고찰

제6차 고교 과정에서 「수학Ⅰ」의 성격을 " 「공통수학」보다 높은 수준이고 「수학Ⅱ」 과목 이수에 기초가 되는 과목"으로 규정하였다. 또 " 「수학Ⅰ」과목의 학습에서는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 습득과 이를 활용하여 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하게 하고, 단계적인 과정을 밟아 문제를 해결하는 습관을 가지도록 한다." 고 학습내용을 규정하였다. 이 성격에 맞추어 목표에서 "나. 수열과 함수의 극한 및 미적분의 기본 개념과 법칙을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다." 고 하였다. 그런데 방법에서는 "③ 극한에 관한 정의와 성질을 직관에 의하여 지도한다." 라고 규정하고 있다.(부록참조)

이상의 규정에 의하여 제작된 현재 「고교 수학Ⅰ」 교재들에서 수열의 극한 부분과, 함수의 극한 부분으로 나누어 문제들을 고찰하기로 한다.

1. 수열의 극한에 관한 교과 내용 분석과 엄밀한 정의의 도입

앞서 말한대로, 제6차 교육 과정에서는 극한의 지도 방법을 "극한에 관한 정의와 성질을 직관에 의하여 지도한다."라고 규정하고 있다. 이 규정에 의하여 현재 「고등학교 수학Ⅰ」 교재들에서는 수열의 극한의 정의를 다음표와 같이 말하고 있다. 또 이것을 이해시키기 위하여 기본 예제들을 몇 가지씩 들고 있는데, 대표적인 예제들은 다음표와 같다.

<표3> 「고교 수학Ⅰ」 교과서에서 사용하는 수열의 극한값의 정의와 예제

교재번호	면	정 의	기 본 예 제
M1	86	· 무한수열 $\{a_n\}$에서 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 제 n항 a_n의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 한다.	· $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, · $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$
M2	97	· 무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질때, a_n이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴 한다고 한다.	· $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
M3	91	· 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 이 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다.	· $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ · $\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}=1$
M4	76	· 무한수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n이 일정한 수 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다.	· $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ · $\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\right\}=1$
M5	97	· 무한수열 $\{a_n\}$, 즉 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 에 대하여 n이 한없이 커짐에 따라 수열의 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다.	· $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ · $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

이상의 정의들은 모두 대동소이하다. 여기서 몇 가지 문제점을 살펴보면, 저, 용어 '한없이' 에 대한 정의이다. 이 '한없이' 라는 용어는 수학적인 용어라고 말할 수 없다. 그래서 비수학적인 용어로 수학을 정의하게 된 것이다. 이것은 수열의 극한에 관한 엄밀한 정의를 「고교 수학Ⅰ」의 과정에서 지도하기가 어려울 것으로 여겨서 피한 것으로 사료된다. 그런데 「고교 수학Ⅰ」 교육 과정에서 이 정의에 아무런 문제 의식 없이 교육을 함으로써, 「수학Ⅰ」 교육 과정의 성격에 위배되고 있다. 즉 수열의 극한의 기본적인 개념과 원리를 이해하게 하지 못하는 것이다. 그래서 교육 과정의 목표를 달성하기 어렵다.

한편 대학 교재의 미분, 적분학 교재에서는 수학적인 엄밀한 극한의 정의를 사용하고 있다. 우리는 두권의 교재에서 사용하는 정의와 이에 관련된 기본 예제를 조사하였더니 아래표와 같았다.

<표4> 대학 교재에서 사용하는 수열의 극한에 대한 정의와 예제

교재기호	면	정 의	기 본 예 제
M6	35	. 수열 $\{a_n\}$에서 임의의 주어진 임의의 양수 ε에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$ 인 모든 자연수 n에 대해서 $\lvert a_n - L \rvert < \varepsilon$ 이 성립할 때, 수열 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 한다.	. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 임을 증명하여라. . 수열 $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$의 값은 2임을 보여라.
M7	38	. A sequence is said to approach a value A as n increases, if corresponding to every positive number ε there is some positive integer N such that $\lvert s_n - A \rvert < \varepsilon$ is true for every integer n that satisfies the inequality $n > N$	. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\} \to 0$ as $n \to \infty$

이 <표 4>의 두 정의는 같은 내용이다. 여기서는 '한없이'라는 용어는 사용하지 않는다. 그대신 '임의의 양수 ε'을 비교의 기준으로 사용하는 것이다. 이것은 확실히 수학적인 용어이다. 그러므로 이를 엄밀한 정의라고도 한다. 이 엄밀한 정의를 「고등학교 수학 I」의 교육 과정에서 곧바로 도입하는 것은 어려움이 있을 것으로 여겨지지만, 그렇다고 교육의 목표와 성격에 일치하지 못하는 직관에 의한 정의만을 고집하는 것도 문제가 있다고 본다.

그러므로 「고교 수학 I」 교육 과정에서는 수열의 극한의 정의는 몇 가지 기준값을 줌으로서 이 기준값보다 가까워지는 항의 수를 보여주는 방법으로 엄밀한 정의에 접근하게 하고, 또한 엄밀한 정의가 있음을 알 수 있도록 교육할 수 있을 것이다. 그래서 우리는 다음과 같이 예제를 통하여 「고등학교 수학 I」 교육 과정에서 수열의 극한에 관한 엄밀한 정의가 있음을 보여줄 수 있다고 본다.

<예제 3.1> 수열 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 에 대하여 각 항의 값이 1과의 차이가 $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10,000}$, $\frac{1}{10^6}$, $\frac{1}{10^8}$ 보다 작게되는 수열의 항은 제 몇 항부터인가 ?

(풀이) $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\frac{1}{100}$ 의 부등식을 풀자.

그러면 $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{100}$ 곧, $n=100$ 항부터 그 이후의 모든 항은 1과의 차이가 $\frac{1}{100}$ 보다 작음을 알 수 있다.

같은 방법으로 계산하면 1과의 차이가 $\frac{1}{10,000}$, $\frac{1}{10^6}$, $\frac{1}{10^8}$ 보다 작게되는 수열의 항은 각각 $n=10,000$, $n=10^6$, $n=10^8$ 번째 항 이후부터임을 알 수 있다.

본 예제에서는 수열 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 의 항들과 1과의 차이가 우리가 줄 수 있는 임의

의 기준값들 (곧 $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10,000}$, $\frac{1}{10^6}$, 및 $\frac{1}{10^8}$)보다 작게 하는 첫번째 항을 항상 잡을 수 있음을 보여 준다. 그렇다면 이것을 이용하여 수열의 극한에 관한 엄밀한 정의를 다음과 같이 말할 수 있다.

