碩士學位論文

概念理解 및 應用力을 기르기 위한 整理學習紙 開發

指導敎授 高 胤 熙

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李　仁　順

2003年　8月

概念理解 및 應用力을 기르기 위한 整理學習紙 開發

指導敎授 高 胤 熙

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2003年 5月

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 李 仁 順

李仁順의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

2003年 7月 日

審 査 委 員 長 ______________ 印

審 査 委 員 ______________ 印

審 査 委 員 ______________ 印

<抄錄>

概念理解 및 應用力을 기르기 위한 整理學習紙 開發

李　　仁　　順

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 高 胤 煕

학교 현장에서 학생들에게 취약한 부분의 문제에 대한 해결력을 키우기 위해서는 개념의 정확한 이해와 혼란을 초래하는 내용의 차이점 및 동질성 등을 구분할 수 있는 능력을 위한 교육이 선행되어야 한다. 이를 위해서는 반복학습 및 비교학습을 통하여 학생들의 개념이해에 도움을 줄 수 있는 자료를 개발해야할 필요성이 있었다.

평소 노트필기에 의존하여 가르쳤지만 학생들은 노트를 형식적으로 기록하고 반복학습에 활용하지 못하고 있었고 어려운 개념에 대한 문제는 여전히 해결하는데 오답률이 높았으며 오답노트와 같은 역할을 할 수 있는 자료가 개발되어야 함을 알 수 있었다.

이에 정리학습지를 개발하여 학생들에게 투입하였고 처음에는 연구대상 학교 일부 학생들에게서 부담을 느끼는 모습을 보게 되어 학생들에게 어려운 문제를 제시하여 자신감을 잃게 하지는 않은가 하는 우려도 있었다. 그러나 관심 있는 학생들은 매우 흥미를 보이며 정리학습지를 계속하여 제공해 달라는 요청이 있었다.

정리학습지의 내용은 20여년 교육경험을 통하여 얻은 것으로 학생들이 평소에 혼란을 느끼고 평가를 했을 때마다 오답 율이 아주 높은 내용을 중심으로 만들었다. 학생들에게 정리학습지로 여러 차례 반복학습 하는 기회를 제공하였고 5개월후, 이에 대한 학생들의 반응을 설문지를 통하여 분석하였다.

70%이상의 학생이 정리학습지에 대한 긍정적인 평가를 내리고 있으며 5%이내의 학생이 학습지의 양이 많고 내용이 어렵다는 이유로 부정적인 반응을 보였다.

어렵고 힘든 문제를 일부의 학생들은 피하려고 하고 풀어보려는 의지가 약하며 이유보다는 단순한 방법 암기만을 바라고 있다. 이는 수학에 대한 자신감의 상실을 가져온다. 문제에 대한 해결력을 높이기 위해서는 앞으로 좀더 나은 흥미 있는 자료의 개발이 절실히 필요하다,

※ 본 논문은 2003년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목　　　차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

학교 현장수업 경험이 20여 년이 되고 있다. 그 동안 현장에서 느끼는 것은 학생들이 각 영역을 별개로 생각하여 연계하는데 어려움을 겪고 있으며 이해보다는 문제해결 방법을 암기하고 있어 문제 해결능력이 떨어지고 있다. 이항할 때 부호가 바뀌는 이유에 대해서 질문을 하면 답변 못하는 학생들이 대다수이다. 그냥 기계적으로 문제를 해결하고 있는 것이다. 등식의 성질을 활용하고 있음을 잊은 체 방정식을 풀고 있으니 항끼리 교환할 때도 부호를 바꾸는 학생이 있는 현실이다.

이유를 모른 상태로 기계적으로 계산을 하는 학생은 유사유형이 나오면 개념의 차이를 인식하지 못하고 같은 방법으로 해결하여 오류를 범하고 있으며 대부분의 학생들이 혼란을 느끼는 부분은 비슷한 영역이다. 이런 혼란이 오는 내용을 분명히 해결해 줄 수 있는 정리된 자료의 필요성을 지도하면서 늘 느끼고 있다. 상위권 학생들은 나름대로 정리하여 개념의 차이를 인식하지만 중하위권 학생들은 차이를 인식하지 못하여 오류를 범하고 있는 실정이다. 분명한 개념 이해를 바탕으로 문제해결을 한다면 오류로 인한 혼란이 없어지게 될 것이고 실력향상에 크게 기여하여 수학에 대한 자신감이 형성되리라 생각된다.

