碩士學位論文

高等學校 敎育課程에서 圖形의 變換에 대한 指導內容 分析 및 改善 方案

指導敎授 宋 錫 準

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

朴 鍾 國

1998年 8月

高等學校 教育課程에서 圖形의 變換에 대한 指導內容 分析 및 改善 方案

指導敎授 宋 錫 準

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

1998年 5月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 朴 鍾 國

朴鍾國의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1998年 7月 日

審査委員長 印

審 査 委 員 印

審 査 委 員 印

〈抄 錄〉

高等學教 教育課程에서 圖形의 變換에 대한 指導內容 分析 및 改善 方案

朴 鍾 國

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

指導教授 宋 錫 準

현대 수학의 개념은 수학 교육의 현대화 추세와 함께 학교 교육의 새로운 개념을 제기하고 있다. 도형의 변환도 새로운 개념의 한 분야이다. 이 논문은 도형의 변환의 여러 가지 변환의 구조, 현행 교육과정의 분석, 현행 교육과정의 재구성, 학교 현장에서의 다양한 문제점을 발견하여 도형의 변환의 효과적인 교육과정 방법을 제시하고자 한다.

목 차

초 록
Ⅰ. 서 론 ………… 1
1. 연구의 필요성 및 목적 ………… 1
2. 연구의 제한점 ………… 3

Ⅱ. 이론적 배경 ………… 3
1. 변환과 변환군 ………… 3
2. *Affine* 변환 ………… 6
3. *Euclid* 기하 ………… 8
4. 사영 변환 ………… 12

Ⅲ. 현행 교육과정의 분석 ………… 15
1. 수학과의 일반목표 분석 ………… 15
2. 변환에 관련되는 지도내용 분석 ………… 18
3. 「도형의 변환」 소단원의 지도 목표 ………… 21

Ⅳ. 새 지도목표 설정과 단원의 재구성 ………… 33
1. 「도형의 변환」에 대한 일반 지도목표 설정 ………… 34
2. 「도형의 변환」의 지도목표와 세목적 지도목표의 설정 ………… 40

Ⅴ. 변환에 관한 설문지 조사 ………… 44
1. 설문지 조사 ………… 44
2. 설문지 조사 결과의 분석 ………… 46

Ⅵ. 결 론 ………… 48

참고문헌 ………… 50

<Abstract> ………… 51

< 부 록 Ⅰ > ………… 52

표 목 차

표1. 도형의 변환과 관련되는 지도내용 19
표2. 소단원 구성과 지도 내용(중학교2) 21
표3. 소단원의 지도 목표(중학교2) 22
표4. 소단원의 구성과 지도 내용(중학교3) 23
표5. 소단원의 지도 목표(중학교3) 26
표6. 소단원의 구성과 지도 내용(공통수학) 27
표7. 소단원의 지도 목표(공통수학) 28
표8. 소단원의 구성과 지도 목표(수학Ⅱ) 29
표9. 소단원의 지도 목표(수학Ⅱ) 32
표10. 새로운 소단원 구성과 배열 및 지도요소 선정 35
표11. 설문내용과 이해도 45
표12. 계열에 따른 이해도 차이검정 47

Ⅰ. 서　론

1. 연구의 필요성 및 목적

현재 학교에서 가르치는 수학 교육의 목적은, 첫째가 훌륭한 전인적 인간을 형성하고 교양 교육의 학습으로 수학적 사고력의 양성과 과학 문명의 기초로서 수학을 이해하고 사물을 올바르게 분석 파악하는 태도를 기르는 것이고, 둘째가 실생활에 직접 관련되는 응용면의 기능을 습득하여 적용시키는 것이며, 셋째가 상급학교에 진학해서 수학 또는 다른 학문을 습득하는데 필요한 수학적 지식을 습득하는 것이다.[1)]「수학을 참으로 이해하려면 기본이 된다고 생각하는 몇 개의 사항으로부터 출발하여 새로운 것을 구축해 나갈 수 있게 되어야 하며 또한 개념이 바르게 형성되어야 한다. 따라서 개념이나 원리, 법칙에 대한 이해는 보다 나은 수학적 사고방식이나 문제해결력을 낳게 하고 수학의 체계를 보다 명확하게 파악할 수 있도록 하는 기본적 인 것」[2)] 임을 나타낸다.

현대 수학의 영역은 전문적인 용어들이 빽빽한 덤불로 감싸여 있고, 그 풍경은 해독 할 수 없는 방정식과 이해 할 수 없는 개념들의 모임인 것이다. 불과 몇 사람만이 현대 수학의 세계가 생동하는 영상과 호기심을 자극하는 아이디어로 가득차 있다는 것을 알고 있다. 많은 사람들에게 수학이란 변하지 않고, 믿음직하면서 전통적인 학문으로서 논리의 굳건한 토대 위에 서 있는 확실성을 보장해 주는 것으로 인식되고 있다.[3)]

이런 면으로 볼 때 학교에서 가르치는 수학의 내용은 대학 교육을 받게 될 때뿐만 아니라 실제적 사회생활을 하는 데 필요한 학문으로서 구성되어야 한다.

---

1) [7], 김평국, P, 1.
2) [11], 신동선 외, P, 25.
3) [5], 기우항, P, 3.

현행 교육 과정에서의 새로 등장한 초등학교, 중학교 수학에서의 변환의 개념 및 고등학교 수학II 에서의 행렬과 일차 변환은 현대 수학의 집합·함수를 그 기본으로 삼고 있다. 변환의 개념이 수학 교육에 들어오게 된 이유를 살펴보면 다음과 같다.[4)]

1) 눈에 보이는 실체적 대상과 눈에 보이지 않는 조작적 존재가 양립할 수 있도록 시도한다.
2) 고찰하는 대상이 개개의 공간적 형태인 도형이던 것에서, 공간 자체를 대상으로 삼도록 전환한다.
3) 점·직선·평면이라는 공간 개념이 기본 구성 요소에 대하여 다각적으로 이해할 수 있도록 한다.
4) 도형 학습의 영역에서 세 가지 입장을 병존시키므로써 이제까지의 지식을 정리함과 동시에, 앞으로 더욱 발전적으로 공간을 인식할 수 있도록 그 기초를 닦으려 한다.

변환의 개념이 초·중등교육을 통해서 일관되게 취급될 수 있도록 그 지도 내용이 편성되어 있으나 현행 교육과정에서 처음으로 채택된 내용이 대부분이다. 그러므로 각급 학교 사이의 지도 계통이 확립되기에는 아직도 미비하고, 더욱이 한 단원에서도 여러 개념들 사이의 상호관계가 분명하지 못한 부분이 있을 것으로 생각된다. 그리고 이 연구에 대한 선행 연구마저 많지 않은 형편이다.

본 연구에서는 도형의 변환에 관한 현대 수학에서의 이론적 배경을 알아보고 여러 가지 변환들 사이의 구조를 분석 체계화하는 동시에 중·고등학교에서의 효율적인 변환 지도를 위한 지도 목표 정립과 구조화된 지도 내용을 작성함을 그 목적으로 한다.

---

4) [14], 임재규 외, P, 245.

2. 연구의 제한점

본 연구는 고등학교 학생과 중·고등학교 교사를 대상으로 실시된 것으로 표본의 크기가 학생은 442명, 교사는 42명밖에 안되고 제주도내 소재한 8개교를 대상으로 한 것이기 때문에 본 연구를 모든 학생에게 확대 적용시키는 데는 무리가 있다고 생각한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 변환과 변환군

1) 변환의 정의

집합 X에서 X위로의 전단사(*bijection*)인 사상을 X에서 X위로의 변환(*Transformation*) 또는 X에서의 변환 이라고 한다.5) 집합 X에서의 변환 f에 의하여 한 점 $p \in X$에 그 자신이 대응하면, 곧 $f(p) = p$이면, p는 변환 f의 부동점이라고 부른다. X의 모든 원소가 부동점이면, 그 변환을 X에서의 항등변환이라고 부르고, 기호 i_X 또는 i로 나타낸다.

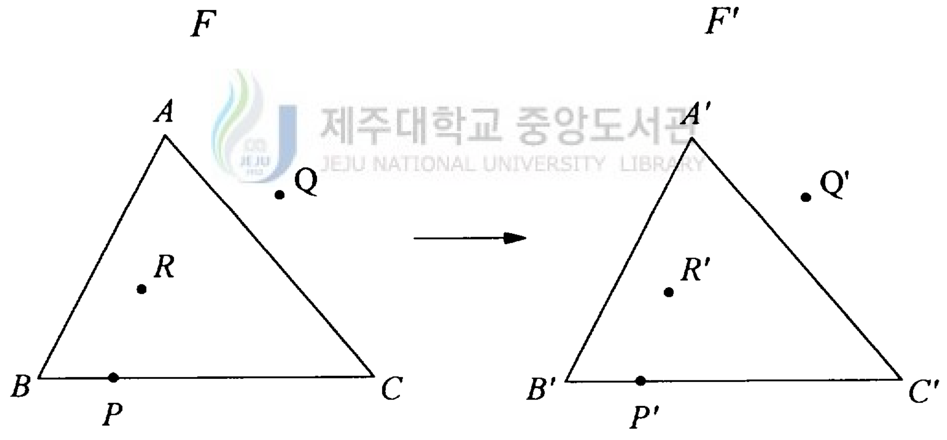
수학에서 변환(*Transformation*)이라는 것은 한 점을 다른 점으로 옮기거나, 도형을 다른 도형으로 옮기거나, 식을 다른 형태의 식으로 바꾸는 것은 모두 변환이라 하며, 좌표변환은 좌표를 바꾸는 것을 의미하며, 합동변환은 점을

5) [15], 현종익, P, 267.

점으로 옮길 때, 임의의 두 점사이의 거리가 변화지 않은 것을 말한다. 또한 임의의 n차원에서 각 점 p에서 동일한 공간의 하나, 또는 보다 많은 점 p로 대응시키는 것을 변환, 혹은 사상이라고 한다. 여기서 '옮긴다'란 말은 한 편으로는 이동이라고 하는데 도형의 이동과 변환의 구별은 분명히 지적하기 곤란하나 보통 중등수학에서 이동은 변환의 특수한 경우로 취급되고 있다.6)

일반적으로, 「도형의 변환(*transformation of figure*)」이라고 말할 때는 도형의 위상 변환을 의미하고 있다. 이 경우에 X는 위상이 주어진 집합이라야 하며, 또 f는 그 역함수 f^{-1}와 함께 연속인 함수이라야 한다. 한 위상변환 f에 의하여 X에서의 한 도형 F가 도형 F'으로 옮겨지면 F와 F'는 서로 위상동형이라고 말한다.

지금 평면에서 한 개의 변환을 생각할 때, 이 변환에 의하여 상의 도형 F가 같은 상의 도형 F'에 변환되었다고 하면,



(그림 1)

$A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, $P \to P'$와 같이 도형 F상의 꼭지점이나 변 상의 점에 각각 변환되고, 또 $Q \to Q'$, $R \to R'$와 같이 일반으로

6) [14], 최종렬, P, 5.

평면상의 임의의 점 P, Q도 이 변환에 의하여 역시 상에 대응하는 점 P', Q'에 변환되는 것에 유념해야 한다.7)

그런데, 보통 평면 R^2(단, R은 실수체) 또는 공간 R^n에는 두 점 사이의 거리에 의하여 매우 강한 위상이 주어져 있다. 그러므로, $X = R^2$ (또는 R^n)에서의 한 변환 f는 다음의 두 조건을 만족하는 X에서 자신으로의 한 함수이다.

(i) f는 $1-1$의 대응(전단사)이다.

(ii) f는 연속이다.

여기에서 f가 $p \in X$에서 연속이라는 것은, p에 수렴하는 X에서의 임의의 한 수열 $\{p_k\}$ 에 대하여, 수열 $\{f(p_k)\}$ 가 $f(p)$에 수렴함을 뜻한다. 그러므로 $f(p) = p'$, $f(p_k) = p'_k$ ($k = 1, 2, \cdots$)이라고 할 때, f가 p에서 연속이라는 것은 $p_k \to p$ ($k \to \infty$)이면 $p'_k \to p'$ ($k \to \infty$) 가 되는 것을 의미한다.

2) 변환군과 불변성

앞으로 집합 X는 한 위상공간을, 또 (위상)공간 X에서의 변환 f는 위상변환을 나타낸다고 생각한다.