<정의 3.2> "수열 $\{a_n\}$이 a에 수렴한다." 는 정의는, 임의의 양수 ε에 대하여 수열의 제N항을 잡을 수 있어서 이 N항보다 같거나 큰 모든 n항들에 대하여

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

이 성립하는 것이다. 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 또는 $n \to \infty$ 일 때 $a_n \to a$ 와 같이 나타낸다.

또한 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않는 것은 위의 <정의 3-2>에서 적당한 자연수 N을 잡을 수 없는 경우이다.

앞의 <예제 3.1>을 정의에 맞추어서 극한값 1과의 차이가 ε 보다 작게 되는 첫번째항, 곧 제 N항을 찾아보자.

임의의 양수 ε 에 대하여 적당한 자연수 N을 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 로 잡는다(단, [ ]는 최대정수 함수이다.). 그러면 N보다 같거나 큰 모든 n에 대하여

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| \le \frac{1}{N+1}$$
$$= \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

을 얻는다.

이것은 수열 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 이 제 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$번째 항을 제N항으로 잡으면 <정의 3.2> 를

만족시키므로 <정의 3.2>에 의하여 이 수열의 극한이 1임을 밝힌 것이 된다.

다른 예제를 하나 더 생각해 보자

<예제 3.3> $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 임을 증명하여라.

(증명) 임의의 양수 ε 을 잡는다.

적당한 자연수 N을 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 로 잡자. 그 N 보다 같거나 큰 모든 n 에 대하여

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}=\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

이 성립한다.

따라서 <정의 3.2>에서 사용하는 기준값 ε 을 아무리 작은 양수로 잡더라도 항상 제N항을 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 로 잡을 수 있어서 N항보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 이다.

그러면 이제 수렴하지 않은 수열을 <정의 3.2>의 관점에서 생각해 보자.

<예제 3.4> 수열 $\{(-1)^n\}$은 발산함을 밝혀라.

(증명) 여기서는 이 수열이 어떤 실수 a에도 수렴하지 않음을 보이자.

먼저 $a\geq 0$ 일 때는 모든 홀수 n에 대하여 $|(-1)^n-a|\geq 1$ 이고,

다음에 $a<0$ 일 때는 모든 짝수 n에 대해서 $|(-1)^n-a|\geq 1$ 이다.

따라서 $0 < \varepsilon < 1$ 가 되도록 ε을 잡으면 수렴의 <정의 3.2>를 만족하는 실수 a 는 양수나 0 또는 음수에도 없다.

곧 $\{(-1)^n\}$ 은 발산한다.

이상에서 우리는 수학적 기준이 되는 수 ε 을 임의로 줄 때, 수열의 극한값 a 가 있다는 것은 첫째, 그 극한값 a와 수열의 항과의 값의 차이가 주어진 기준값 ε 보다 작게 되는 최초의 항 N항을 찾을 수 있음을 보이고 둘째, 이 N항보다 같거나 큰 모든 n항들에 대하여 그 n항과 극한값 a와의 차이가 기준값 ε 보다 작음을 증명하는 것으로 요약된다.

이러한 수열의 극한에 관한 정의는 짧은 시간 안에 고등학교 학생들에게 학습시킬 수 있을 것이다. 그러면 「고등학교 수학 I」의 교육 목표를 달성할 수 있게 될 것이다.

이제 위의 정의의 관점에서 우리는 수열의 극한에 관한 기본적인 예제를 소개하고 필요한 정리를 도입하여 증명해 보인다.

<예제 3.5>

두 수열

$$\{a_n\} : \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$$

$$\{b_n\} : 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{8}, \frac{4}{10}, \cdots, \frac{n-1}{2n}, \cdots$$

에서 만들어지는 수열

$$\{C_n\} = \{a_n + b_n\} : \frac{4}{2}, \frac{7}{4}, \frac{10}{6}, \frac{13}{8}, \cdots, \frac{3n+1}{2n}, \cdots$$

은 수렴할 것인가? 수렴한다면 그 극한은 얼마인가? 하는 문제를 생각해 보자.

쉽게 알 수 있는 바와 같이

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

$\varepsilon = 0.01$ 로 주어졌을 때 N항보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여

$\left| C_n - \frac{3}{2} \right| < 0.01$ 을 만족하는 제 N항을 찾아보자.

우선

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

로부터 N_1항 보다 같거나 큰 모든 n에 대하여 $|a_n - 1| < 0.005$ 인 제 N_1항을 찾는다.

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$$

이므로 $N_1 = \frac{1}{0.005} + 1 = 201$ 으로 하면

201 보다 같거나 큰 모든 n 에 대하여 $|a_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{200} = 0.005$

또

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$$

로부터 N_2항 보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여 $\left| b_n - \frac{1}{2} \right| < 0.005$ 인 제 N_2 항을 찾는다.

$$\left| b_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n}$$

이므로 $2N_2 = \frac{1}{0.05} = 200$, 즉 $N_2 = 101$ 으로 하면

101 보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여

$$\left| b_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{200} = 0.005$$

N_1과 N_2 중에서 큰 것을 N이라 하면 (N=201)

201 보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여

$$|C_n - \frac{3}{2}| = |(a_n + b_n) - (1 + \frac{1}{2})|$$

$$= |(a_n - 1) + (b_n - \frac{1}{2})|$$

$$\leq |a_n - 1| + |b_n - \frac{1}{2}|$$

$$< 0.005 + 0.005$$

$$= 0.01$$

즉 우리가 구하는 항의 번호는 N=201 임을 알 수 있다.

우리는 여기서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

이 성립하는 것을 추측할 수 있으며 위에서 ε=0.01 에 대해서 N=201을 구하는 방법은 그의 증명을 시사하고 있다.

사실 일반으로 다음의 정리가 성립된다.

<정리 3.6> 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 모두 수렴하고

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 일 때 엄밀한 극한의 정의를 사용하여 다음이 성립함을 보일 수 있다.

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ (k 는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

(증명) (1) $k=0$ 인 경우는 분명하므로 $k\neq 0$ 인 경우를 증명하자. $\varepsilon > 0$을 임의의 양의 실수라고 하자. $\{a_n\}$ 이 a 에 수렴하므로 제K항이 존재하여

K항보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여 $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$

이 성립하게 할 수 있다.
따라서

K항보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여 $|ka_n - ka| = |k|\ |a_n - a| < \varepsilon$

이므로 $\lim_{n\to\infty} ka_n = ka$ 가 된다.