본 연구대상 학교는 소도시 내 중심 가에 위치하여 대부분의 학생들은 교과서 수준의 문제를 학원, 과외, 학습지들을 통하여 예습으로 해결하고 있다. 그러나 내용에 따라서 왜 이렇게 해결하는가? 라는 질문에 많은 학생들이 정확한 답변을 하지 못하는 부분이 많다.

학생들이 혼란을 느끼는 부분은 공통적임을 지적하였다. 이 부분을 정확히 이해시

킬 수 있는 자료를 개발해야 하며 이 자료를 통하여 개념을 분명히 이해시키고 문제해결할 때 생기는 혼란을 없애야 할 필요가 있다. 수학은 항상 분명해야하고 짐작으로 해결해서는 안된 다는 인식을 심어주어야 한다. 항상 근거를 가지고 모든 문제를 접하면 해결이 가능함을 경험하게 하고 문제해결에 성취감을 느끼도록 하며 이로 인하여 수학은 매력적인 과목임을 느끼게 하는데 본 연구의 필요성이 있다.

세계 각 국은 나름대로 자국의 이익을 위해 치열한 경쟁을 벌이고 있다, 이에 대처하기 위해서는 모든 학문의 기본이 되는 수학교육의 내실은 필연적이다. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하게 하고 여러 가지 현상을 수학적으로 표현하고 논리적으로 사고하여, 처리할 수 있는 능력을 기르고 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 하여야 한다. 개념이해가 바탕이 되지 않은 지식은 응용되지 않으며 문제해결력이 떨어져 수학에 대한 자신감을 잃게 만드는 요인이 된다. 혼란이 오는 문제를 정리하여 개념이해에 도움을 주고 '왜'라는 질문에 답할 수 있는 능력이 형성될 때 어떤 형태의 문제든 자신감을 가지고 임할 수 있게 될 것이다.

대다수의 학생들은 근본적인 이유를 생각하기 싫어하는 경향이 있으며 문제 푸는 방법만을 암기하여 문제를 해결하려고 한다. 그러나 이는 응용력이 떨어지고 혼란에 빠지게 되는 것이다. 많은 사고를 바탕으로 개념에 대한 분명한 이해가 중요한 바탕이 되는 것이다.

미래사회를 개척할 인적자원은 올바른 이해를 바탕으로 수학문제를 해결할 수 있는 능력 있는 인간이다. 따라서 본 연구자는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 유사한 개념간, 유사한 유형간에 부합한 과제를 제시하고자 한다. 문제에 접근하는 방법, 문제를 이해하는 방법 등을 정리한 학습지를 통하여 오류 원인을 분석하고 사고(思考) 오류 원인 처치 능력을 신장시킬 수 있는 방안을 모색하고자 한다.

2. 연구의 목적

본 연구 대상 학교는 시내 중심 가에 위치하고 있으며 연구대상 선수학습이 이뤄지고 있어 개념이 용이한 문제에 대해서는 이미 해결 할 수 있는 수준이다. 그러나 문제에 따라서는 이해가 안된 상태에서 암기위주로 문제해결을 하고 있어서 상황에 따라 혼란을 초래하고있다. ‘왜’라는 질문에 적절한 답변을 하지 못하며 단원간에 연결이 이뤄지지 않는 실정이다. 본 연구는 정리 학습지를 통하여 개념이해를 분명히 하고 문제 해결력을 높이는데 그 목적이 있다. 혼란이 오는 개념을 정리, 비교를 통하여 개념이해를 분명히 하고 수학에 대한 자신감을 길러주며 수학에 대한 흥미 도를 높여 기초과학에 충실을 기해, 급변하는 사회에 적응 할 수 있도록 하고자 한다.