공간 X에서의 변환 전체의 집합을 G라 하고, 두 변환의 곱으로는 두 함수의 합성을 취하기로 한다. 그러면, 전단사인 두 함수의 합성도 전단사이고, 연속인 두 함수의 합성도 연속이므로, G는 변환의 곱에 대하여 닫혀 있다. 그리고, G에서 다음의 성질이 성립하는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

(i) $\forall f,\ g,\ h \in G, \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (결합법칙)

(ii) $\exists i \in G, \quad \forall f \in G \ : \ i \circ f = f = f \circ i$ (항등 변환의 존재)

---

7) [14], 최종렬, P, 7.

(iii) $\forall f \in G,\ \exists f^{-1} \in G\ :\ f^{-1} \circ f = i = f \circ f^{-1}$(역변환의 존재)

따라서, G는 곱에 관하여 한 군을 이루며, 이것을 공간 X에서의 변환군이라고 말한다. 변환군 G의 공집합이 아닌 부분집합 H가 두 조건

(i) $\forall f,\ g \in H,\quad g \circ f \in H$ (폐포성)

(ii) $\forall f \in H,\quad \exists f^{-1} \in H$ (역변환)

를 만족하면, H가 변환의 곱에 관하여 역시 한 변환군을 이루게 된다. 이 때, H를 변환군 G의 부분변환군 또는 간단하게 부분군이라고 부른다.

G가 공간 X의 변환군일 때, G에 속하는 임의의 변환에 대하여 변하지 않는 공간 X의 성질을 변환군 G에 관한 불변성이라고 말한다. 변환군 G의 한 부분군 H에 대하여, G에 관한 불변성은 H에 관한 불변성이 된다.

2. *Affine* 변환

1) *Affine* 공간의 정의

한 집합 X와 실수체 R위의 n차원 *vector*공간 V^n과의 순서쌍 $A^n = (X,\ V^n)$이 다음 공리를 만족할 때, A^n을 n차원 *Affine*공간이라 부른다.

(i) 임의의 한 점 $P \in X$와 $a \in V^n$에 대하여, 평행이동 $f_a(P) = P + a \in X$가 정해진다.

(ii) 임의의 두 점 $P,\ Q \in X$에 대하여, *vector* $b = \overrightarrow{PQ} \in V^n$가 다만 하나 정해진다.

(iii) 임의의 $P,\ Q,\ R \in X$에 대하여, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$이다.

특히 A^1을 *Affine*직선, A^2를 *Affine*평면이라고 부른다.

2) *Affine* 변환

Affine 공간 $A^n = (X, V^n)$ 에 대하여

(i) $f: X \to X$ 가 전단사이고

(ii) φ : $V^n \to V^n$ 이 *vector* 공간으로서 동형적(同型的)일 때, (f, φ) 를 *Affine* 변환이라고 부른다. 그러나, $f: X \to X$ 만으로 *Affine* 변환을 다음과 같이 정의 할 수 있다.

(i)′ f 는 직선 l 을 직선 $f(l)$ 로 옮긴다.

(ii)′ l 위에서 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ 이면, $f(l)$ 위에서 $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda \overrightarrow{f(A)f(C)}$ 이다. (단, $\lambda \in R$)

물론, 1)의 (i) 에서 정의한 평행이동 f_a 도 *Affine* 변환의 일종이다.

이 *Affine* 변환은 합동변환이나 닮음변환을 일반화한 것으로 기하학적으로는 평행선을 평행선으로 옮기는 평면위에서의 연속변환이라 정의하고 *Affine* 변환에 의하여 불변인 도형의 성질을 *Affine* 적 성질이라 하고 다음 성질을 갖는다.[8)]

① 직선은 직선으로 옮겨진다.

② 평행인 두 직선은 평행인 두 직선으로 옮겨진다.

③ 같은 직선 위에 있는 두 선분의 길이의 비는 불변이다.

④ 각의 크기는 일반적으로 보존되지 않는다.

3) *Affine* 변환군

Affine 공간 $A^n = (X, V^n)$ 의 *Affine* 변환 전체를 $G_A{}^n$ 이라고 하면, 이것은 변환의 합성에 관하여 군을 이룬다. 이 군 $G_A{}^n$ 을 *Affine* 변환군이라

8) [15], 현종익, PP, 279~282.

고 부른다.

평행이동 전체 T^n은 물론 *Affine*변환군 이고, 더욱이 $G_A{}^n$의 정규부분군임을 알 수 있다. 그리고, 상군 $G_A{}^n/T^n$은 *vector*공간 V^n의 선형자기동형군 $GL(V^n)$과 동형적이다.

3. *Euclid*기하

1) 직교변환

이제, $V_R{}^n$을 n차원 내적 *vector*공간, 즉 임의의 $a, b \in V_R{}^n$에 대하여 $(a, b) \in R$이 정해지고 다음 성질을 만족하는 공간이라고 한다.

(i) $(a_1 + a_2,\ b) = (a_1,\ b) + (a_2,\ b)$

$(a, b) = (b, a)$

$(\lambda a, b) = (a, \lambda b) = \lambda(a, b) \quad (\lambda \in R)$

(ii) 임의의 $a \in V_R{}^n$에 대하여, $(a, a) \geq 0$; $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

이 때, *Schmidt*의 직교 화법에 의하면, $V_R{}^n$에서 정규직교기$\{e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots\cdots, e_{n-1}, e_n\}$, 즉, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ($i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 이고 δ_{ij}는 *Kronecker*의 *delta*)를 만족하는 기를 잡을 수 있다. 또, $V_R{}^n$의 *vector* a의 길이는 $\| a \| = \sqrt{(a, a)} \geq 0$으로써 정의된다.

다음에, $\varphi : V_R{}^n \to V_R{}^n$ 이 한 선형변환이고 $a, b \in V_R{}^n$에 대하여 $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$가 성립할 때, φ를 내적 *vector*공간 $V_R{}^n$의 직교변환이라고 말한다. 이 변환의 행렬을 A라고 하면 다음의 네 명제는 서로 동치임을 알 수 있다.

(i) $\varphi : V_R{}^n \rightarrow V_R{}^n$ 이 직교변환이다.

(ii) A가 동치행렬이다. (즉, $A^t A = E = {}^t A A$)

(iii) 임의의 $a \in V_R{}^n$에 대하여 $\| \varphi(a) \| = \| a \|$

(iv) $A = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$으로 표시할 때, $(a_i, a_j) = \delta_{ij}$.

$V_R{}^n$의 직교변환 전체는 변환의 합성에 관하여 군을 이룬다. 이것을 직교군이라 부르고, 기호 $O(n)$으로 나타낸다. 따라서, $O(n)$은 n차의 직교행렬 전체로 되는 군(즉, 직교군)과 동형이다.

2) *Euclid*공간

$V_R{}^n$이 n차원 내적 *vector*공간일 때, *Affine*공간 $R^n = (X, V_R{}^n)$을 n차원 *Euclid*공간이라고 부른다. 특히, R^1은 *Euclid*직선, R^2를 *Euclid*평면이라고 부른다.

*Euclid*공간 $(X, V_R{}^n)$에서 처음으로 도입되는 개념으로서, 두 점 $P, Q \in X$ 사이의 거리 $d(P, Q)$를 $d(P, Q) = \| \overrightarrow{PQ} \|$로써 정의한다. 그러면, X는 거리 공간이 된다. 즉 함수 $d : X^2 \rightarrow R$은 다음 "거리의 공리"를 만족한다.9)

(i) $d(P, Q) \geq 0$; $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

(ii) $d(P, Q) = d(P, Q)$ (대칭성)

(iii) $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ (삼각 부등식)

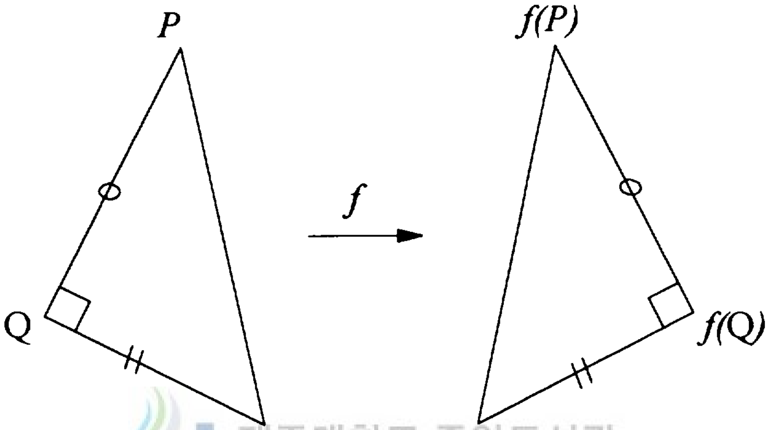
*Schwarz*의 부등식에 의하여, $(X, V_R{}^n)$에서의 두 선분 $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$이 이루는 각의 크기 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$는 $\cos\theta = (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) / (\| \overrightarrow{PQ} \| \times \| \overrightarrow{PR} \|)$

9) [13], 임재규 공저, P, 248.

로부터 정의된다.

3) 합동변환

평면 R^2 위에서 한 도형 F를 변환 f에 의하여 도형 F'로 옮겨졌을 때, F와 F'이 일치되게 옮겨졌을 때 변환 f를 합동변환(*Congruent transformation*)이라고 한다.10)



(그림 2)

n차원 $Euclid$공간 $(X, V_R{}^n)$에서, (f, φ)가 $Affine$변환인 동시에 φ가 $V_R{}^n$에서의 직교변환 (즉, $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$) 이면, (f, φ)는 합동변환이다. $(X, V_R{}^n)$의 합동변환 전체는 물론 군을 이룬다. 이것을 합동변환군이라 부르고, $G_R{}^n$으로 나타낸다. 특히, (f, i) (단, i는 $V_R{}^n$항등변환)인 모양의 합동변환은 평행이동이 된다. $Euclid$공간에서도 평행이동 전체로 되는 군을 T^n으로 나타낼 수 있으므로, $G_R{}^n / T^n \cong O(n)$인 관계가 성립한다.

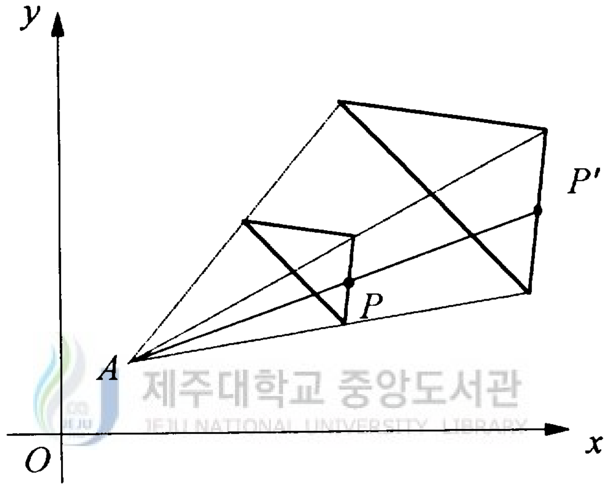
10) [15], 현종익, P, 270.

4) 닮음변환

평면 R^2 위의 정점 A와 다른 점 P에 대하여 AP 또는 그 연장선 위의점 P'를 잡아서

$$AP' : AP = k \, (\, k \neq 0 \text{ 인 상수 })$$

되도록 P에 P'를 대응시키는 변환을 닮음변환(*Similarity transformation*)이라 한다. 이 때 정점 A를 닮음의 중심, 일정한 비의 값 k를 확대율(또는 닮음비)이라 한다.[11]



(그림 3)

*Euclid*공간 $(X, V_R{}^n)$의 *Affine*변환 (f, φ)가 닮음변환이라는 것은, $\varphi : V_R{}^n \rightarrow V_R{}^n$에 의하여 한 $\lambda \in R\,(\lambda > 0)$가 정해져서 임의의 $a, b \in V_R{}^n$에 대하여 $(\varphi(a), \varphi(b)) = \lambda^2 (a, b)$ 가 성립한다는 것이다. 그러나, $f : X \rightarrow X$만으로 닮음변환을 정의하면 위의 식은 $d(f(P), f(Q)) =$

11) [15], 현종익, P, 276.

$\lambda d(P, Q)$ ($P, Q \in X$)로 변형된다. 특히, $\lambda = 1$이면 φ는 직교변환이 되므로, 합동변환은 닮음변환의 일종이다.

위의 관계로부터 $\| \varphi(a) \| = \lambda \| a \|$가 얻어지고, 이 때 λ를 닮음변환의 배률(또는 닮음비)이라고 부른다.

닮음변환 전체 $G_s{}^n$은 물론 군을 이루고, 이것을 닮음 변환군이라 부른다. 또, 임의의 $O \in X$에 대하여 O의 고정군을 $S^n(O)$ 라고 하면 $G_s{}^n / T^n \cong S^n(O)$ 이다.