(2) $\varepsilon > 0$을 임의의 양의 실수라고 하자. 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$이 각각 α와 β에 수렴하므로, 제 K_1, K_2 번째 항들이 존재하여 다음이 각각 성립하게 할 수 있다.

K_1항 보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여 $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

K_2 항 보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여 $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

여기서

K_1, K_2 중 큰 것을 K 라 하면

K항보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ 가 성립한다. 같은 방법으로, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$ 임을 보일 수 있다.

수열들의 곱에 대한 극한은 극한의 곱이라는 것을 보이기 전에 특수한 경우의 보조정리를 증명한다.

<보조정리 3.7> $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ 이다.

(증명) $\varepsilon>0$ 을 임의의 양의 실수라고 하면, 양의 정수 N_1 이 존재하여 N_1보다 같거나 큰 모든 n에 대하여 $|a_n|<1$

이다.

또 양의 정수 N_2 가 존재하여 N_2 보다 같거나 큰 모든 n에 대하여

$$|b_n|<\varepsilon$$

이다. 만약 N_1, N_2 중 큰 것보다 n이 더 크다고 하면

$$|a_n b_n|<\varepsilon$$

이다. ▨

(3) $a_n b_n = (a_n-\alpha)(b_n-\beta)+a_n\beta\ \ +\alpha b_n-\alpha\beta$이다.

또 (2)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\alpha)=0=\lim_{n\to\infty}(b_n-\beta)$$

이고, <보조정리3.7> 에 의하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n-\alpha)(b_n-\beta)=0$

이고, (1)에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n\beta=\alpha\beta=\lim_{n\to\infty}\alpha b_n$

이다. 따라서 (2)에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n b_n &= \lim_{n\to\infty}[(a_n-\alpha)(b_n-\beta)+a_n\beta+\alpha b_n-\alpha\beta] \\ &= \lim_{b\to\infty}(a_n-\alpha)(b_n-\beta)+\lim_{n\to\infty}a_n\beta+\lim_{n\to\infty}\alpha b_n+\lim_{n\to\infty}(-\alpha\beta) \\ &= 0+\alpha\beta+\alpha\beta-\alpha\beta=\alpha\beta\end{aligned}$$

이다.

(4) $\beta \neq 0$ 이므로 $|\beta| > 0$ 이다. 그런데 $\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$ 이므로 특히, $\varepsilon = |\beta|$ 에 대하여 K_1이 존재하여 다음이 성립한다.

K_1 보다 같거나 큰 모든 n에 대하여

$$|\beta| - |b_n| \leq |b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

따라서 K_1항 보다 같거나 큰 모든 n에 대하여 $|b_n| > \frac{|\beta|}{2}$ 이다.

$\varepsilon > 0$ 을 임의의 양의 실수라고 하자. $\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$ 이므로 제 K_2항이 존재하여

K_1 보다 같거나 큰 모든 n에 대하여

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|^2 \cdot \varepsilon}{2}$$

이 성립한다. 여기서, K_1, K_2 중 큰 것을 K 라고 하면

K 보다 같거나 큰 모든 n에 대하여

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n|\,|\beta|} < \varepsilon$$

이므로 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ 이다. 따라서 (3)의 결과로부터

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = (\lim_{n \to \infty} a_n) \cdot (\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n}) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

이다.

위의 정리는 고등학교 교과서에서는 증명 없이 다루어지고 있다.

우리는 <정의 3.2>를 이용하여 이 사실을 증명하였는데 이것이 「고등학교 수학 I」 교육 과정에서 도입하기 위해서는 앞의 <예제 3.5>를 잘 설명하여 이해시키는 것이 필요할 것이다. 그러면 적어도 <정리 3.6>의 (1)과 (2)는 무난히 이해시킬 수 있을 것으로 사료된다.

이러한 정의와 증명법을 「고등학교 수학 I」 교육 과정에 소개함으로서 수학의 엄밀성을 주지시키며, 또 고등학교 수학 교과목의 가장 중요한 미분 적분학의 기초를 튼튼히 할 수 있을 것이다. 이것은 제6차 고등학교 수학 교육 과정의 성격에서 말하는 "수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하게 한다."는 대 전제와 수학 교과목의 목표에서 "가. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하게 한다."는 첫 번째 목표에도 매우 부합된다고 사료된다.

그래서 「 고등학교 수학 I 」 교육 과정에서 <정의 3.2>와 <정리 3.6>의 (1), (2)의 증명 및 (3) (4)의 소개는 필요하다고 본다.

2. 함수의 극한에 관한 교과 내용 분석과 엄밀한 정의의 도입

함수의 극한에 대한 교육 방법도 수열의 극한에 대한 교육 방법과 같이 "직관에 의하여 지도한다."는 제6차 교육 과정에 의하여 현재 「고등학교 수학 I」 교재들에서는 그 정의를 다음 표와 같이 말하고 있다. 아울러 이 정의를 이해시키는 예제들도 다음 표에서 조사하였다.

<표5> 「고교 수학 I」 교과서에서 사용하는 함수의 극한값의 정의와 예제

교재기호	면	정 의	기 본 예 제
+M1	108	· 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른값을 취하면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 가 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 x가 a에 가까워질 때, $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다.	. $\lim_{x \to 1}(x+1)=1$. $\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

교재기호	면	정 의	기 본 예 제
M2	113	· 함수 $y=f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 x가 a 에 가까워질 때, $f(x)$는 α 에 수렴한다고 한다.	· $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ · $\lim_{x\to1}(x^2+2)=3$
M3	118	· 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, $f(x)$는 α에 수렴한다고 한다.	· $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$
M4	113	· 함수 $y=f(x)$에서 x가 a와 같지 않으면서 a에 한없이 가까워짐에 따라 함수값 $f(x)$가 일정한 값 α에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다.	· $\lim_{x\to1}(2x+1)=3$ · $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$
M5	97	· 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, 함수값 $f(x)$가 일정한 값 α에 한없이 가까워지면. $f(x)$는 α에 수렴한다 고 한다.	· $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$

이상의 정의들도 모두 비슷하다. 여기서도 극한의 정의를 "한없이 가까워진다."는 용어를 사용하고 있다. 이에 대한 문제점은 앞의 수열의 극한에 관한 내용 분석 부분에서 다룬 것과 같다. 그래서 이 함수의 극한의 정의를 수학적인 용어로 정의할 필요가 제기된다.

한편 대학 교재의 미분적분학 교재에서는 수학적인 엄밀한 정의를 조사하여 다음 표를 얻었다.