1) 사고(思考) 오류요소를 추출하고

2) 개념이해 및 응용력을 기르기 위한 정리 학습지를 개발하여

3) 비교학습 및 반복학습을 통한 개념의 정확한 이해를 도모하여 문제 해결력을 높이고

4) 사고 오류 원인을 발견하고 이해능력을 신장하여 수학의 논리적인 이론과 엄밀성을 신장시키는 데 목적이 있다.

3. 연구의 제한

1) 사고오류 요소 중 개념이해오류 및 처리기술의 오류를 중점으로 한다.
2) 중학교 1학년 대수 부분만을 적용한다.
3) 유사개념, 유사유형의 문제 상호 비교 및 예와 예가 아닌 문제를 비교한다.
4) 사고오류 요소의 치유문제를 개발한다.

4. 실행 중점 설정

본 연구는 사고오류요소의 분석보다는 치유에 그 중점을 두었다.

1) 사고(思考) 오류 요소를 추출하고

2) 사고 오류 처치 능력 신장을 위한 정리 학습지를 개발한다.

5. 연구의 범위

본 연구는 개념의 정확한 이해를 목적으로 혼란이 야기되는 유형을 비교 분석하는 자료 및 문제해결에 어려움을 느끼는 과제를 여러 각도로 풀이를 시도하게 하는 자료를 개발하여 학생 상호간 탐구, 해결한 방법을 상호 비교 토의하여 사고(思考) 오류 원인 처치 능력 신장에 그 목적이 있다.

1) 중학교 1학년 대수 영역(집합과 자연수, 정수와 유리수, 문자와 식, 함수)을 대상으로 한다.

2) 다양한 유사유형 및 유사개념의 문제를 상호 비교하고 예와 예가 아닌 문제를 비교하여 개념이해에 도움이 되는 자료를 개발한다.

6. 용어 정의

본 연구에 사용하는 용어를 다음과 같이 정의한다.

1) 사고(思考) 오류(誤謬) 원인

문제풀이 과정에서 잘못 사용된 수학적 지식, 개념, 원리, 법칙, 정리 등을 말한다.

2) 정리 학습지

주어진 과제와 유사유형, 혼란이 오는 개념 등을 상호비교 분석을 통하여 문제해결 과정상의 사고 오류 원인을 분석하고 고난도 개념 이해를 신장시킬 수 있는 학습지를 말한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 개념 지도

1) 개념의 본질

개념이란 어떤 法則에 의해 연결된 細部特徵의 조합이다. 細部特徵이란 그 對象이나 事象으로부터 추출될 수 있고, 어떤 다른 對象이나 事象의 어떤 측면이다. 풀(草)은 여름에 푸르다. 그러면 "푸르름"은 풀의 細部特徵이다. 法則이란 어떤 것을 행하는 데 관한 指示이다. 예를 들면, 골프 공은 특수한 競技를 목적으로 사용되는 어떤 구조와 크기, 무게를 갖는 圖形의 물체이다. 세부특징들을 결합하는 법칙은 하나의 接續(conjunction)이다. 세부특징들이 서로 합쳐져서 개념을 형성한다. 골프공이란 개념은 이렇게도 또 저렇게도 또 다르게도 이야기될 수 있다.[1]

문헌에 제시된 개념에 관한 대부분의 정의들은 매우 광범위하다. Bourne(1966)에 따르면 : **둘 이상의 구별 가능한 사물들이나 사건들이 각각의 특정적인 어떤 공통의 세부특징이나 속성을 바탕으로 하여 함께 묶여지거나 분류될 때, 그리고 다른 사물들과 나뉘어질 때는 개념이 존재한다.**

그후 Bourne(1974)은 이 정의를 정교하게 하여 결정적 세부특징들간의 관계들을 개념에 필수적인 것으로 포함시켰다.

---

1) 디이즈・헐즈・엣지즈 共著, 李寬鎔 金基重 共譯, 『學習心理學』, 서울 : 법문사, 1987, pp. 269~270.

2) 수학적 개념 학습[2)]

학생의 수학적 개념에 대한 지식과 이해의 평가는 그들이 다음과 같은 것을 할 수 있는지의 증거를 제공해야 한다.

① 개념에 명칭을 붙이고(label), 그것을 언어화하고 정의할 수 있다.