4. 사영 변환

1) 사영 공간의 정의

실수체 R 위에서의 $n+1$차원 $vector$공간 V^{n+1}에 대하여, $^*V^{n+1} = V^{n+1} - \{0\}$ 을 생각한다. 이제, $^*V^{n+1}$에 속하는 임의의 두 $vector$ x, y 사이의 한 관계 ~ 를

$$x \sim y \leftrightarrow \exists \lambda \in R : x = \lambda y \ , \ \lambda \neq 0$$

에 의하여 정의하면, ~ 는 한 동치관계이다. 이 동치관계 ~ 에 의하여 $^*V^{n+1}$을 같은 종류끼리 나누어서 얻어지는 동치류 전체의 집합 $^*V^{n+1}/\sim$ 를 n차원 사영 공간이라 부르고, P^n으로 표시한다. 그러나, 다음에서는 $Affine$공간 A^n에 무한원요소를 첨가하여 P^n을 구성하는 방법을 생각한다.

2) 사영 직선과 사영 평면의 구성

사영 직선 P^1 은 *Affine*직선 A^1 에 무한 원점 P_∞ 를 첨가한 것, 즉 $P^1 = A^1 \cup \{P_\infty\}$이다. 이 때, P_∞ 도 보통의 점과 구별 없이 사용할 수 있게 하기 위하여 P^1 은 균질적이고, 닫혀 있는 것으로 생각한다. 사영 평면 P^2 도 *Affine*평면 A^2 에 무한 원점 전체의 집합 l_∞ 를 첨가하므로써 얻어진다. 즉, $P^2 = A^2 \cup l_\infty$ 이다. 그러나, P^2 는 다음 조건을 만족하도록 정한다.

(i) l이 *Affine*평면 A^2 위의 한 직선이고, 또 $P_\infty(l) \in l_\infty$ 일 때, P^2 상의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q를 지나는 사영 직선 $\bar{l} = l \cup \{\overline{P_\infty(l)}\}$은 항상 존재하고, 다만 하나 뿐이다.

(ii) P^2 는 동일 직선 위에 있지 않은 3점을 포함한다.

(iii) P^2 상의 임의의 사영 직선은 일치하거나, 다만 한 점에서 만난다.

(iv) P^2 상의 사영 직선은 적어도 3점을 포함한다. 이와 같은 사영 평면이 실제로 존재함을 밝힐 수 있다.

3) 사영 변환군

사영 직선 P^1 위에서의 한 변환 g를 상수 $a, b, c, d \in R$에 대하여

$$\begin{cases} g(x) = (ax+b)/(cx+d) \ (x \in R), & \text{단} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \\ g(P_\infty) = a/c \end{cases}$$

로써 정의한다. 이와 같은 일차 분수 변환 전체 $G_p{}^1$은 변환의 합성에 관하여 한 군을 이루고, 이것을 사영 직선 P^1 의 사영 변환군이라고 부른다. 이 때, 임

의의 $P, Q \in P^1$에 대하여 $g(P) = Q$인 $g \in G_P{}^1$가 존재하고, 또 $g(P_\infty) = P_\infty$가 되는 $g \in G_P{}^1$의 전체는 A^1의 $Affine$변환군 $G_A{}^1$이 된다. 더욱이, 다음의 관계가 성립한다.

$$G_P{}^1 \cong GL(2, R)/Z^2,$$

$$Z^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R - \{0\} \right\}$$

$g \in G_P{}^1$는 다음 기본 성질을 가진다.

(i) 임의의 서로 다른 3점을 임의의 서로 다른 3점으로 옮기는 사영 변환은 반드시 존재하고, 다만 하나 뿐이다.

(ii) P^1의 사영 변환은 복비를 불변으로 하는 것으로서 특징 지워진다.

사영 공간 P^n에서 P^n에로의 전단사 f가 P^n위의 임의의 한 사영 직선 $\overline{l}$의 상 $f(\overline{l})$도 사영 직선이 되도록 옮길 때, f를 P^n에서의 사영 변환이라고 정의한다. 이와 같은 사영 변환 전체 $G_P{}^n$은 변환의 합성에 관하여 한 군을 이루고, 이것을 P^n에서의 사영 변환군이라고 부른다. 이 경우에도 다음의 관계가 성립한다.

$$G_P{}^n \cong GL(n+1, R)/Z^{n+1}$$

$$Z^{n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \mid a \in R - \{0\} \right\}$$

여기에서 $GL(n+1, R)/Z^{n+1}$을 $n+1$차원 일반 사영 변환군이라고 부른다.

4) 사영적 성질

사영 평면 P^2 위의 두 사영 직선 $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$에 대하여, 이들 위에 있지 않은 임의의 한 점 $P_\circ$를 잡고, $P_\circ$를 중심으로 하여 $P \in \overline{l_1}$를 $Q \in \overline{l_2}$로 사영하는 함수 $f : \overline{l_1} \rightarrow \overline{l_2}$를 P^2 위에서의 배경 사상이라고 부른다. 사영 평면의 배경 사상을 자연스럽게 확장하여, n차원 사영 공간 P^n 위에서의 배경 사상이 정의된다.

일반적으로, 배경 사상에 의하여 불변인 성질을 사영적 성질이라 한다. 사영기하학은 사영적 성질을 그 연구 대상으로 한다. 예컨대, 어떤 도형이 직선이다, 점이 직선 위에 있다, 한 점을 지나는 직선속 등은 사영적 성질이지만 길이, 각의 크기, 체적 등 계량적인 개념은 사영적인 성질이 아니다.

Ⅲ. 현행 교육과정의 분석

1. 수학과의 일반목표 분석

1) 일반목표의 내용분석

수학의 기본적인 지식과 기능을 가지게 하고, 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하며, 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 한다.[12)]

(1) 수학의 기본적 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하게 한다.

(2) 여러 가지 현상을 수학적으로 표현하고 논리적으로 사고하여, 처리할 수

---

12) [4], 교육부, P, 86.

있는 능력을 기르게 한다.

(3) 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 하고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 합리적으로 문제를 해결하는 태도를 가지게 한다.

2) 일반목표의 특징

수학과 일반목표의 내용분석에서 각급 학교에 따라 공통점과 다른 점을 찾아서 그 특징을 조사해 본다.

(1) 각급 학교 일반목표의 공통점

(i) 수학의 기초(기본)적인 개념, 원리, 법칙을 이해(파악)시킨다.

(ii) 수학의 개념, 원리, 법칙을 간단 명료하게 표현하는 능력을 기른다.

(iii) 논리적으로 사고하는 태도와 능력을 기른다.

(2) 각급 학교 일반목표의 다른 점

(i) 초등학교 수학과는, 정보화 사회에 적응할 수 있는 자질을 키우기 위하여, 수량과 도형에 대한 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하게 하고, 수학적 기능을 숙달시키며, 수학적 사고를 기르게 하여, 생활 현장에서 발생하는 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하도록 하는데 중점을 둔다.[13)]

(ii) 중학교 수학과는, 여러 가지 문제를 해결하기 위해서는, 먼저 문제를 분명히 이해한 다음, 그 문제를 해결할 수 있는 합리적이고 창의적인 방법을 모색하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러 모두가 지켜야할 사회적 규범이나 질서를 준수하는 태도를 가지게 하며, 건전한 민주시민으로서 갖추어야할 합리적이고 창의적인 사고력을 길러주도록 하였다.[14)]

(iii) 고등학교 수학과에서는 중학교 수학에서 어느 정도 체계화된 수학의 지식과 기능을 더욱 명확히 하므로써, 창조적으로 문제를 발견하고 해결하는 힘을 기르고, 국가사회 발전에 기여할 수 있게 하였다.

13) [2], 교육부, P, 73.
14) [3], 교육부, PP, 61~62.

3) 변환에 관한 학년(과목)목표 분석

(1) 초등학교 학년목표의 특징[15)]

(i) 여러 가지 물건의 직관적인 관찰과 구성 등의 활용을 통하여 삼각형, 사각형, 원모양의 특징을 알아보고, 이를 활용하여 여러 가지 모양을 만들어 보게 하였다.

(ii) 삼각형, 사각형의 성질과 두 직선의 수직, 평행 관계와 평행선 그리고 도형을 관찰하는 새로운 방법으로 위상적 사영적인 간단한 성질을 알아보게 하였다.

(iii) 평면도형의 합동, 닮음, 대칭에 대한 성질과 기둥모양, 뿔 모양인 입체도형의 성질을 이해하고, 전개도를 그릴 수 있으며 회전체의 성질을 알아보게 하였다.

(2) 중학교 학년 목표의 특징[16)]

(i) 기본도형과 그의 성질을 직관적으로 이해하게 하며, 도형을 고찰하는 능력을 가지게 한다.

(ii) 삼각형의 합동과 닮음을 이해하게 하고, 평면도형의 성질을 추론하게 하여, 그 내용을 논리적으로 표현하는 능력을 가지게 한다.

(iii) 직각삼각형과 원의 성질을 추론하게 하여, 그 내용을 논리적으로 표현하는 능력을 가지게 한다.

(3) 고등학교 과목목표의 특징

(i) 공통수학에서는 좌표의 개념을 바탕으로 하여, 직선과 원의 방정식, 도형의 이동의 성질을 고찰하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

(ii) 수학Ⅱ에서는 포물선, 타원, 쌍곡선 및 공간도형의 성질을 이해하게 하고, 일차변환을 행렬로서 나타내고, 변환의 개념을 더욱 깊이 이해시키도록 하였다.

---

15) [2], 교육부, PP, 238~248.
16) [3], 교육부, PP, 68~69.

(4) 변환에 관련되는 학년목표의 종합적 특징

도형을 조사하는 새로운 방법인 변환에 관한 여러 개념들을 관찰과 조작을 통하여 초등학교 저학년부터 이해시키고, 학년과 학교가 높아지는데 따라서 같은 개념을 나선형으로 취급함으로써 단계적으로 체계화하고 더욱 깊게 이해시키도록 하였다.

2. 변환에 관련되는 지도내용 분석

1) 변환에 관련되는 지도내용의 계열

변환의 개념은 1-1대응이고, 양연속인 함수에 의하여 정의되므로, 관계・함수의 영역과 밀접하게 관련된다. 그리고, 합동변환과 닮음변환은 도형의 합동과 닮음의 성질을 기본으로 하여 형성되므로, 이와 같은 도형의 기본성질과도 불가분 하게 관련되어 있다.

수학 교육에서 도형의 영역은 매우 중요한 영역이며, 실제 수업에서 다루는 양을 보아도 큰 비중을 차지하고 있다. 오랫동안 수학은 도형을 다루는 '기하'와 동의어로 간주되었다. 물론 최근 들어, '기하는 죽었다.'는 주장이 제기될 정도로 수학교육에서 기하의 위치가 타 영역에 비해 사양기로 접어들었다고 볼 수도 있다. 그러나 평면이나 공간에서의 기하학적 도형에 관한 기본적인 사실에 대한 이해는 여전히 중요하며, 연역적 추론방법은 다른 어떤 영역보다도 기하 영역에서 다루는 것이 효과적이다. 또, 기하학적 개념은 수학의 다른 여러 분야의 개념과 밀접하게 관련되어 있어서, 기하학적 개념에 대한 이해 없이는 그러한 개념을 이해하기가 어려운 실정이다.

한편, 대수 문제는 주로 알고리즘에 의해 해결되는데 반해, 기하 문제는 그 해결 방법이 다양하기 때문에 학생들로 하여금 창조적으로 사고하게 하고, 스스로 생각하게 하는 데 효과적일 수 있다. 초・중・고등학교 수학과의 지도내용중에서 도형의 변환에 관련되는 것을 발췌, 비교하여 계열화하면 다음 표1과 같다.