<표6> 대학 교재에서 사용하는 함수의 극한값의 정의와 예제

교재기호	면	정 의	기 본 예 제
M6	45	. 함수 f 는 a를 포함하는 구간 내의 모든 점에서 정의되어 있다 (단, $x=a$에서 정의되어 있지 않아도 좋다.). 임의의 양수 ε을 주더라도 항상 수 δ가 존재해서 $0<\|x-a\|<\delta$ 이면, $\|f(x)-L\|<\varepsilon$ 이 성립할 때, 함수 f 는 a에서 극한 L을 갖는다고 한다.	. $\lim_{x\to1}(x+1)=2$. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$
M7	51	. A function $f(x)$ is said to approach a value A as x approaches a, if corresponding to every positive number ε there is some positive number δ such $\|f(x)-A\|<\varepsilon$ is true for every x that satisfies the inequality $0<\|x-a\|<\delta$.	. Prove that $\lim_{x\to2}(5x-2)=8$.

이 두권의 교재에서 사용하는 함수의 극한의 정의는 같은 내용이다. 여기서는 "한없이 가까워진다." 는 용어를 사용하지 않는다. 그 대신 함수값과 함수의 극한값 사이의 차이를 수학적인 기준값미만으로 규정하고 있는데 이것은 분명히 수학적인 용어이다. 이것은 엄밀한 함수의 극한에 관한 정의이다.

이제 이 정의를 「고등학교 수학 I」의 교과 내용에 그대로 도입하는 것은 약

간의 무리가 있을 것이다. 그러므로 「고등학교 수학 I」 교재에서는 함수의 극한의 엄밀한 정의를 주기에 앞서서, 간단한 1차함수에서 예제를 통하여 이 정의의 성격을 암시하고, 그 후에 엄밀한 정의를 도입하여 설명하도록 할 수 있을 것이다. 곧 다음과 같은 예제로서 함수의 극한의 엄밀한 정의를 도입한다.

<예제 3.8> 함수 $f(x)=2x-1$ 에 대하여 다음에 답하라.

(a) $f(x)$와 5가 $\frac{1}{100}$ 보다 더 작게 차이가 나기 위해서는 x 가 3에 얼마나 가까이 있어야 하는가 ?

(b) $f(x)$와 5가 $\frac{1}{10,000}$ 보다 더 작게 차이가 나기 위해서는 x가 3에 얼마나 더 가까이 있어야 하는가 ?

(c) $f(x)$와 5가 양수 ε 보다 더 작게 차이가 나기 위해서는 x와 3이 얼마나 가까이 있어야 하는가 ?

(풀이) x와 3과의 거리는 $|x-3|$ 이고 $f(x)$와 5와의 거리는 $|f(x)-5|$ 이다.

(a) 그러므로 문제는 $x\neq3$ 이면서 $|x-3|<\delta$ 일 때, $|f(x)-5|<\frac{1}{100}$ 을 만족하는 수 δ 를 구하는 것이 된다.

만약 $|x-3|>0$ 이면 $x\neq3$ 이므로 문제는 같은 형식인 $0<|x-3|<\delta$ 일 때 $|f(x)-5|<\frac{1}{100}$ 을 만족시키는 수 δ 를 구하는 것이 된다.

만약 $0<|x-3|<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}$ 이면

$$|f(x)-5|=|(2x-1)-5|=|2x-6|=2|x-3|<\frac{1}{100}$$

이다.

즉 $0 < |x-3| < \frac{1}{200}$ 이면 $|f(x)-5| < \frac{1}{100}$ 이다.

따라서 문제 (a)의 답은 $\delta = \frac{1}{200}$ 로 주어지는 것이다. 즉

만약 x가 3으로부터 $\frac{1}{200}$ 의 거리 이내에 있으면 $f(x)$는 5로 부터 $\frac{1}{100}$의 거리 이내에 있을 것이다.

(b) (a)에서 $\frac{1}{100}$을 $\frac{1}{10,000}$로 바꾼다면, 같은 방법을 사용하여 x가 3으로 부터 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10,000} = \frac{1}{20,000}$ 보다 작게 떨어져 있어야함을 알 수 있다. 즉

$0 < |x-3| < \frac{1}{20,000}$ 이면 $|f(x)-5| < \frac{1}{10,000}$ 이다.

(c) 앞의 (a)와 (b)에서 각각 $\frac{1}{100}$ 과 $\frac{1}{10,000}$ 의 차이를 허용하는 대신에 임의의 양수 ε 의 허용 범위 내로 정확하기를 원한다면, 앞에서와 마찬가지로

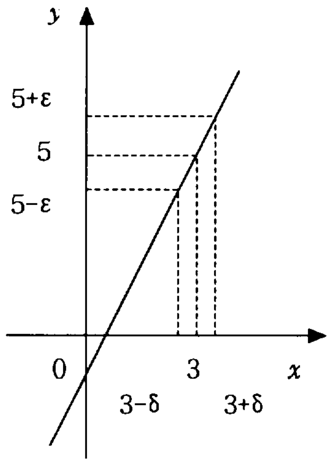
$0 < |x-3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ 이면 $|f(x)-5| < \varepsilon$ 이다. - - - - (*)

임을 알 수 있다.

이것이 x가 3에 접근할 때 $f(x)$ 가 5에 접근한다는 것을 말하는 정확한 방법이다. 왜냐하면 x의 값이 3으로 부터 $\frac{\varepsilon}{2}$ 의 거리 이내에(그러나 $x \neq 3$이다.) 있도록 할 수 있음을 말한다.

(*)식은 다음과 같이 쓰여질 수 있다. 그리고 이것이 <그림3-1>에 설명되어 있다. 구간 (3-δ, 3+δ)내에 있는 3이 아닌 x를 택함으로써 $f(x)$값이 구간 (5-ε, 5+ε)내에 있도록 할 수 있다. 곧

$3-\delta < x < 3+\delta$ $(x \neq 3)$ 일 때마다 $5-\varepsilon < f(x) < 5+\varepsilon$ 이다.



<그림 3-1>

이제 식(*)를 보기로 하여 극한의 엄밀한 정의를 다음과 같이 정한다.