② 예와 예가 아닌 것을 확인하고, 그러한 것을 만들 수 있다.

③ 모델, 다이어그램, 기호를 이용하여 개념을 표현할 수 있다.

④ 한 가지 표현 방식을 다른 것으로 번역할 수 있다.

⑤ 개념의 여러 가지 의미와 해석을 인식할 수 있다.

⑥ 주어진 개념의 성질을 확인하고, 특정 개념을 결정짓는 조건을 인식할 수 있다.

⑦ 개념을 비교, 대비할 수 있다.

이에 덧붙여, 평가는 학생들이 여러 가지 개념에 대한 그들의 지식을 어느 정도 통합했는가를 판단하는 증거를 제공해야 한다.

개념은 수학적 지식의 본질이다. 학생들은 개념과 그것의 의미, 해석을 이해할 때만이 수학에 감을 잡는다. 개념적 이해는 수학을 의미 있게 하기 위한 근본적인 것이기 때문에, 학생의 수학적 지식의 평가는 반드시 수학적 개념의 이해를 검사해야 한다.

수학적 개념의 이해는 단순히 정의를 떠올리거나 공통적인 예를 인식하는 것 이상으로 이 기준에서 확인된 광범한 능력을 포함한다. 평가 역시 이러한 개념적 이해의 측면을 강조해야 한다. 평가의 과제는 예와 예가 아닌 것의 선택을 위하여 적절한 혹은 부적절한 개념적 속성을 구별할 줄 아는 능력과, 개념을 다양하게 표현하는 능력, 그것의 다양한 의미를 인식하는 능력에 초점을 맞추어야 한다. **학생들의 오해(misconception)에 관한 정보를 이끌어 내도록 고안된 문제는 수업을 계획, 수정**

---

2) 강옥기,『수학과의 평가방법 그 이론과 실제』,서울 : 교학사, 1991, pp. 152~153.

하는 데 유익한 정보를 제공해 줄 수 있다.

학생들의 개념에 대한 이해의 평가는 개념 획득의 발달 적 본질에 민감해야 한다. 수학 개념을 이해하는 데는 많은 시간이 걸린다. 저학년에서 도입된 개념들은 나중에 확장되고 더 깊이 연구된다. 개념의 이해를 측정하기 위해 사용된 과제와 상황은 학생의 개념에 대한 기호 체계의 성숙을 결성하는 학년에 따라 달라져야 한다.

이 기준은 학생들의 개념적 이해와 지식의 여러 측면을 평가하는 데 필요한 여러 과제를 제시하고 있다. 이해의 각 측면을 평가하기 위해 분리된 과제를 선정할 필요는 없다. 여러 측면을 포괄하는, 하나의 과제를 만들 수 있을 것이다. 모든 개념의 모든 측면을, 또는 동시에 모든 학생을 평가할 필요도 없다. 평가되는 개념적 이해의 측면은 수학적 내용과 학생의 수준에 따라서 선택되어져야 한다. 또, 평가 과제는 교수방법과 일관성이 있어야 한다. 예를 들어 물체를 사용하여 분수를 이해한 저학년에게는 그러한 자료를 사용하여 그들의 개념적 지식을 선명하도록 격려되어야 한다.

3) 예와 부정적인 예 제시의 필요성[3)]

보다 확실한 수학적 개념을 형성시키는 데는 적절한 예의 제시에 의한 수학 학습이 필요하다.

수학적인 개념을 형성시키는 데는 반드시 구체적이고 적절한 예를 제시하여 공통적인 속성을 뽑아 내는 활동이 필요하다. 그리고, 예들은 대부분 다른 개념이기 때문에 이미 학습자 속에 형성되어 있는지를 확인해야 한다. 이러한 예들은 일상 경험이나 환경에 의해서 직접 얻어지는 것은 추상도가 높지 못하기 때문에 수학적인 의미가 포함된 예를 착안 제작하여 제시할 필요가 있다. 예 제시를 통한 학습만이 학생들에게 보다 명확한 개념이 형성되어 지적사고 활동의 범위를 넓혀 가는데 중요한 핵심적 역할을 할 것이다.