표1. 도형의 변환과 관련되는 지도내용

학교	학년	위상적 성질	합동·닮음변환	도형의 기본 성질	관계·함수
초등학교	1	폐곡선의 관찰 (평면·입체도형)		기본 도형의 모양과 특징	1-1대응
	2	선분, 직선, 삼각형		기본 도형의 모양의 구성 요소	1-1대응
	3	폐곡선의 영역과 경계(각, 원)	대칭이동 알아보기	닮음도형 알아보기	1-1대응, 대응규칙
	4	위상적·사영적 변환의 성질(수직, 평행)	평면도형의 이동관계	닮음도형의 기본성질	좌표와 좌표평면
	5	직육면체의 전개도	대칭관계(선·점대칭)	삼각형의 합동조건, 닮음도형의 대응각, 대응변의 비	비례관계, $y=ax$ ($a>0$, 제1사분면)
	6	원주, 부채꼴, 호	도형의 닮음	합동·닮음조건, 닮음의 위치·중심, 축소·확대	반비례관계 $y=\frac{a}{x}$ ($a>0$, 제1사분면)
중학교	1	폐곡선의 외부·내부 단일폐곡선의 성질 오일러 공식		삼각형의 합동조건	함수, 1-1대응
	2		합동변환·닮음변환	합동·닮음의 성질, 닮음의 위치	1차함수 그래프
	3	피타고라스정리 원과 비례 삼각비			2차함수 그래프
고등학교	공통수학		간단한 변환	함수, 역함수, 합성함수, 삼각함수, 지수함수, 로그함수	
	수학 II		간단한 일차변환		

2) 변환에 대한 지도 내용의 특징

변환의 지도 내용을 크게 구분하면, 합동변환 · 닮음변환과 위상적 변환의 두 가지로 구분된다. 여기에서 위상적 변환은 수학교육 현대화 이후에 처음으로 학교 수학의 지도 내용으로 도입되었다. 한편, 합동변환 · 닮음변환에 대해서는 초등학교와 중학교에서 대칭도형의 지도에 따라서 이동이 지도 되었으며, 또 고등학교에서는 좌표평면상의 점이 이동관계로 다루어 졌을 뿐이다. 그리고, 합동변환 · 닮음변환의 지도는 이것에 선행되는 평면도형의 기본성질 및 함수의 지도와 관련 지워질 때, 비로소 가능하다. 그러나, 위상적 변환은 선행학습이나, 다른 영역과 별로 관계없이 지도 · 학습될 수 있다는 특이성을 가지고 있다. 이 합동변환 · 닮음변환과 위상적 변환에 대한 지도 내용의 특징을 들면 다음과 같다.

(1) 합동변환 · 닮음변환에 관한 지도내용의 특징

(ⅰ) 초등학교 수학에서 직관과 조작을 통하여 이동의 개념을 지도하고, 대칭도형을 이해할 수 있게 하였다.

(ⅱ) 중학교 수학에서는 논증을 통하여 삼각형의 합동과 닮음의 성질을 체계화 시켰으며, 이 기호 위에서 합동변환과 닮음변환을 쉽게 이해할 수 있게 하였다.

(ⅲ) 고등학교 공통수학에서 좌표평면상의 점의 평행이동, 간단한 대칭이동을 지도하여, 함수의 그래프 및 곡선의 지도와 관련되게 하였다.

(ⅳ) 수학Ⅱ에서는 일차변환을 지도하므로써, 공통수학에서 지도되었던 변환을 더욱 발전적으로 이해하도록 하였다.

(2) 위상적 변환에 관한 지도내용의 특징

(ⅰ) 중학교 수학에서 취급되는 오일러 공식과 정다면체의 종류를 제외한 거의 모든 지도내용은 관찰과 귀납적인 방법으로 이해시킬 수 있다.

(ⅱ) 서로 다른 것으로 보아왔던 것이, 위상적인 관점에서는 동일한 도형으로 볼 수 있게 된다는 것을 나선적인 지도를 통하여 이해시키도록 하고 있다.

3.「도형의 변환」소단원의 지도 목표

「도형의 변환」은 중학교 수학2 단원Ⅶ, Ⅷ 와 공통수학 단원Ⅳ, 수학Ⅱ에서 다음과 같은 단원 구성, 지도 내용, 지도 요소와 소단원의 지도 목표를 가지고 전개되어 있다.

표2. 소단원 구성과 지도 내용(중학교2)

중단원	소단원(쪽)	지도 내용	지도 요소	시간
1. 삼각형의 성질	준비 학습	∘ 점대칭 도형과 선대칭도형찾기,닮음의 중심 찾기	∘ 선 또는 점대칭의 위치	8
	§1. 이등변 삼각형 (5쪽)	∘ 이등변삼각형의 밑각, 꼭지점의 이등분선 ∘ 두 각의 크기가 같은 삼각형	∘ 삼각형의 합동 조건을 이용하여 증명	
	§2. 직각 삼각형의 합동 (4쪽)	∘ 직각삼각형의 합동조건	∘ 삼각형의 합동 조건을 이용하여 직각삼각형의 합동을 이해	
	§3. 삼각형의 외심과 내심 (6쪽)	∘ 외접원, 내접원의 뜻 ∘ 내접다각형, 외접다각형의 뜻 ∘ 외심과 내심의 뜻	∘ 삼각형의 외심과 내심의 뜻을 알게 하고, 그 성질을 이해	
	학습 내용 확인 문제 (1쪽)	∘ 이등변삼각형의 성질, 직각삼각형의 합동 ∘ 삼각형의 외심과 내심		
	연습문제 (1쪽)	∘ 이등변삼각형의 성질, 직각 삼각형의 합동 ∘ 삼각형의 외심과 내심	∘ 증명 순서에 가정, 결론의 진술이 반드시 들어가야 할 필요는 없다.	1

중단원	소단원(쪽)	지도 내용	지도 요소	시간
2. 사각형의 성질	§1. 평행사변형의 성질 (5쪽)	◦ 평행사변형의 정의와 그 성질	◦ 평행사변형의 정의를 알게 하였다. ◦ 평행사변형의 성질을 정의로부터 증명할 수 있도록 하였다.	8
	§2. 평행사변형의 되는 조건 (4쪽)	◦ 평행사변형이 되는 조건 및 그 성질	◦ 사각형이 평행사변형이 되기 위한 조건을 알고, 이를 활용할 수 있도록 하였다.	
	§3. 여러 가지 사각형 (8쪽)	◦ 사각형들의 집합 사이의 포함 관계 ◦ 직사각형, 마름모, 정사각형의 성질	◦ 여러 가지 사각형의 정의와 그 성질을 알게 하였다. ◦ 여러 가지 사각형들 사이의 관계를 이해할 수 있도록 하였다.	
	학습 내용 확인 내용 (1쪽)	◦ 평행사변형의 성질과 성립 조건 ◦ 여러 가지 삼각형의 관계	◦ 평행사변형의 정의와 성질을 혼동하지 않도록 한다.	
	연습 문제 (1쪽)	◦ 여러 가지 사각형에 대한 성질	◦ 평행사변형이 되는 조건과 성질과의 관계를 알게 한다.	1
	기본 문제 심화 문제 (2쪽)	◦ 삼각형의 성질, 사각형의 성질에 대한 종합적인 문제	◦ 여러 가지 사각형의 조건이 많아질수록 성질이 많아짐을 알게 한다.	2

표3. 소단원의 지도 목표(중학교2)

소 단 원	지 도 목 표
1. §1. 이등변삼각형	◦ 이등변 삼각형의 기본 성질을 증명을 통하여 이해하게 한다.

소 단 원	지 도 목 표
1.§2. 직각삼각형의 합동	◦직각삼각형의 합동 조건을 알게 한다.
1.§3. 삼각형의 외심과 내심	◦삼각형의 외심과 내심의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
2.§1. 평행사변형의 성질	◦평행사변형의 정의와 성질을 알게 한다.
2.§2. 평행사변형이 되는 조건	◦평행사변형이 되는 조건을 알 수 있도록 한다.
3.§3. 여러 가지 사각형	◦여러 가지 사각형의 정의와 그 성질을 알고, 그들 사이의 관계를 이해할 수 있도록 한다.

표4. 소단원의 구성과 지도 내용(중학교3)

중단원	소단원(쪽)	지도 내용	지도 요소	시간
1. 도형의 닮음	§1. 닮음 도형 (5쪽)	◦닮음 도형의 뜻 ◦닮음 도형의 대응하는 꼭지점, 변, 면 ◦닮음비 ◦평면도형에서의 닮음의 성질과 활용 ◦입체도형에서의 닮음의 성질과 활용	◦닮음 도형의 뜻과 닮음 도형에서 대응하는 꼭지점, 대응하는 변, 대응하는 각을 알게 하였다. ◦두 도형이 닮음 도형임을 기호를 사용하여 나타낼 수 있게 하였다. ◦닮음비의 뜻을 알게 하였다. ◦평면도형에서의 닮음의 성질을 이해하게 하였다. ◦입체도형에서의 닮음의 성질을 이해하게 하였다.	6
	§2. 삼각형의 닮음 조건 (7쪽)	◦삼각형의 닮음 조건 ◦삼각형의 닮음의 활용	◦두 삼각형이 닮음이 되기 위한 조건을 알게 하였다. ◦닮음 조건을 활용하여 삼각형에 대한 여러 가지 문제를 해결할 수 있도록 하였다.	

중단원	소단원(쪽)	지도 내용	지도 요소	시간
1. 도형의 닮음	§3. 닮음의 위치 (3쪽)	◦ 닮음의 위치와 중심 ◦ 닮음 도형을 그리는 방법	◦ 닮음 도형에서 닮음의 위치와 닮음의 중심에 대하여 알 수 있게 하였다. ◦ 닮음의 중심을 이용하여 닮음 도형을 그리는 방법을 알게 하였다.	2
	학습 내용 확인 문제 (1쪽)	◦ 도형의 닮음 ◦ 닮음비 ◦ 삼각형의 닮음 조건 ◦ 닮음의 위치	◦ 닮음의 성질의 증명은 직관적인 방법으로 하는 것이 바람직하다.	
	연습 문제 (1쪽)	◦ 삼각형의 닮음 조건 ◦ 닮음 도형의 성질	◦ 닮음의 중심으로부터 두 닮음 도형 위의 대응하는 점까지의 거리의 일정한 비가 닮음비와 같다는 것을 직관적으로 알게 하였다.	1
2. 평행선과 선분의 비	§1. 삼각형과 평행선 (6쪽	◦ 삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비	◦ 삼각형의 한 변과 그 변에 평행한 직선과 선분의 길이의 비 사이의 관계를 이해할 수 있도록 하였다.	7
	§2. 평행선 사이의 선분의 길이의 비 (3쪽)	◦ 평행선 사이의 선분의 길이의 비	◦ 세개이상의 평행선이 다른 두 직선과 만날 때 이 두 직선이 평행선에 의하여 잘려 생긴 대응하는 선분의 길이의 비는 같음을 알게 하고 이를 응용할 수 있도록 하였다.	
	§3. 삼각형의 중점 연결 (4쪽)	◦ 삼각형의 중점 연결 정리 ◦ 중점 연결 정리의 활용	◦ 삼각형의 두 변의 중점을 연결하는 선분은 나머지 변의 길이의 반과 같음을 알 수 있게 하였다. ◦ 삼각형의 한 변의 중점을 지나서 다른 한 변에 평행한 직선은 나머지 한 변의 중점을 지난다는 것을 알게 하였다.	

중단원	소단원(쪽)	지 도 내 용	지 도 요 소	시간
2. 평행선과 선분의 비	§4. 삼각형의 무게중심 (4쪽)	∘ 삼각형의 중선과 무게중심의 뜻 ∘ 삼각형의 무게중심의 성질과 그 활용	∘ 삼각형의 중선의 뜻을 알게 하였다. ∘ 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만남을 알게 하였다. ∘ 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 꼭지점으로부터 각각 2 : 1 로 나눈다는 것을 알게 하였다.	3
	학습 내용 확인 문제 (1쪽)	∘ 삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비, 평행선 사이의 선분의 길이의 비 ∘ 삼각형의 중점 연결 정리 ∘ 삼각형의 무게 중심	∘ 삼각형의 한 변에 평행한 직선이 삼각형의 내부에 있을 때와 외부로 있을 때로 나누어, 그 어느 경우에도 선분의 길이의 비는 같음을 이해시키도록 한다.	
	연습 문제 (1쪽)	∘ 평행선 사이의 선분의 길이의 비 ∘ 삼각형의 중점 연결 정리의 활용 ∘ 삼각형의 무게중심의 성질	∘ 삼각형의 닮음의 성질, 삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비, 삼각형의 중점 연결 정리를 활용하여 삼각형의 무게중심에 대한 성질을 증명하도록 한다.	1
3. 닮음의 응용	§1. 닮음 도형의 넓이와 부피 (5쪽)	∘ 닮음 도형의 닮음비와 넓이의 비 사이의 관계 ∘ 닮음 도형의 닮음비와 부피의 비 사이의 관계	∘ 닮음 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같음을 이해하도록 하였다. ∘ 닮음 도형의 부피의 비는 닮음비의 세제곱과 같음을 이해하도록 하였다.	
	§2. 닮음의 응용 (2쪽)	∘ 축도를 이용한 거리의 측정	∘ 닮음 도형의 성질과 축도를 이용하여 거리, 높이 등을 간접적으로 측정하는 방법을 알도록 하였다.	