<정의 3.9> $f(x)$는 a를 포함하는 어떤 개구간 (a를 제외시킬 수 있음)에서 정의한 함수라 하자. 만약 모든 양수 ε에 대하여

$$0 < |x-a| < \delta \text{ 일 때마다 } |f(x)-L| < \varepsilon \text{ 이다.}$$

를 만족하게 하는 대응되는 양수 δ 가 존재하면, x 가 a에 접근할 때 $f(x)$의 극한값이 L 이다 라고 말하고

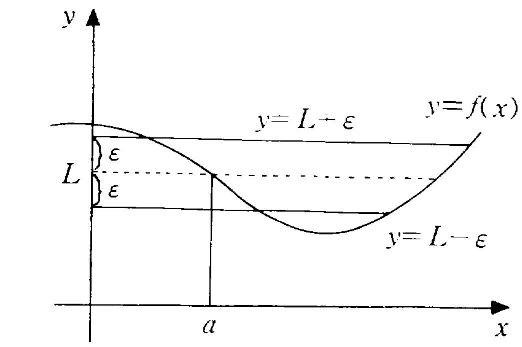
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

로 나타낸다.

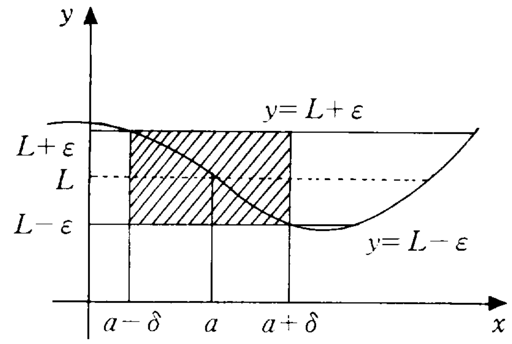
이 극한값의 정의를 두 가지로 다시 표현할 수 있다.

첫째는 말로서의 표현이다. 곧

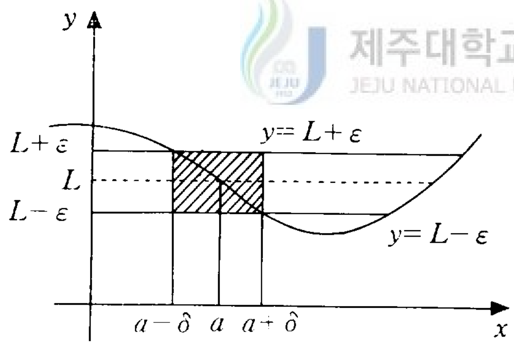
「 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 은 x를 a에 충분히 가깝게 (그러나 a와는 같지 않게) 택함으로



< 그림 3-2 >



< 그림 3-3 >



< 그림 3-4 >

써 $f(x)$의 값을 우리가 원하는 만하는 만큼 L에 가깝게 만들 수 있음을 의미한다.

둘째는 기하학적인 해석으로서 그래프를 이용하여 주어질 수 있다. 곧, 만약 양수 ε 이 주어지면, 수평선 $y=L+\varepsilon, y=L-\varepsilon$ 그리고 $f(x)$의 그래프를 그린다.<그림 3-2참조>. 만약 $\lim_{x \to a} f(x)=L$ 이면 x가 구간 $(a-\delta,\ a+\delta)$내에 있으며 $x \neq a$ 로 제한한다면 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=L-\varepsilon$ 과 $y=L+\varepsilon$ 사이에 놓이도록 하는 양수 δ 을 찾을 수 있다. (<그림 3-3>을 보라). 만약 그런 δ 를 찾을 수 있다면 더 작은 δ 값에 대하여도 위의 성질을 만족함을 알 수 있다. <그림3-3>과 <그림 3-4>에서는 선택된 양수 ε이 아무리 작더라도 성립되어야 한다는 것이 중요하다.

<그림 3-4>는 더 작은 ε이 선택되면 더 작은 양수가 요구될 수 있음을 보여주고 있다.

이제 극한값에 대한 명제를 증명하는 것을 다음과 같이 하면 정의를 이해하는

데 도움이 될 것이다.

먼저 수 ε에 도전한다. 그러면 적당한 δ를 만들 수 있어야 된다. 이러한 것을 특별한 ε이 아닌 모든 양수 ε에 대하여 할 수 있어야 된다.

두 사람 A와 B 사이의 시합을 상상하고 자신이 B 라고 상상해 보자. A와 $f(x)$의 값들을 ε(예컨데 0.01) 범위 이내로 고정된 수 L에 근사하게 해야 된다고 규정한다. 그러면 B는 $0<|x-a|<\delta$ 일 때마다 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 을 만족하는 δ의 값을 찾음으로써 대답한다. 그러면 A는 더 엄격해져서 더 작은 ε값 (예컨데 0.0001)으로 도전하게 된다. 그러면 또다시 B는 대응되는 δ를 찾음으로 응답해야 한다.

일반적으로 ε의 값이 작아지면 작아질수록 대응되는 δ의 값은 더 작아짐이 틀림없다. A 가 아무리 작은 ε을 만들더라도 항상 B가 이긴다면 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 이다.

이제 <정의 3.9>에 맞추어서 다음 예제를 증명할 수 있다.

<예제 3.10> $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$ 임을 증명하라.

(풀이) 1. 문제의 예비분석 (δ의 값을 추측).

ε을 주어진 양수라 하자.

$$0<|x-3|<\delta \text{ 일 때마다 } |(4x-5)-7|<\varepsilon$$

을 만족하는 수 δ를 찾고자 한다. 그런데

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = |4(x-3)| = 4|x-3|$$

이므로 우리가 원하는 것은

$$0<|x-3|<\delta \text{ 일 때마다 } 4|x-3|<\varepsilon$$

이다. 즉

$0 < |x-3| < \delta$ 일 때마다 $|x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$

임을 원한다. 이 사실은 $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$를 선택해야 함을 추측케 한다.

2. 증명 (δ가 적합함을 보임).

주어진 ε>0에 대하여 $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$를 선택한다. 만약

$0 < |x-3| < \delta$ 이면

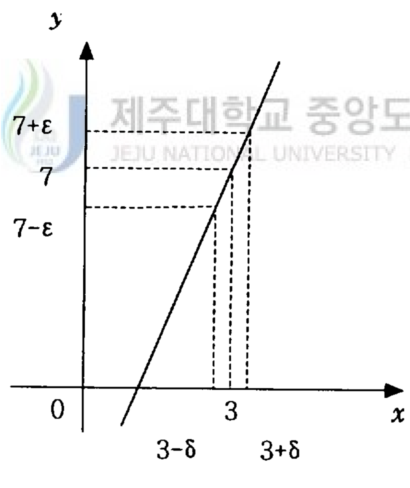
$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

이다. 그러므로 극한값의 정의에 의하여

$$\lim_{x \to 3}(4x-5) = 7$$

이다.

이 예제는 <그림 3-5>에 설명되어 있다.