Jacob는 예 제시를 통한 수학적 개념의 형성 과정을 ① 주어진 예의 각각을 인

3) 박성택,『문제해결학습의 현장 적용에 관한 소고, '94 수학과 초·중등 문제해결 지도에 관한 워크샵』, 청람 수학교육 제4집, 1994, pp. 6~7.

식하는 단계, ② 예에 대하여 서로 다른 점이 떠오르게 되어 여러 가지 지각 표상을 하는 단계, ③ 지각 표상에 공통적인 속성이 떠오르게 하는 단계, ④ 공통적인 점을 언어로 표현하는 단계의 과정을 밟아 줄 것을 요구하고 있다. 여기에서 예 제시는 예인 것과 예가 아닌 것을 혼합 제시하는 것이 효과적이다. 예가 아닌 것을 예인 것보다 많이 제시하면 학생들이 사고의 혼란을 일으키기 때문에 예인 것을 더 많이 제시하는 것이 효과적인데 이때 예와 예가 아닌 것의 혼합제시 비율은 3:1 정도가 적절하다고 한다.

예의 제시방법은 한 번에 한 예를 보여주고 또 한 예를 보여주는 식의 예를 하나씩 차례로 보여주는 계시적 제시법(successive presentation)과 여러 개의 예를 모아서 보여주고 난 뒤에 계속해서 여러 개의 예가 아닌 것을 제시하는 초점 제시법(focus presentation), 예와 예가 아닌 것을 혼합 제시하여 공통적인 속성을 발견한 다음에 예와 예가 아닌 것을 하나씩 차례로 새로운 예를 제시하여 개념을 인지하는 동시 제시법(simultaneous presentation)이 있다. 이러한 예 제시 방법에 관한 연구에 의하면, **동시 제시법이 초점 제시법보다 효과적이고, 초점 제시법이 계시적 제시법보다 효과적이었다고 한다. 따라서, 수학적인 개념 형성을 보다 명확하게 하기 위해서는 적절하고 충분한 예 제시를 통한 문제해결 학습전략이 필요하다고 본다**

2. 절차 지도

1) 절차적 지식[4)]

절차적 지식은 무엇을 어떻게 하는가에 대한 지식(Knowledge of how)이다. “분수를 나누기 위해서는 제수를 거꾸로 해서 곱하면 된다”라고 말하는 아이는 분수를 나누는데 대해 어떤 것이 진인지는 알지만 아직 분수를 어떻게 나눌 줄을 알지 못할 수 도 있다. 이는 단지 분수 나누기 시험에서 그가 실제로 수행한 바에 의해서만 결정될 수

4) Ellen D. Gagné 著 이용남, 박분희 外 共譯, 『인지심리와 교수-학습』, 서울 : 교육과학사, 1993, pp. 75~78.

있다. 비슷하게, 자기가 Macon Street 2309번지에 살고 있다는 것을 알고 있는 아이가 학교에서 거기까지 어떻게 가야 할 지 알지 못할 수도 있다. 이는 단지 그 아이에게 집에 가라고 말을 하고 나서 그 아이가 그 곳에 도착하는지 못하는지를 보고서야 결정할 수 있다.

절차적 지식은 역동적이다. 절차적 지식이 활성화되면, 그 **결과는 정보의 단순한 회상(recall)이 아니라 정보를 변형(transformation)하는 것이 된다**. 예를 들어, 문제 $\frac{286}{2}$을 수행한 결과는 143이다. 투입 정보($\frac{286}{2}$)는 변형되어서 투입과 다르게 보이는(143)이라는 산출을 낳는다. 또, 예를 들어, 독서 수업에 대한 절차적 지식의 성과는 학과 수업 계획이 될 수도 있을 것이다. 투입정보 “나는 내일 독서 수업을 준비해야 할 필요가 있다.”는 변형되어서 투입과 아주 다르게 보이는 산출인 학과를 산출한다. 그래서 절차적 지식은 정보에 작용해서 그 정보를 변형시키기 위해서 사용된다.