중단원	소단원(쪽)	지도 내용	지도요소	시간
	학습 내용 확인 문제	◦ 닮음 도형에서의 닮음비와 넓이 및 부피의 비, 축도		5
	연습 문제 (1쪽)	◦ 닮음 도형의 성질 ◦ 닮음 도형의 활용		1
	기본 문제 심화 문제 (2쪽)	◦ 닮음의 성질 ◦ 삼각형의 무게중심의 활용 ◦ 닮음 도형의 닮음비와 넓이의 비 사이의 관계 ◦ 닮음 도형의 활용	◦ 닮음 도형에서 닮음비와 넓이의 비, 부피의 비, 사이의 관계는 삼각형에서만 증명하고 이 성질이 일반적인 도형에서도 성립함을 유추할 수 있도록 지도한다.	2

표5. 소단원의 지도 목표(중학교3)

소 단 원	지 도 목 표
1. §1. 닮음 도형	◦ 닮음 도형의 뜻과 성질을 이해하고 닮음비를 활용할 수 있게 한다.
1. §2. 삼각형의 닮음 조건	◦ 삼각형의 닮음 조건을 이용하여 삼각형의 여러 가지 성질을 알 수 있게 한다.
1. §3. 닮음의 위치	◦ 닮음의 위치, 닮음의 중심을 알고 닮음 도형을 그릴 수 있게 한다.
2. §1. 삼각형과 평행선	◦ 삼각형의 한변과 평행한 직선의 관계를 이해할 수 있다.
2. §2. 평행선 사이의 선분의 길이의 비	◦ 삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비에 대한 여러 가지 성질을 알아보게 한다.
2. §3. 삼각형의 중점 연결 정리	◦ 삼각형의 중점 연결 정리를 이해하고 이를 활용하여 여러 가지 문제를 풀 수 있게 한다.
2. §4. 삼각형의 무게중심	◦ 삼각형의 무게중심을 알고 이의 성질을 이해하여 활용할 수 있도록 한다.

소 단 원	지 도 목 표
3. §1. 닮음 도형의 넓이와 부피	◦ 닮음 도형에서의 닮음비와 넓이의 비, 닮음비와 부피의 비 사이의 관계를 알도록 한다.
3. §2. 닮음의 응용	◦ 닮음 도형의 성질을 이용하여 거리, 높이 등을 간접적으로 측정하는 방법을 알게 한다.

표6. 소단원의 구성과 지도 내용(공통수학)

중단원	소단원(쪽)	지 도 내 용	지 도 요 소	시간
1. 직선의 방정식	§1. 평면좌표 (6쪽)	◦ 두 점 사이의 거리 ◦ 선분의 내분점과 외분점	◦ 두 점 사이의 거리의 뜻을 알고 거리를 구하기 ◦ 내분과 외분의 뜻을 알고 내분점과 외분점을 주는 공식을 유도하기	3
	§2. 직선의 방정식 (5쪽)	◦ 한 점과 기울기가 주어진 직선 ◦ 두 점을 지나는 직선 ◦ 두 직선의 평행과 수직 ◦ 점과 직선 사이의 거리	◦ 한점(x_1 , y_1)을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식 구하기 ◦ 두 점을 지나는 직선의 방정식 구하기 ◦ 두 직선이 평행, 수직일 조건을 알고 활용하기 ◦ 점과 직선 사이의 거리를 구하기	5
2. 원	§3. 원의 방정식 (9쪽)	◦ 원의 방정식 ◦ 원과 직선	◦ 중심(a, b)이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식 구하기 ◦ 원과 직선의 위치 관계를 알고 접선의 방정식 구하기	3

중단원	소단원(쪽)	지 도 내 용	지 도 요 소	시간
3.도형의 이동과 부등식의 영역	§4. 도형의 이동 (5쪽)	◦ 도형의 평행이동 ◦ 도형의 대칭 이동	◦ 평행이동에 의한 도형의 방정식 구하기 ◦ x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대칭 이동한 도형의 방정식 구하기	2
	§5. 부등식의 영역 (8쪽)	◦ 부등식이 나타내는 영역 ◦ 연립 부등식의 영역	◦ 부등식의 영역을 그래프로 나타내기 ◦ 연립 방정식을 이용하여 연립 부등식의 영역을 구하고 이를 활용하기	3
	연습 문제 (1쪽)	◦ 복습 및 정리	◦ 개념을 정리하고 문제를 파악하는 이해력	1
	기본 확인 문제 (1쪽)	◦ 기본 사항 확인	◦ 단원의 총정리	1
	종합 문제 (1쪽)	◦ 심화 학습 문제	◦ 문제 해결의 종합적 능력을 개발	1

표7. 소단원의 지도 목표(공통수학)

소 단 원	지 도 목 표
1.§1. 평면 좌표	◦ 두 점사이의 거리와 선분의 내분점, 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
1.§2. 직선의 방정식	◦ 주어진 조건을 만족시키는 직선의 방정식 구하기
2.§3. 원의 방정식	◦ 원의 방정식을 이해하고, 원의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
2.§4. 도형의 이동	◦ 도형의 평행이동과 간단한 대칭 이동을 이해하고, 이를 방정식으로 나타낼 수 있게 한다.
3.§5. 부등식의 영역	◦ 부등식의 영역을 이해하고, 부등식의 영역에 대하여 주어진 함수값의 최대, 최소 문제를 이해할 수 있게 한다.

표8. 소단원의 구성과 지도 목표(수학Ⅱ)

중단원	소단원(쪽)	지도 내용	지도 요소	시간
1. 일차변환	§1. 일차 변환 (6쪽)	◦ 변환과 일차변환 ◦ 간단한 일차변환	◦ 변환을 함수의 일종으로 이해하기 ◦ 일차변환의 뜻을 알고 변환식을 행렬로 나타내기, 변환의 행렬을 알기 ◦ 닮음 변환과 대칭 변환의 뜻을 알고 변환의 행렬을 알아보기	3
	§2. 일차 변환 의 성질 과 역 변환 (4쪽)	◦ 일차변환의 합성 ◦ 일차변환의 역변환	◦ 합성 변환의 뜻을 알고 일차변환을 합성하기 ◦ 일차변환의 역변환을 알고 변환 행렬의 역행렬의 존재성과의 관계를 알기	2
	§3. 일차 변환의 성질과 그 활용 (4쪽)	◦ 일차변환의 성질 ◦ 일차변환의 활용	◦ 일차변환의 기본 성질을 알고 활용하기 ◦ 일차변환을 여러모로 알기	2
	연습 문제 (1쪽)	◦ 복습 및 정리	◦ 개념을 정리하고 문제를 파악하는 이해력	1
	기본 확인 문제	◦ 기본 사항 확인	◦ 단원의 총정리	1
	종합 문제	◦ 심화 학습 문제	◦ 문제 해결의 종합적 능력을 개발	1
2. 이차곡선	§1.포물선 (5쪽)	◦ 포물선의 방정식 ◦ 포물선과 직선	◦ 축이 x축인 포물선의 방정식의 표준형 구하기 ◦ 축이 y축인 포물선의 방정식의 표준형 구하기 ◦ 포물선과 직선의 위치 관계 알아보기	3

중단원	소단원(쪽)	지도 내용	지도 요소	시간
2. 이차곡선	§2. 타 원 (9쪽)	◦ 타원의 방정식 ◦ 타원과 직선	◦ 타원의 정의를 알고 그래프 그리기 ◦ 중심을 원점에 두고 장축을 x축으로 하는 타원의 방정식을 유도하기 ◦ 타원의 표준형을 평행 이동하여 보기	4
	§3.쌍곡선 (9쪽)	◦ 쌍곡선의 방정식 ◦ 쌍곡선과 직선	◦ 쌍곡선의 정의를 알고 그래프 그리기 ◦ 중심을 원점에 두고 주축을 x축으로 하는 쌍곡선의 방정식을 유도하기 ◦ 기울기가 주어진 경우와 임의의 점에서 그은 접선의 방정식을 구하기 ◦ 쌍곡선으로 나누어지는 영역을 알아보기	4
	연습 문제 (1쪽)	◦ 복습 및 정리	◦ 개념을 정리하고 문제를 파악하는 이해력	1
	기본 확인 문제	◦ 기본 사항 확인	◦ 단원의 총정리	1
	종합 문제	◦ 심화 학습 문제	◦ 문제 해결의 종합적 능력을 개발	1
3. 공간도형	§1.직선과 평면의 위치 관계 (4쪽)	◦ 직선과 평면의 위치 관계 ◦ 평면과 평면의 위치 관계 ◦ 직선과 직선의 위치 관계	◦ 공간에서 평면이 어떻게 되는가를 알고, 그 결정 조건을 이끌어 내기 ◦ 공간에서 직선과 평면의 위치 관계를 알아보기 ◦ 공간에서 두 평면의 놓이게 되는 위치 관계 알아보기 ◦ 공간에서 두 직선의 위치 관계 알아보기	2

중단원	소단원(쪽)	지도 내용	지도요소	시간
3. 공간도형	§2.평행과 수직 (6쪽)	◦ 직선과 평면의 평행 ◦ 직선과 평면의 수직	◦ 공간에서 직선과 평면에 관한 평행의 정의를 알고 증명하기 ◦ 공간에서 직선과 평면에 관한 수직의 정의를 알고 증명하기 ◦ 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각을 알고 활용하기 ◦ 삼수선의 정리를 알고 그 증명을 이해하고 활용하기	3
	§3.이면각과 정사영 (4쪽)	◦ 이면각 ◦ 정사영 ◦ 간단한 도형의 정사영	◦ 이면각의 정의를 알고 크기를 구할 수 있고 그것을 활용하기 ◦ 정사영의 정의를 알고 투영면과의 관계를 알아보기 ◦ 선분의 정사영의 길이를 구하기 ◦ 삼각형의 정사영의 크기를 구하기	2
4. 공간좌표	§1.점의 좌표 (4쪽)	◦ 공간에서의 점의 좌표 ◦ 선분의 내분과 외분	◦ 공간 좌표의 도입을 이해하고, 그 과정과 공간에서의 점의 좌표를 알고 나타낼 수 있기 ◦ 공간에서 선분의 내분점, 외분점의 좌표를 구하고 활용하기 ◦ 삼각형의 무게중심의 좌표를 구하기	2
	§2.구의 방정식 (3쪽)	◦ 두 점 사이의 거리 ◦ 구의 방정식	◦ 공간에서 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 만들기 ◦ 공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있고 공식을	

중단원	소단원(쪽)	지도 내용	지도요소	시간
	§2.구의 방정식 (3쪽)	◦두 점 사이의 거리 ◦구의 방정식	활용하기 ◦구의 방정식을 이해하고 조건에 맞는 구의 방정식을 구할 수 있기	1
	연습 문제 (1쪽)	◦복습 및 정리	◦개념을 정리하고 문제를 파악하는 이해력	1
	기본 확인 문제(1쪽)	◦기본 사항 확인	◦단원의 총정리	1
	종합 문제 (1쪽)	◦심화 학습 문제	◦문제 해결의 종합적 능력을 개발	1

표9. 소단원의 지도 목표 (수학Ⅱ)

소 단 원	지 도 목 표
1.§1. 일차변환	◦일차변환의 의미를 이해하고, 간단한 대칭변환, 닮음변환, 회전변환을 활용할 수 있게 하였다.
1.§2. 일차변환의 합성과 역변환	◦일차변환의 합성이 행렬의 곱에, 일차변환의 역변환이 역행렬에 대응함을 이해하고, 일차변환과 행렬과의 대응 관계를 정확히 파악할 수 있게 한다.
1.§3. 일차변환의 성질과 그 활용	◦일차변환의 선형성을 이해하고, 평면도형이 일차변환에 의하여 어떤 도형으로 이동하는지를 조사할 수 있게 한다.
2.§1. 포물선	◦포물선의 정의를 알아보고, 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
2.§2. 타 원	◦타원의 정의를 이해하고, 타원과 직선의 위치 관계를 이해하고, 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
2.§3. 쌍곡선	◦쌍곡선의 정의를 이해하고 점근선의 의미를 이해하며 쌍곡선과 직선의 위치 관계와 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

소 단 원	지 도 목 표
3. §1. 직선과 평면의 위치 관계	◦ 공간에서의 직선, 평면의 위치 관계등 공간 도형에 관한 기본 성질을 이해하고, 공간적 직관력을 체득할 수 있게 한다.
3. §2. 평행과 수직	◦ 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
3. §3. 이면각과 정사영	◦ 이면각의 의미와 정사영의 정의를 이해하고, 그 성질을 활용할 수 있게 한다.
4. §1. 점의 좌표	◦ 공간의 좌표를 정의하고, 내분점 · 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
4. §2. 구의 방정식	◦ 원의 방정식에 대응하여 구의 방정식을 구하고 이를 활용할 수 있게 한다.