<그림 3-5>

<예제 3.10>의 풀이에서 추측과 증명의 두 단계가 있었음을 주목한다. 우리들

이 δ의 값을 추측할 수 있도록 하기 위해서 예비분석을 했다. 그러나 두 번째 단계에서 우리가 정확하게 추측했는가를 되돌아보고 조심스럽게 또한 논리적으로 증명을 해야겠다. 이러한 과정은 수학의 많은 부분에서 사용하는 전형적인 방법이다. 때때로 먼저 문제의 답에 대한 현명한 추측을 하고 그 추측이 정확한가를 나중에 증명하는 것이 필요하다.

이상에서 우리는 함수의 극한에 관한 엄밀한 정의를 내렸다. 이제 이 <정의 3.9>의 관점에서 함수의 극한에 관한 필요한 정리를 도입하여 증명한다.

<정리 3.11> f와 g를 R의 부분집합 X에서 R에로의 실수값 함수라 하자.

$\lim_{x\to a} f(x) = L$이고 $\lim_{x\to a} g(x) = M$ 이면 다음의 정리가 성립한다.

(i) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L+M$

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = L-M$

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ $(M\neq 0)$

(증명) 정리의 복잡성을 피하기 위해 (i)만을 증명하기로 한다.

ε을 임의의 양수라 하자. 그러면 $\delta_1 > 0$ 이 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta_1 \text{ 이면 } |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 이고}$$

또 위에 주어진 양수 ε에 대하여 $\delta_2 > 0$ 이 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta_2 \text{ 이면 } |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 이게 할 수 있다.}$$

여기서 δ_1, 과 δ_2 중 작은 것을 δ라 하자. 이때 $0 < |x-a| < \delta$ 이면

$$
\begin{aligned}
|f(x)+g(x)-(L+M)| &\le |f(x)-L| + |g(x)-M| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

이다.

그러므로 <정의 3.9>에 의하여

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M \text{ 이다.} \quad ▨$$

이상과 같이 극한의 엄밀한 정의를 내리는 것은 「고등학교 수학Ⅰ」의 교육과정에서 가능하리라 본다. 이것은 고등학교 수학 교육의 목표와 성격에도 부합하므로, 이러한 엄밀한 정의를 고등학교 교과서에 도입할 필요가 있다고 생각된다. 그렇게 함으로써, 수학의 기초와 원리를 확실히 이해하게 될 것이다.

혹시 이 내용을 정확히 이해하지 못하는 학생이라 하더라도, 극한의 개념이 막연히 "한없이 가깝다."는 용어로 정의하는 것이 아니라, 엄밀한 수학적 용어에 바탕을 둔 확실한 논리가 있는 개념임을 인식할 것이다. 따라서 「고등학교 수학Ⅰ」을 배운 학생들은 확실한 기초 위에서, 미분 적분의 이론을 학습해 나갈 수 있을 것이며 여러 가지 자연 현상을 엄밀하게, 또 과학적인 분석으로 탐구해야함을 인식하는 데도 도움이 될 것으로 생각된다.

Ⅳ. 摘 要

수학교육의 현대화 과정에서 논리의 엄밀성을 강조하기 위해서는 미적분학의 토대가 되는 극한의 개념 및 그 성질에 관한 교과 내용과 지도는 현재의 직관적인 방법과 동시에 엄밀한 논리의 접근도 재고되어야 한다고 생각된다.

본 연구에서는 첫째, 고등학교 교과서와 대학 교과서를 비교 분석함으로써 극한의 개념을 직관적인 방법에서 탈피하여 보다 정확하고 엄밀한 정의를 내리기 위하여 예제를 통하여 정의에 접근하는 방법을 제시하였다.

둘째, 함수의 극한의 엄밀한 정의를 내리는 방법을 제시하였다. 곧 기준이 되는 양수 ε값 대신에 작은 양수들을 이용하여 δ값을 찾는 방법을 학습케 하는 예제를 설명하고, 이 예제를 보기로 하여 함수의 극한을 엄밀하게 정의하였다.

또 이 정의에 따라서 1차 함수의 예를 통하여 극한값을 구하고 이 극한값이 옳음을 ε - δ 방법으로 자세히 증명해 보임으로써 고등학교 학생들이 엄밀한 정의의 개념을 알고 이를 응용할 수 있는 방법을 제시하였다. 이것은 고등학교 수학교육의 목표와 성격에 부합됨을 강조하였다.

셋째, 현재 고등학교 교과서에서 증명 없이 사용하는 수열의 극한과 함수의 극한에 대한 기본적인 성질들을 위에 제시한 엄밀한 정의를 이용하여 각각 증명해 보임으로써, 수학의 엄밀성 이해와 논리적 사고력의 발달에 이바지 할 수 있도록 하였다.

이상의 내용들은 제6차 수학 교육 과정에서 개선되지 못한 극한의 정의를 엄밀하게 내리는 방법을 제시한 것인데, 앞으로 교육부의 연구진과 교과서 집필자들 모두에게 권장되어야 할 사항으로 제시하는 바이다.

참 고 문 헌

[1]. 금종해 · 정순영 · 박평순 (1996), 「고등학교 수학 I 」, 한샘출판(주)

[2]. 김연식 · 김홍기 (1996), 「고등학교 수학 I 」, 동아출판사

[3]. 박배훈외 5인 (1996), 「고등학교 수학 I 」, (주)교학사

[4]. 박한식외 5인 (1996), 「고등학교 수학 I 」, (주)지학사

[5]. 이현구외 6인(1995), 「고등학교 수학 I 」, (주)천재교육

[6]. 정봉화, 이우영, 신향균(1995) , 「고등학교 수학 I 」, 형설출판사

[7]. 조승제 (1996), 「고등학교 수학 I 」, 재능교육

[8]. 조태근외 6인 (1995), 「고등학교 수학 I 」, 금성교과서(주)

[9]. 교육부(1992), 「고등학교 수학과 교육과정 해설」

[10]. 교육부(1995), 「고등학교 제6차 교육과정 해설」

[11]. 미분적분학교재편찬위원회(1989), 「미분적분학」, 삼영사

[12]. 양성호외 5인 (1997), 「미분적분학」, 학문사

[13]. 김용운, 김용국 (1986), 「수학사 대전」, 우성문화사

[14]. 김철리(1990), "고등학교 수학에서의 극한개념 지도에 관한 연구", 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문

[15]. 이순재 (1988), "고등학+교 수학에서 함수의 극한개념과 연속성의 도입에 대하여", 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문

[16]. 권라상(1991), " 함수와 수열의 극한과 초등함수의 연속성", 조선대학교 교육대학원 석사학위 논문

[17]. Thurman S.Peterson. (1966), Calculus with analytic geometry, Harper & Row, New York, Landon. Tokyo

<Abstract>

The Study for Teaching the Definition of Limit in High School

Ko, Eun-Heui

Mathematics Education Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by Professor Song Seok-Zun

In this thesis, We rescarched the followings;

First, We studied the contenes of mathematics in the 6th curriculum which the Ministry of Education in korca had announced.