절차적 지식은 일단 잘 학습되고 나면, 빠르게 자동적으로 작용한다. 예를 들면, 숙달된 독서가는 해독 과정을 거의 의식함이 없이 인쇄 내용을 빨리 해독(decode)한다. 인쇄 내용을 해독하는 것은 그것이 인쇄 내용을 음소 표상 또는 의미 표상 또는 양자로 변형시켜 준다는 점에서 절차적 지식이다.

2) 수학적 절차 학습[5)]

학생의 절차에 대한 지식의 평가는 다음과 같은 것을 할 수 있다는 증거를 제공해야 한다.

① 언제 어떤 절차가 적절한지를 인식할 수 있다.
② 절차의 각 단계에 이유를 제시할 수 있다.
③ 절차를 확실하고 효율적으로 실행할 수 있다.
④ 절차의 결과를 경험적 ·분석적으로 입증할 수 있다.
⑤ 옳고 그른 절차들을 인식할 수 있다.

---

5) 강옥기, 前揭書, pp. 153~154.

⑥ 새로운 절차를 만들고 기존 절차를 확장 수정할 수 있다.

⑦ 수학에서의 절차의 성질과 역할을 이해할 수 있다.

학교 수학의 문맥에서 절차는 일반적으로 계산적인 것을 의미하지만 수학적 작도 같은 비계산적인 것도 있다. 수학적 절차를 확실하고 효율적으로 실행하는 것이 중요하지만, 절차적 지식은 그 이상이어야 한다. 즉 절차를 적용하는 시기 및 절차가 작용하는 이유를 알아야 하고, 실행하면 옳은 답을 얻을 수 있다는 것을 입증해야 하며, 절차의 기초가 되는 개념과 그것을 정당화하는 논리를 이해해야 한다. 그리고 적용할 수 있는 절차와 적용할 수 없는 절차를 구별하고, 절차를 수정하고 새로운 것을 만들 수 있어야 한다. 효율적인 방식이라는 어떤 특별한 필요가 생길 때 절차는 도구로써 만들어지며 그래서 새로운 상황에 적합하게 확장 수정된다는 것도 알아야 한다. 따라서 절차적 지식의 평가는 절차를 수행하는 능력의 평가에만 한정될 것이 아니라, 이 스탠더드에서 주장된 절차적 지식의 모든 측면들이 강조되어야 한다.

3. 개념, 절차의 구조화 및 연결성

다른 사람에게 개념을 전하는 최선의 방법을 이해하는 것은 매우 중요하다. 교육 그리고 모든 종류의 정보유포에 있어서, ① 개념이 쉽사리 그리고 충분히 이해할 수 있도록, ② 학습자가 새로이 획득한 개념이 교사의 것과 밀접하게 부합될 수 있도록, ③ 개념이 잘 파지 되고 개념체계내의 다른 요소들과 명백하고 일관된 관계를 맺으며 불명료하더라도 수정가능하고 사고와 행동에 이용될 수 있도록, 어떻게 개념을 구조화하고 제시해야 할지를 알 필요가 있다.[6]

수업은 잘 구조화된 지식의 존재를 확신하여야 하며, 관련된 개념과 절차와의 연결을 극대화시켜야 한다. 이것은 수학 수업은 수학적으로 정직하다는 것을 확신하도록, 교과 내용의 구조를 나타내도록, 다양한 상황에서 새로운 절차와 개념을 연습시킬 수 있는 기회를 제공하도록 해야 한다.[7]

6) Gillian Cohen 著 李寬鎔 外譯, 前揭書, p. 94.

NCTM (1989) 에서는 수학적 개념이 매일의 일상 생활적인 경험과 학교 안팎에서 연결될 때, 학생들은 수학의 유용성을 인식하게 될 것이라고 하며, 다양한 개념이나 절차의 표상을 서로 관련지을 수 있어야 하며, 다른 교육 과정 영역에서 수학을 사용할 수 있어야 하며, 수학에서 다른 내용들 사이에 관계를 인식하고, 매일의 일상 생활에서의 수학의 사용함을 강조한다.[8)]

4. 수학적 오류

1) 오류연구의 역사

오류에 대한 연구를 함으로써 학생들의 인지능력을 파악할 수 있고 교수 학습시 더 효율적인 교육을 할 수 있게 때문에 수학교육에서 오류에 관한 연구는 오랜 역사를 지니고 있다. 많은 오류의 연구들 중에 대표적인 것 몇 가지만 소개하면 다음과 같다.
Radatz(1979)에 의하면, 미국에서는 1925년경 Buswell과 Judd가 산술적인 오류를 진단하여 30여개 이상의 연구를 한 바 있고, 독일에서 Weimer(1925)와 Seemann(1925)이 오류를 연구하였다.