Ⅳ. 새 지도목표 설정과 단원의 재구성

앞에서 도형의 변환을 조사하였고, 또 교육과정과 교과서 내용을 분석하였다. 여기에서는, 이상의 결과를 종합하여 볼 때, 「도형의 변환」에 대한 바람직한 지도목표를 새로 설정하고, 그에 따라서 변환의 개념이 초·중등교육의 각급 학교 사이의 상호 관계가 분명하지 못한 부분이 있는 것으로 조사되어 이 단원을 재조직하고자 한다. 그리하여 구조화된 지도내용의 재배열과 함께 그 지도요소를 선정해 본다.

1. 「도형의 변환」에 대한 일반 지도목표 설정

1) 일반 지도목표

수학과의 일반목표와 본 단원 교재의 성격을 생각하여, 다음 3항목의 일반 지도목표를 설정한다.

(1) 여러 가지 변환들의 뜻을 알고, 주어진 변환에 의하여, 점이나 도형을 옮겨놓을 수 있게 한다.

(2) 어떤 변환에 의하여 한 도형이 다른 도형으로 옮겨졌을 때, 이들 두 도형에 공통되는 성질과 달라지는 성질을 찾아내어 논증을 통하여 확인하고, 이 성질을 이용하여 여러 가지 변환들 사이의 관계를 알게 하므로써 수학의 체계를 이해시킨다.

(3) 변환에 대한 지식과 기능을 활용하여, 평면 위에 합동 또는 닮은 두 도형이 주어있을 때, 구체적으로 어떤 변환에 의하여 한쪽을 다른 쪽으로 옮길 수 있는가를 알아내도록 한다.

2) 지도상의 유의사항

(1) 평면 위의 도형의 변환은 평면의 모든 점이 옮겨지는데 따라서 그 부분집합인 도형도 옮겨진다는 것에 유의하여야 한다.

(2) 평면 X에서의 변환 f는 X에서 X에로의 1-1대응으로서 양연속인 함수이므로, 도형의 이어진 부분은 이어지고, 또 끊어진 부분은 끊어지도록 옮겨진다는 것에 유의하여야 한다.

3) 「도형의 변환」의 새로운 단원구성과 지도내용의 배열

위에서 설정한 일반 지도목표에 따라서 도형의 변환을 효율적으로 지도하려면 다음과 같은 단원구성과 지도내용의 배열이 필요하다.

표10. 새로운 소단원 구성과 배열 및 지도요소 선정

중단원	소단원	지 도 내 용	지 도 요 소
	준비학습		① 두 집합의 원소의 대응에서 함수, 1-1대응 찾기 ② 이동에 의한 한 점의 변환(조작) ③ 선(점)대칭 도형 찾기 ④ 닮음의 위치에 있게 하는 작도(조각)
1. 변환과 이동	§1.변환의 뜻	(1) 1-1대응	①두 유한집합 ②두 무한집합 ③두 선분상의 점
		(2) 양연속적으로 옮겨짐	① 가까운 점을 가까운 점으로, 떨어져 있는 점을 떨어진 점으로 옮김 ② 도형이 그려진 고무줄의 신축
		(3) 평행 · 회전(점대칭) · 선대칭 이동의 정의와 점의 변화	① 일정한 방향으로 일정한 길이만큼 옮김 ② 회전의 중심 ③ 회전각의 크기 ④ 회전의 방향 ⑤ 점대칭 이동의 중심 ⑥축 ⑦ 한 점의 변환, 두 점의 변환, 세 점의 변환(조작) ⑧ 세 가지 이동이 모두 변환이 됨을 조사.
	§2.이동의 기본성질	(1) 평행이동의 기본성질	① 두 점을 변환하면 이동전후의 네 점은 평행사변형을 이룸 ② 두 점사이의 거리가 불변임 ③ 선분의 길이가 같은 평행인 선분으로 옮겨짐 ④ 방향이 불변 ⑤ 부동점 없음
		(2) 회전이동의 기본성질	① 한 점을 변환하면 이동 전후의 두 점과 회전의 중심은 꼭지각의 크기가 일정한 이등변삼각형을 이룸 ② 두 점사이의 거리가 불변임

중단원	소단원	지 도 내 용	지 도 요 소
1. 변환과 이동	§2.이동의 기본성질	(2) 회전이동의 기본성질	③ 선분은 길이가 같고 방향이 회전각의 크기만큼 변한 선분으로 옮겨짐 ④ 회전의 중심이 부동점 ⑤ 한 점을 점대칭 이동하면 대응되는 점은 그 중심과 함께 일직선 위에 있음
		(3) 선대칭이동의 기본성질	① 한 점을 변환하면 이동 전후의 두 점과 축상의 임의의 한 점은 이등변삼각형을 이룸 ② 두 점사이의 거리가 불변임 ③ 선분은 길이가 같은 선분으로 옮겨짐 ④ 축상의 모든 점이 부동점 ⑤ 삼각형의 방향이 반대되는 삼각형으로 옮겨짐
		(4) 세 가지 이동의 성질	① 두 점사이가 불변임 ② 선분은 길이가 같은 선분으로, 또 직선은 직선으로 옮겨짐 ③ 각의 크기가 불변임 ④ 평행선은 평행선으로 옮겨짐 ⑤ 한 도형은 합동인 도형으로 옮겨짐 ⑥ 이동(운동)
	연 습 문 제		
2. 합동변환	§1. 두 이동의 결합과 이동의 분해	(1) 평행이동의 결합	① 방향이 같은 경우 ② 방향이 반대인 경우 ③ 일반의 경우
		(2) 회전이동의 결합	① 회전의 중심이 같은 경우
		(3) 대칭이동의 결합	① 두 축이 평행인 경우 ② 두 축이 일치한 경우 ③ 두 축이 만날 경우

중단원	소단원	지 도 내 용	지 도 요 소
		(4) 평행이동과 회전이동의 분해	① 평행이동은 두 축이 평행인 두 선대칭 이동의 결합 ② 회전이동은 두 축이 만날 때의 두 선대칭 이동의 결합
2. 합동변환	§1. 두 이동의 결합과 이동의 분해	(5) 그 밖의 두 이동의 결합	① 평행이동과 회전이동의 결합 ② 중심이 다른 두 회전이동의 결합 ③ 평행이동과 선대칭이동의 결합 ④ 회전이동과 선대칭이동의 결합
	§2. 합동변환(등장변환)	(1) 합동변환의 뜻	① 두 점사이의 거리를 불변케 하는 변환 ② 합동변환의 구성원
		(2) 합동변환의 성질	① 세 가지 이동의 공통성질과 동일함을 확인
		(3) 두 합동도형사이의 변환 방법 구하기	① 한 평행이동, 한 회전이동, 또는 평행이동과 선대칭이동의 결합으로 변환됨
	연 습 문 제		
3. 닮음변환	§1. 닮음의 위치에 있게 하는 변환	(1) 닮음의 위치에 있는 두 도형의 성질	① 두 점사이의 거리가 닮음비만큼 확대·축소 되게 변환됨 ② 선분은 평행인 선분으로 옮겨지고, 그 길이의 비가 일정함 ③ 각의 크기가 불변임 ④ 평행선은 평행선으로 옮겨짐 ⑤ 도형은 닮음도형으로 옮겨짐 ⑥ 닮음비의 중심이 부동점
		(2) 닮음의 위치에 있게 하는 변환의 뜻	① 닮음의 중심 ② 닮음비 ③ 닮음의 위치 ④ 한 점의 변환, 두 점의 변환, 세 점의 변환(조작)

중단원	소단원	지도내용	지 도 요 소
3. 닮음변환	§2. 닮음변환	(1) 닮음의 위치에 있게 하는 변환과 이동과의 결합	① 평행이동과의 결합 ② 회전이동과의 결합 ③ 선대칭이동과의 결합
		(2) 닮음변환의 뜻	① 두 점사이의 거리가 일정한 비(닮음비)로 확대·축소되게 옮겨지는 변환
		(3) 닮음변환의 성질	① 선분은 선분으로 옮겨지고, 그 길이의 비가 일정함 ② 각의 크기가 불변임 ③ 평행선은 평행선으로 옮겨짐 ④ 도형은 닮음도형으로 옮겨짐
		(4) 두 닮음도형사이의 변환 방법 구하기	① 크기가 다른 두 닮은 삼각형은 닮음의 위치에 있게 하는 변환과 한 이동(회전 또는 선대칭 이동)의 결합으로 변환됨
	연 습 문 제		
4. 좌표평면에서의 변환	§1. 합동변환	(1) 관계식에 의한 변환	① $x'=x+3$, $y'=y-3$ ② $x'=-y$, $y'=x$ ③ $x'=-x$, $y'=-y$ ④ $x'=y$, $y'=x$ (한 점, 두 점, 삼각형의 변환)
		(2) 변환의 관계식 구하기	① 평행이동 ② 원점은 중심, 양·음의 방향으로 $90°$의 회전 ③ 원점을 중심으로 하는 점대칭이동 ④ 선대칭이동(축 : x축, y축, 직선 $y=x$)
		(3) 두 이동의 결합	① $x'=y$, $y'=-x$ 와 $x''=x-1$, $y''=-y'+1$ 의 결합

중단원	소단원	지도내용	지 도 요 소
4. 좌표평면에서의 변환	§1. 합동변환	(3) 두 이동의 결합	② $x'=x$, $y'=-y$와 $x''=-x$, $y''=y'$ 의 결합 (한 점, 두 점, 삼각형의 변환)
	§2. 닮음변환	(1) 관계식에 의한 변환(조작)	$x'=kx$, $y'=ky$ ① $k=2$ ② $k=\frac{1}{2}$ ③ $k=-2$ ④ $k=-\frac{1}{2}$ (한 점, 두 점, 삼각형의 변환)
		(2) 변환의 관계식 구하기	① 원점 중심, 닮음비2, $\frac{1}{2}$인 닮음의 위치에 있게 하는 변환 ② $A(2,1)$, $B(4,4)$ $A'(-1,-\frac{1}{2})$ $B'(-2,-2)$, $\overline{AB}$ → $\overline{A'B'}$ 로 닮음 변환하는 관계식
		(3) 두 변환의 결합	① $x'=2x$, $y'=2y$ 와 $x''=x'-3$, $y''=y'+2$의 결합 ② $x'=\frac{2}{5}x$, $y'=\frac{2}{5}y$와 $x''=-x'$, $y''=-y'$, 의 결합 (한 점, 두 점, 삼각형의 변환)
	연습문제, 종합문제A, B, 확인학습문제		

2. 「도형의 변환」의 지도목표와 세목적 지도목표의 설정

앞에서와 같은 일반 지도목표 설정과 단원구성, 지도내용의 배열에 따라서, 소단원별 지도목표와 세목적 지도목표를 다음과 같이 정한다.

1) 1의 § 1. 변환의 뜻

변환의 뜻을 알고, 평행이동, 회전이동(점대칭이동)과 선대칭이동이 변환이 되는 것을 알아본다.

(i) 평면의 각 점을 그 평면의 한 점으로 1-1로 대응되도록 옮기는 것이 변환이며, 가까운 점을 가까운 점으로, 떨어져 있는 점을 떨어져 있는 점으로 옮기는 것임을 알게 한다.

(ii) 평행이동, 회전이동, 점대칭이동, 선대칭이동의 뜻을 알고, 이들은 변환이 됨을 알아보게 한다.

2) 1의 § 2. 이동의 기본성질

각 이동에 특유한 기본성질과 그 차이점을 알고, 세 가지 이동은 모두 두 점 사이의 거리를 불변케하는 변환임을 논증을 통하여 알아보게 하며, 이들을 통틀어 이동이라고 부름을 알게 한다.

(i) 평행이동은 한 선분을 길이가 같고 평행인 선분으로 옮기는 변환임을 논증을 통하여 알아보게 한다.

(ii) 회전이동은 한 선분을 길이가 같고 방향이 회전각의 크기만큼 변한 선분으로 옮기는 변환임을 논증을 통하여 알아보게 한다.