Second, we studied the definitions and some examples on the limits of both sequences and functions from mathematics textbooks that used in high schools and in universities, respectively. And then we compared them and found some difference between them.

At last, we tried to solve the defeets of definitions in the high school texbooks and to introduce the strict definitions of limitis of both sequences and functions into high school textbooks.

---

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1997.

<부록1>

< 제6차 교육 과정 각론중 수학교과 과정에 관한 규정>

수 학

1. 성 격

수학과는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하게 하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르게 하여, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 하는 교과이다.

수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분의 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하다. 즉, 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과이다.

고등 학교 수학 교과는 대수, 해석, 기하, 확률과 통계 영역의 내용을 중학교 수학의 내용과 연계시키고 학습 계통을 유지하도록 구성하여, 고등 학교 수학에서 가장 기본적이고 핵심적인 내용으로 구성된 '공통 수학', '공통수학'보다 발전된 내용인 '수학Ⅰ', '수학Ⅰ'보다 심화, 확장된 내용인 '수학 Ⅱ', 수학의 실생활 적용면을 강조한 '실용 수학'의 4과목으로 구성한다.

수학 학습에서는 기본적인 수학적 개념을 명확히 이해하게 하고, 그 개념을 나타내는 용어나 기호를 정확하게 사용할 수 있게 한다. 그리고 수학적인 원리나 법칙의 근거와 상호 관련성을 알게 하여, 여러 가지 현상을 수학적으로 고찰하고 처리할 수 있게 한다. 또, 문제를 해결할 때에는 문제를 분명히 이해하고, 해결 계획을 작성하여 실행한 다음, 반성 과정을 거치는 사고 태도를 가지도록 하여야 한다.

2. 태　　도

수학의 기본적인 지식과 기능을 가지게 하고, 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하여, 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 한다.

가. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하게 한다.

나. 여러 가지 현상을 수학적으로 표현하고 논리적으로 사고하여, 처리할 수 있는 능력을 기르게 한다.

다. 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 하고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 합리적으로 문제를 해결하는 태도를 가지게 한다.

수　　학 I

1. 성　　격

'수학 I'과목은 '공통 수학'을 이수한 후에 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위한 첫 단계 과목으로, 기본적인 수학에 지식, 수학적 사고 방법, 실제 문제 상황이나 다른 교과에의 응용 능력 등을 기르게 하며, '수학II'과목 이수에 기초가 되는 과목이다. '수학 I'과목은 일반계 고등 학교 인문 과정, 자연 과정 학생들이 이수하기에 알맞은 과목이다.

내용은 행렬, 수열, 극한, 미분법, 적분법, 확률과 통계 등으로 구성한다.

'수학 I'과목의 학습에서는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 습득과 이를 활용하여 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하게 하고, 단계적인 과정을 밟아 문제를 해결하는 습관을 가지도록 한다. 또한, 기본적인 지식의 습득과 기능의 숙달을 통하여 여러 가지 현상을 수학적으로 고찰하고 처리할 수 있도록 하는 데 중점을 둔다.

2. 목 표

가. 행렬의 기본 개념과 성질을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

나. 수열과 함수의 극한 및 미적분의 기본 개념과 법칙을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

다. 확률과 통계의 기본 개념과 원리를 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

3. 내 용

가. 내용 체계

영역	내 용	
대수	행 렬	· 행렬과 그 연산 · 연립일차방정식과 행렬
	수 열	· 등차수열과 등비수열 · 여러 가지 수열 · 수학적 귀납법 · 알고리즘과 순서도
해석	수열의 극한	· 무한수열의 극한 · 무한급수
	함수의 극한과 연속성	· 함수의 극한 · 함수의 연속성
	다항함수의 미분법	· 도함수 · 미분법 · 도함수의 활용
	다항함수의 적분법	· 부정적분 · 정적분 · 정적분의 활용

영역	내	용
확률과 통계	순열과 조합	· 경우의 수 · 순열 · 조합
	확 률	· 이항정리 · 확률의 뜻 · 확률의 계산
	통 계	· 도수분포 · 확률분포 · 통계적 추측

나. 내 용

<대 수>

(1) 행 렬

(가) 행렬과 그 연산

① 행렬의 뜻

② 행렬의 연산

③ 역행렬

(나) 연립일차방정식과 행렬

<용어와 기호> 행렬, 행, 열, 성분, $m \times n$행렬, 정사각행렬, 영행렬, 단위행렬, 역행렬. A^{-1}

(2) 수 열

(가) 수열의 뜻

(나) 등차수열

(다) 등비수열

(라) 여러 가지 수열

(마) 수학적 귀납법

(바) 알고리즘과 순서도

<용어와 기호> 수열, 항, 유한수열, 무한수열, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 계차수열, 수학적 귀납법, 알고리즘, 순서도, a_n, $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$

<해 석>

(1) 수열의 극한

(가) 무한수열의 극한

① 무한수열의 수렴, 발산

② 극한값의 계산

③ 무한등비수열의 극한

(나) 무한급수

① 무한급수의 뜻

② 무한등비급수의 수렴, 발산

<용어와 기호> 극한(값), 수렴, 발산, 무한대, 무한등비수열, 무한급수, 부분합, 무한급수의 합, 무한등비급수, ∞, $\lim_{n \to \infty} a_n$

(2) 함수의 극한과 연속성

(가) 함수의 극한

① 함수의 극한

② 함수의 극한에 관한 성질

(나) 함수의 연속성

① 함수의 연속

② 연속함수의 성질

<용어와 기호> 구간, 폐구간, 개구간, 우극한, 좌극한, 연속, 불연속, 연속함수, 최대 · 최소의 정리, 중간값 정리, $[a, b]$, (a, b), $\lim_{x \to a} f(x)$

(3) 다항함수의 미분법

(가) 도함수

① 미분계수

② 미분가능과 연속

③ 미분계수의 기하학적 의미

(나) 미분법

① x^n 의 도함수

② 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

(다) 도함수의 활용

① 접선

② 함수의 증가와 감소

③ 함수의 극대와 극소

④ 함수의 그래프

⑤ 속도와 가속도

<용어와 기호> 증분, 평균변화율, 순간변화율, 미분계수, 미분가능, 도함수, 증가, 감소, 극대, 극소, 극값, 극대값, 극소값, 최대값, 최소값, Δx, Δy, $f'(x)$, y', $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d}{dx}f(x)$

(4) 다항함수의 적분법

(가) 부정적분

① 부정적분의 뜻

② 부정적분의 계산

(나) 정적분

① 구분구적법과 정적분

② 정적분의 기본 정리

③ 정적분의 계산

(다) 정적분의 활용

① 넓이

② 부피

③ 속도와 거리

<용어와 기호> 부정적분, 피적분함수, 적분상수, 구분구적법, 정적분, 위끝, 아래끝, $\int f(x)\,dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$, $[F(x)]_a^b$

<확률과 통계>

(1) 순열과 조합

(가) 경우의 수

① 합의 법칙, 곱의 법칙

(나) 순 열

① 순열의 뜻

② 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열

(다) 조 합

① 조합의 뜻

② 중복조합

(라) 이항정리

<용어와 기호> 순열, 계승, 원순열, 중복순열, 조합, 중복조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, P_r, $n!$, $n\prod r$,

(2) 확 률

(가) 확률의 뜻

(나) 확률의 계산

<용어와 기호> 시행, 사건, 확률, 통계적 확률, 수학적확률, 여사건, 배반사건,조건부확률, 종속사건, 독립사건, 독립시행, $P(A)$, $P(B/A)$

(3) 통 계

(가) 도수분포

① 평균과 표준편차

(나) 확률분포

① 확률변수와 확률분포

② 평균과 표준편차

③ 이항분포

④ 정규분포

(다) 통계적 추측

① 모집단과 표본

② 표본평균과 그 분포

③ 모평균의 추정

<용어의 기호> 가평균, 확률변수, 이산확률변수, 연속확률변수, 확률분포, 확률밀도 함수, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 정규분포곡선, 표준화, 표준정규분포, 표본, 전수조사, 표본조사, 모집단, 임의추출, 모평균, 모표준편차, 표본평균, 표본 표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, $P(X=x)$, $E(X)$, $V(X)$, $B(n,p)$, $N(m,\sigma^2)$

4. 방 법

가. '수학 I'의 학습은 다른 과목과의 연계성을 고려하여 학습 내용의 중복이나 논리적 비약이 없도록 내용 수준을 적정화한다.

나. '수학 I'의 학습은 대수, 해석, 확률과 통계 영역의 특성과 난이도를 고려하여 학생의 수준에 알맞게 적절히 재구성하여 지도할 수 있으나, 내용이 통합적으로 이해 되도록 한다.

다. 일반계 고등 학교 직업 과정과 실업계 및 기타계 고등 학교에서도 '수학'을 선택하여 지도할 수 있으며, 이 경우에 학교의 실정과 학생의 수준에 알맞게 필요한 부분을 재구성하여 지도할 수 있다.

라. 학생들의 경험과 욕구를 바탕으로 하여, 수학의 기본적인 개념과 원리를 간단하고 구체적인 것에서 추상적인 것으로 지도함으로써, 스스로 발견하고 창의적으로 문제를 해결해 나가도록 한다.

마. 문제해결력을 개발시키기 위하여 문제해결과정과 구체적인 해결전략을 적절히 사용하며, 문제 해결의 결과뿐만 아니라 해결 과정과 그 방법도 중시하도록 한다.

바. 습득된 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제를 발견하고,자주적으로 문제해결을 위한 전략을 세워 이를 해결해 나갈 수 있도록 한다.

사. 수학적 개념은 상호 관련성을 인식할 수 있도록 지도되어야 하며, 그러한 개념들이 수학 또는 다른 과목이나 실생활에 활용될 수 있도록 하여 수학의 가치와 실용성을 알게 한다.

아. 교수・학습 과정에서 계산력 향상을 요하지 않는 복잡한 계산이나 문제 해결력 향상등을 계산기나 컴퓨터를 가능하면 적극 활용할 수 있도록 한다.

아. 내용은 다음 사항에 유의하여 지도한다.

(1) 역행렬은 2×2 행렬만 다루고, 연립방정식의 풀이는 역행렬을 이용한다.

(2) 수학적귀납법의 원리는 지도하되, 수학적 귀납법에 의한 증명은 강조하지

않는다.

(3) 극한에 관한 정의와 성질은 직관에 의하여 지도한다.

(4) 미적분에서 사용되는 함수들은 가급적 간단한 다항함수만 사용하되, 관계가 되는 함수들은 다항함수가 아니어도 간단한 경우는 취급한다.

(5) 통계에서 큰수의 법칙은 n이 충분히 클 때에 사건 A의 상대도수가 사건 A가 일어날 확률 P(A)의 근사값이 됨을 보여 주는 근거임을 예를 통하여 인식시켜 주는 정도로만 다룬다.

5. 평　가

가. 수학과 학습에서 전반저긍로 요구되는 다음 사항을 강조하여 평가한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 이해

(2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 기능

(3) 기본 지식을 토대로 하여 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

(4) 수학적 지식과 기능을 활용하여 합리적으로 문제를 해결하는 태도

나. 교육 과정에 제시되어 있는 내용에 대한 학습 성취 수준을 전반적으로 평가하여야 하나, 특히 다음 사항을 강조하여 평가한다.

(1) 행렬의 기본 개념과 성질 이해 및 그 활용

(2) 수열의 이해 및 그 활용

(3) 수열과 함수의 극한 및 미적분의 기본 개념과 법칙의 이해 및 그 활용

(4) 확률과 통계의 기본 개념과 원리의 이해 및 그 활용

다. 수학 학습 평가는 학생 개개인의 수학 학습을 돕고, 교사 자신의 수업 방법을 개선한 것이어야 한다.

라. 진단 평가, 형성 평가, 총괄 평가를 통해 교수-학습의 전·후 과정에 대한 평가를 실시하도록 한다.

마. 수학 학습 평가는 수학적 지식과 기능, 추론 능력, 문제 해결력, 수학적 성향의 정도를 판단해야 한다.

바. 수학 학습 평가의 지필 검사는 가능하면 선다형 문제를 줄이고 서술형 문제를 많이 출제하여 스스로 문제 해결을 위한 전략을 세우고, 논리적인 추론을 통하여 해결해 나가는 과정을 종합적인 사고력을 평가할 수 있어야 한다.

사. 평가의 결과는 학생, 교사, 학부모에게 유용한 정보로 제공될 수 있도록 하여야 한다.