(iii) 점대칭이동은 $180°$의 회전이동임을 알고, 그 기본성질 중에서 회전이동의 기본 성질과 다른 점을 알아보게 한다.

(iv) 선대칭이동은 한 선분을 길이가 같고 방향이 일정하지 않는 선분으로 옮기는 변환임을 알게 한다.

3) 2의 § 1. 두 이동의 결합과 분리

두 이동을 되풀이 한 변환도 두 점 사이의 거리를 불변케 함을 알게 하고, 두 이동을 결합한 변환이 어떤 이동과 같아질 수 있는가를 알아보게 한다.

(ⅰ) 두 평행이동의 결합은 한 평행이동과 같음을 알게 한다.

(ⅱ) 중심이 같은 두 회전이동의 결합은 한 회전이동과 같음을 알게 한다.

(ⅲ) 축이 서로 평행인 두 선대칭이동의 결합은 한 평행이동과 같고, 축이 점 O에서 만나는 두 선대칭이동의 결합은 점 O을 중심으로 한 회전이동과 같음을 알아보게 하여 이 역을 활용할 수 있게 한다.

(ⅳ) 평행이동과 회전이동은 각각 두 대칭이동의 결합으로 표시됨을 알고, 이것을 활용할 수 있게 한다.

(ⅴ) 두 이동의 결합이 한 이동과 같아질 수 있는가를 알아보게 하고, 평행이동과 선대칭이동의 결합은 한 이동과 같을 수 없음을 알아보게 한다.

4) 2의 § 2. 합동변환

합동변환의 뜻을 알고, 합동변환이 되는 변환의 종류와 합동변환의 성질을 알게하며, 이것을 활용하여 주어진 두 합동도형 사이의 변환방법을 찾아낼 수 있게 한다.

(ⅰ) 합동변환은 두 점 사이의 거리를 불변케하는 변환으로써 정의됨을 알게 하고, 세 가지 이동과 이동의 결합은 모두 합동변환이 됨을 알아보게 한다.

(ⅱ) 합동변환의 성질은 세 가지 이동의 공통되는 성질과 같음을 알아보게 한다.

(ⅲ) 두 합동도형이 어떤 위치에 주어져 있을 때, 합동변환에 의하여 그 한쪽을 나머지 쪽으로 옮기려면 어떤 이동들을 써야 하는지를 찾아내게 한다.

5) 3의 §1. 닮음의 위치에 있게 하는 변환

닮음의 위치에 있는 두 도형은 닮음 꼴이 됨은 이미 학습하였으므로, 이 경우에 한 쪽 도형을 나머지 도형으로 옮기는 변환으로 볼 수 있게 하고, 그 성질을 알게 한다.

(i) 닮음의 중심을 지나는 직선과 닮음의 위치에 있는 두 도형과의 교점이 대칭점이 되며 닮음의 중심에서 대응점까지의 거리의 비가 닮음비와 같다는 것과, 이 대응에서 선분은 평행인 선분으로 옮겨지고 그 길이의 비가 닮음비와 같음을 알게 한다.

(ii) 닮음의 중심이 O이고 닮음비가 K일 때 닮음의 위치에 있게 하는 변환에 의하여 한점 P는 사선 $\overrightarrow{OP}$ 위의 한 점 P'으로서 $m(\overline{OP'})$: $m(\overline{OP})$ = K : 1인 점 P'로 옮겨짐을 알아보게 한다.

6) 3의 §2. 닮음변환

닮음변환의 뜻을 알고, 닮음변환이 되는 변환의 종류와 닮음변환의 성질을 알게 하며, 이것을 활용하여 주어진 두 닮음도형 사이의 변환방법을 찾아낼 수 있게 한다.

(i) 닮음의 위치에 있게 하는 변환과 한 이동과의 결합에 의하여 두 점 사이의 거리가 일정한 비로 확대·축소되어 옮겨지며, 한 선분의 길이가 일정한 비로 확대·축소되는 선분으로 옮겨짐을 논증을 통하여 알아보게 한다.

(ii) 닮음변환은 두 점 사이의 거리를 일정한 비로 확대 또는 축소하여 옮기는 변환으로 정의됨을 알게 하고, 닮음의 위치에 있게 하는 변환과 합동변환 및 이들의 결합은 모두 합동변환이 됨을 알게 한다.

(iii) 닮음변환은 두 점 사이의 거리를 일정한 비로 확대·축소하여 옮기는 것 이외에는 합동변환과 같은 성질 가짐을 알게 한다.

(ⅳ) 두 닮음도형이 어떤 위치에 주어져 있을 때, 닮음변환에 의하여 그 한 쪽을 나머지 쪽으로 옮기려면, 닮음의 위치에 있게 하는 변환과 세 가지 이동 중 어느 것들을 써야 하는지를 찾아내게 한다.

7) 4의 § 1. 합동변환

좌표평면에서 한 평행이동이나, 원점을 중심으로 하는 간단한 회전이동 또는 원점을 지나는 축에 관한 선대칭이동을 좌표를 써서 알아보고, 두 이동의 결합을 점으로 나타낼 수 있게 한다.

(ⅰ) 이동후의 점의 각좌표 x', y'이 이동전의 점의 좌표 x, y에 관한 일차식으로 주어져 있을 때, 이 관계식에 의하여 점이나 도형을 옮겨보고, 그것이 무슨 이동인가를 알아보게 한다.

(ⅱ) 한 평행이동이나, 원점을 중심으로 하는 간단한 회전이동 또는 원점을 지나는 직선(x축, y축, 직선 $y=\pm x$)을 축으로 하는 선대칭이동에 대하여 몇 개의 점의 이동을 찾아보고, 그 변환의 관계식을 구할 수 있게 한다.

(ⅲ) 두 이동의 관계식에 대하여, 그들의 경합에 의한 점의 변환을 계산을 통하여 좌표평면에서 나타낼 수 있게 한다.

8) 4의 § 2. 닮음변환

좌표평면에서 닮음의 위치에 있게 하는 닮음(닮음의 중심이 원점)을 좌표를 써서 알아보고, 이 변환과 이동의 결합을 점으로 나타낼 수 있게 한다.

(ⅰ) 변환후의 점의 각좌표 x', y'이 각각 변환전의 점의 좌표 x, y에 비례하는 관계식(단, 두 비례상수는 같음)으로 주어져 있을 때, 이것에 의하여 점이나 도형을 옮겨보고 무슨 변환인지를 알아보게 한다.

(ii) 한 점을 중심으로 하여 닮음비가 K($K= \pm 2$, $K=\frac{1}{2}$ 등)로서 닮음의 위치에 있게 하는 한 변환에 대하여, 몇 개의 점의 변환을 찾아보고, 그 변환의 관계식을 구할 수 있게 한다.

(iii) 닮음의 위치에 있게 하는 한 변환과 한 이동의 관계식에 대하여, 그들의 결합에 의한 점의 변환을 계산을 통하여 좌표평면에서 나타낼 수 있게 한다.

V. 변환에 관한 설문지 조사

1. 설문지 조사

고등학교 공통수학 단원Ⅳ. 도형의 방정식에서 도형의 이동에 대한, 지도학습 내용의 이해도를 알아보기 위하여 제주도내 중·고등학교 교사 60명과 남·여 고등학교 8개교 1, 2학년 학생 600명을 대상으로 설문지 조사를 실시하여 교사 42명, 학생442명의 설문지를 회수하였다. 설문지의 내용은 교사와 학생에게 공통된 것 7문제, 서로 다른 것 3문제 합계 10문제씩 사지선다형으로 작성하였다. 그리고, 설문지의 통계처리는 교사와 학생별로 각 문제마다 정답자 수의 백분율을 산출하여 그 이해도를 표시하였다.

1) 설문지 내용 작성 방침

(1) 지도·학습목표를 이해하고 있는가 ? (문제1)

(2) 교과서에서 설명이 불충분하고, 또 이해가 부족하다고 생각되는 개념에 대한 이해도를 알아본다. (문제2, 3 교사문제11)

(3) 개념들의 관계를 이해하고 있는가 ? (문제 4, 5 교사문제12)

(4) 어떤 개념들의 속성들을 구별해서 이해하고 있는가 ? (문제6, 7 교사문제 13)

(5) 선수학습의 내용을 구별하고 있는가 ? (학생문제8, 9, 10)

2) 설문내용의 결과

설문지의 구성내용과 교사와 학생별 이해도(정답과 백분율)는 표 11과 같다.

표11. 설문내용과 이해도

문제 번호	설 문 내 용	이해도(%)	
		교사	학생
1	도형의 평행이동에 대한 지도·학습 목적을 안다.	100	32.99
2	도형의 대칭이동에 대한 교과서의 정의를 안다.	100	54.95
3	선대칭도형의 정의를 안다.	100	57.57
4	점대칭이동이 회전이동의 특수 경우임을 안다.	57.14	20.55
5	합동변환의 정의를 안다.	51.16	23.67
6	뒤집어서 옮기는 합동변환의 이름을 안다.	19.09	20.08
7	합동변환의 성질중 가장 기본이 되는 것을 안다.	47.62	40.43
8	합동변환의 의미를 안다.		31.42
9	함수가 되는 대응을 안다.		48.42
10	일대일 대응한 함수의 그래프를 안다.		29.91
11	도형의 변환의 정확한 정의를 안다.	33.33	
12	닮음변환의 정의를 안다.	38.09	
13	닮음변환의 성질중 가장 기본이 되는 것을 안다.	66.66	

2. 설문지 조사 결과의 분석

1) 조사결과의 개황

앞의 표11에서 교사와 학생의 이해도를 조사하여 보면 대체로 상관이 높은 것으로 나타나고 있으며, 양자의 이해도는 모두 좋지 않은 편이다.

이 조사에서 특히 이해도가 낮은 것은 뒤집어서 옮겨지는 합동변환의 이름을 묻는 문제6, 도형의 변환의 정확한 정의를 묻는 교사문제11, 닮음변환의 정의를 묻는 교사문제12, 합동변환의 정의를 묻는 문제5 이다. 그 다음에 저조한 것은 일대일 대응한 함수의 그래프를 묻는 문제10과 합동변환의 의미를 묻는 문제8 이다. 이 밖에도 학생의 이해도가 낮은 것으로는, 점대칭이동이 회전이동의 특수한 경우임을 묻는 문제4, 도형의 평행이동에 대한 학습 목적을 묻는 문제1 등 이다.

2) 조사결과의 분석

표12. 계열에 따른 이해도 차이검정

계열 / 문항	일반계		실업계		t값	P값
	평 균	표준편차	평 균	표준편차		
평행 이동	0.3907	.4890	0.2691	.4445	.2726	**.007
대칭 이동	0.6605	.4747	0.4350	.4969	4.853	***.001
선대칭 이동	0.7163	.4519	0.4350	.4969	6.192	***.001
점대칭 이동	0.2047	.4044	0.2063	.4055	-.042	.966
합동 변환	0.1953	.3974	0.2780	.4490	-2.038	**.042
뒤집어서 옮기는 합동변환	0.1953	.3974	0.2063	.4055	-.285	.776
합동변환의 성질	0.4140	.4937	0.3946	.4899	.411	.681
합동변환의 의미	0.3907	.4890	0.2377	.4266	3.493	***.001
함 수	0.6186	.4869	0.3498	.4780	5.831	***.000
일대일 대응	0.4233	.4952	0.1749	.3807	5.897	***.000
전 체	0.4209	.4580	0.2987	.4474		

*$P<0.1$ **$P<0.05$ ***$P<0.01$ (순서대로 90%, 95%, 99% 유의수준)

P는 소수점 넷째자리에서 반올림 함

<참고>

※ t값 $= \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}^2 + \left\{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}^2}}$

계열에 따른 이해도는 전체적으로 보아서 매우 유의하고, 점대칭이동, 뒤집어서 옮기는 합동변환, 합동변환의 성질에 대해서는 유의하지 않으며, 이것은 모든 문항에 대해 실업계보다는 일반계가 더 이해도가 높다는 것을 보여준다. 문제에 대한 이해도가 낮은 이유는 주로「도형의 변환」에 대한 교과서의 내용 때문이라고 생각된다. 더욱이, 현행교과서 바로 앞에 나온 「중학수학」교과서는 이 단원에서 특히 많은 목표의식이 결여된 서술을 하고 있었다.

도형의 변환에 관한 교사의 이해가 부족한 것도 이 단원의 지도를 바르게 하지 못하는 이유중의 하나이다. 또한 참고 도서의 부족은 지도교사 들에게 이 분야에 대한 자기연수의 기회마저 어렵게 하고 있다.

Ⅵ. 결 론

학교 교육 8년차인 중학교 2학년 수학에서는, 단원Ⅶ. 도형의 성질에서 합동 및 여러 가지 사각형의 성질과 처음으로 명제가 도입되면서 증명의 뜻과 그 방법을 학습하게 되고, 단원Ⅷ. 도형의 닮음에서는 직관을 통하여 배워 온 많은 성질들을 다시 논증을 통해 체계적으로 밝혀나간다. 중학교 3학년 단원Ⅵ. 피타고라스의 정리에서 평면도형 및 입체도형이 활용되고, 고등학교 1학년 공통수학 단원Ⅳ. 도형의 방정식에 와서 평행이동과 대칭이동을 간단히 전개하고 된다.

한 평행이동에 의하여 선분의 길이가 같고 평행인 선분으로 옮겨진다는 명제는 종전과 같은 관찰에서도 예상할 수 있다. 그러나, 평행사변형의 성질로부터 이들 선분의 두 끝점 사이의 거리가 같은 것을 쉽게 확인 할 수 있으며, 또 선분상의 임의의 한 점의 행방을 조사함으로써 이 명제는 간단히 증명될 수 있

다. 더욱이 평면에서의 한 변환에 의하여 도형만 옮겨지는 것이 아니고, 모든 점이 일정한 규칙에 따라서 옮겨지는 가운데 도형도 변환됨을 깊이 인식해야 한다. 그리고, 합동변환나 닮음변환의 구체적인 성질들을 전혀 취급하지 않고, 다만 도형을 합동인 도형으로 옮기는 변환 혹은 두 도형에서 한쪽이 다른 쪽을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 것과 합동일 때 두 도형은 닮음변환이라고 결론 지우고 만 것은 너무나 직관에 의존하고 있다. 그러므로, 「도형의 변환」의 지도 방법을 개선하려면 지도내용의 전개에서 다음과 같은 조치가 있어야 한다.

1. 상위개념인 변환과 하위개념인 각 이동 및 닮음의 위치에 있게 하는 변환의 뜻을 명확히 해야 한다. 특히, 닮음의 위치에 있게 하는 변환에 의하여 임의의 한 점이 어떤 규칙에 의하여 옮겨지는가를 밝혀야 한다.
2. 중위개념인 합동변환이나 닮음변환은 결론적인 속성인 합동이나 닮음이라는 용어를 써서 정의 되서는 안된다.
3. 각 변환의 성질들은 가장 기본이 되는 것부터 차례로 체계적, 논리적으로 지도되어야 한다.

4. 합동변환과 닮음변환의 최후 지도 단계는, 두 도형이 주어 있을 경우에 그 한 쪽을 다른 쪽으로 옮기려면 구체적으로 어떤 변환으로 가능한가를 찾는 것이 되어야 한다. 이 단계에서 비로소 이들 두 가지 변환의 구조가 완전히 밝혀지기 때문이다.
5. 좌표평면에서의 변환의 고찰은 함께 취급되는 것이 좋다. 여기에서 학습한 결과는 함수와 그래프의 지도·학습에서 활용될 수 있도록 체계화되어야 한다.

참 고 문 헌

[1]. 교육부(1992), 국민학교 교육과정

[2]. 교육부(1993), 국민학교 교육과정 해설(Ⅰ)

- 총론, 국어, 수학 -

[3]. 교육부(1994), 중학교 수학과 교육과정해설

[4]. 교육부(1992), 고등학교 교육과정(Ⅰ)

[5]. 기우항(1997), 기하학의 흐름, 대한수학회

[6]. 김연식 · 김홍기(1996), 중학교 수학1, 2, 3 교사용지도서, 동아출판사

[7]. 김평국(1989), 기하학적 변환과 2×2행렬, 충북대학교 교육대학원

[8]. 교학사(1994), 중학교 수학과 교육과정해설

[9]. 박두일 · 신동선(1991), 고등학교 일반수학 교사용지도서, 교학사

[10]. 박두일 · 신동선(1991), 고등학교 수학Ⅱ(상) 교사용지도서, 교학사

[11]. 신동선 외(1986), 수학Ⅱ-1 교사지침서, 어문각

[12]. 양승갑 외(1995), 고등학교 공통수학, 금성교과서(주)

[13]. 임재규 · 기우항 · 정장춘 · 김해룡(1980), 수학교육의 현황 분석과 개선 방안(Ⅰ)

- 도형의 변환의 지도내용 분석 -

[14]. 최종렬(1992), 중등교육과정에서의 도형의 변환에 대한 연구

석사학위논문, 경성대학교

[15]. 현종익(1997), 현대수학 기초론, 경문사

<Abstract>

The Analysis and Improvements of Teaching Method on Figures in High school Curriculum.*

Park, Jong-Kuk

Mathematic Education Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by Professor Song, Seok-Zun

Some concepts of modern mathematics give rise to the new contents of school mathematics in accordance with the modernization movement of mathematics education. The transformation of the figures is one of new contents. The object of this research is to find out the effective teaching methods for the transformations of figures, the structures of various transformations, analyzing the curriculum and mathematics textbooks, reorganizing the order of contents by logical arguments, and pointing out difficult aspects of contents which can be found in the mathematics education of some high schools in Cheju province.

---

* A thesis submitted to the committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1998.

< 부 록 I >

도형의 변환에 대한 지도 내용 분석 및 개선 방안 설문지

안녕하십니까 ?

바쁘신 가운데 어려운 부탁을 드려 죄송합니다.

여러분께서 응답해주실 본 설문지는 도형의 변환에 대한 보다 바람직하고 효과적인 학습 방법 모색을 위한 순수한 학술조사입니다.

바쁘시드라도 잠깐 시간을 내서서 응답해 주시면 본 연구에 큰 도움이 되겠습니다.

그리고 응답해주신 내용은 완전히 익명으로 처리되어 조사 결과가 개별적으로 공개되는 일은 없고 연구 목적을 위해서만 활용될 것입니다.

적극적인 협조를 부탁드립니다.

제주대학교 교육대학원

수학교육전공

박 종 국

◉ 교 사 (   )   학 생 (   )

◉ 요 령

① 교사는 1번부터 7번까지, 11번부터 13번까지

② 학생은 1번부터 10번까지

1. 도형의 평행이동에 대한 설명중 잘못된 것은 ?

① 도형 $f(x, y)=0$ 을 x축의 방향으로 a, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$이다.

② 좌표축을 평행이동하여 원점을 점 (a, b)로 이동한다는 것은 도형을 x축의 방향으로 $-a$, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것이다.

③ 좌표축을 평행이동하여 원점을 $O'(a, b)$로 옮길 때, xy평면에서의 도형의 방정식 $f(x, y)=0$은 새로운 좌표축에 대하여 $f(x+a, y+b)=0$ 이다.

④ 도형 $f(x, y)=0$을 원점에 대하여 평행이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.

2. 평면위의 직선 l이 있을 때, 도형 F위에 모든 점을 직선 l에 대한 대칭점으로 옮기는 것은 ?

① 직선 l에 대한 대칭이동

② 직선 l에 대한 회전이동

③ $y=x$에 대한 대칭이동

④ 원점에 대한 회전이동

3. 도형 $f(x, y)=0$ 을 대칭이동한 도형의 방정식에 대한 설명이 잘못된 것은 ?

① x축에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(x, -y)=0$
② y축에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(-x, y)=0$
③ $y=x$축에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(y, x)=0$
④ 원점에 대하여 대칭이동한 도형은 $f(-y, -x)=0$

4. 회전이동의 특수한 경우는 ?

① 닮음변환 ② 선대칭이동
③ 점대칭이동 ④ 평행이동

5. 다음 설명중 다른 것은 ?

① 평면 R^2위의 모든 점을 일정한 방향으로 밀어 옮기는 변환
② 평면 R^2위의 모든 점을 그 위의 정점 A의 둘레로 일정한 각의 크기 θ 만큼 돌려 옮기는 변환
③ 평면 R^2위의 모든 점 P를 선분 PP'가 그 평면위의 정직선 l에 의하여 수직이등분되는점 P'로 옮기는 변환
④ 평면 R^2위의 정점 A가 다른 점 P에 대하여 AP또는 그 연장위의 점 P'를 잡아서 $AP' : AP = k$ ($k \neq 0$, $k > 2$) 되도록 P에 P'를 대응시키는 변환

6. 뒤집어서 옮기는 합동변환은 ?

① 점대칭이동 ② 평행이동
③ $y=x$에 대칭이동 ④ 원점에 대칭이동

7. 합동변환 아래서 불변으로 남아 있는 기하학적 성질중 맞지 않는 것은 ?

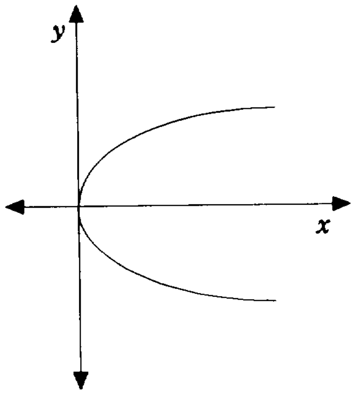
① 한 점은 한 점으로 변한다.
② 한 직선은 한 직선으로 변한다.
③ 평행선은 평행선으로 변한다.
④ 만나는 두 직선의 각은 일정하게 변한다.

8. 다음 변환들 중에서 의미가 다른 하나는 ?

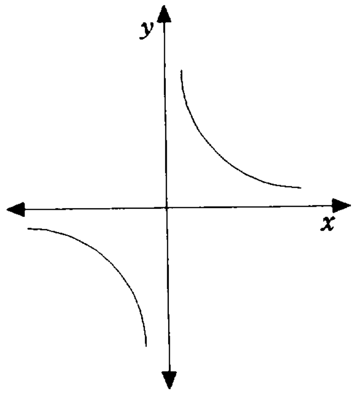
① 합동변환 ② 평행이동
③ 닮음변환 ④ 대칭변환

9. 다음중 y가 x의 함수가 되는 대응이 아닌 것은 ?

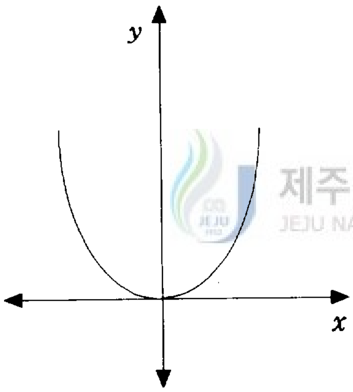
①



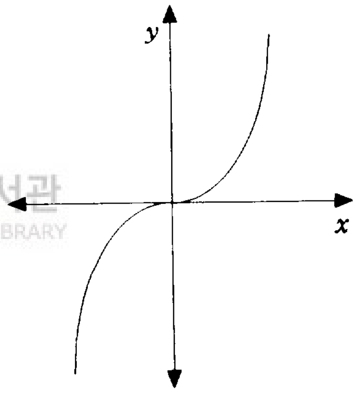
②



③



④



10. 다음 함수에서 일대일 대응인 것은 어느 것인가 ?

① $y = x^2$ ② $y = (x-1)^2+2$ $(x \geq 0)$

③ $y = c$ (c: 상수) ④ $y = (x+1)^2+2$ $(x \geq 2)$

11. 평면 R^2위에서의 도형 F를 그 위의 점의 대응에 의하여 다른 도형 F' 로 옮기는 것은 ?

① 도형의 변환
② 점대칭 변환
③ 회전변환
④ 항등변환

12. 닮음변환의 설명중 잘못된 것은

① 직관적인 방법에 의한 것으로, 한 도형을 확대하거나 축소 또는 그대로 다른 도형에 포갤 수 있을 때
② 두 다각형에서 대응하는 각의 크기가 같고, 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때
③ 두 집합 X, Y에서 집합 X의 원소에서 Y의 원소로의 일대일 대응일 때
④ 평면의 한점 O는 자기 자신에 대응되고 임의의 점 A는 $\overline{OA'} = k(\overline{OA})$를 만족시키는 점 A'에 대응될 때

13. 닮음변환의 성질중 설명이 잘못된 것은 ?

"평면 R^2위의 정점 A가 다른 점 P에 대하여 AP또는 그 연장위의 점 P'를 잡아서 $AP' : AP = k$ ($k \neq 0$ 인 상수)되도록 P에 P'를 대응시키는 변환"

① $k = 1$이면 합동변환이다.
② $k \neq 1$, $k > 0$ 이면 닮음변환이다.
③ 크기와 위치가 변한다.
④ 모든 선분의 길이의 비와 크기가 보존 된다.