미국에서의 연구 방법과 가설은 행동주의에 기원을 두고 있는 반면, 독일 등 유럽은 Gestalt theory와 교육학적인 개혁자들의 생각에 영향을 받는 등 학교 체제 구조의 차이에서부터 오류 분석 면에 있어 매우 다른 출발과 관심의 차이가 있었다. 그러나 최근에는 산술적 계산에서의 오류에만 제한되지 않고 여러 방면으로 오류분석에 관심이 분산 증가되었는데 그 이유는 다음과 같다,

첫째, 수학에서의 규준지향과 표준지향평가에 대한 실망과 회의가 교수의 진단 측면에 대한 관심을 증가시켰다.

---

7) 구광조, 오병승, 전평국 共譯, 前揭書, p. 291.
8) 최형구, 『생활 경험 학습 자료 개발과 적용을 통한 국민학교 수학과 학습 태도 분석』, 한국교원대학교 석사학위 논문, 1994, p.12.

둘째, 교육과정에서 수학적 내용의 재구성은 더 많은 어려움과 오류를 생산할 것이라는 생각에서이다.

셋째, 수학교수의 개별화와 분화는 오류를 기술적으로 특별히 진단할 것을 요구한다. 교사들은 수학 내용이 교육적 발전과 사회철학을 통합하는 측면에서의 진단교수를 위한 실제 모델을 필요로 한다. 수학 교수의 내용에 대한 고려가 없는 개인적인 차이의 분석을 교사에게 교수의 개별화 또는 특별한 과제를 배우는데 있어서 실제적인 도움을 주지 못한다.

넷째, 임상조사, 사례연구, 교수학적 현상학 등 경험적 연구에 대한 전통적인 범례의 비판은 수학교육에서 다른 연구 방법들을 자극시켜왔다.

1970년대 이후로는 미국의B.Holtan &J. Dan Knifong(1976) 독일의 Hendrik Radatz, 오스트레일리아에서 Clements(1980) 와 Newmann(1981), 이스라엘의 N.M. Hadar & Zaslavsky(1987) 등 각국의 수학자들이 오류에 관한 연구를 활발히 하고 있다.

2)오류의 분류

독일의 수학자 Hendrik Radatz(1979)는 오류를 범하게 되는 범주를 다음 다섯 가지로 구분하여 제안하였다.

① 언어의 난이성
② 공간적인 정보 획득의 어려움
③ 필수적인 기술, 사실, 개념의 부족한 숙련
④ 사고의 경직 혹은 부정확한 연합
⑤ 부적절한 규칙이나 전략의 적용

Pippigg(1975)는 이 오류의 범주 중 사고의 경직이나 부정확한 연합에 의한 오류, 반대의 치환으로부터 생기는 오류들은 흥미 있게 다음의 다섯 가지로 분류했었다

① 보존의 오류: 업무나 문제의 단순한 영역에서 자주 나타난다.

② 연합의 오류: 단순 요소사이의 부정확한 연합의 경우이다.

③ 방해의 오류: 다른 연산이나 개념이 서로 방해하는 경우이다.

④ 동화의 오류: 부정확한 듣기가 읽기나 쓰기에서 실수를 유발시키는 경우이다.

⑤ 전 작업으로부터 만대 치환의 오류: 일단의 연습이나 언어적 문제로부터 얻게 된 잘못된 생각의 효과를 동일시하는 경우이다.

Pippigg이 분류한 오류들을 살펴보면 **<u>비슷한 문제에 대한 경험이 사고의 습관적인 경직성을 가져오면서 학생들이 오답을 쓰게됨을 알 수 있다.</u>**
이스라엘의 N.M. Hadar & O. Zaslavsky(1987)는 고등학교 학생들이 수학졸업 시험에서 범한 오류들을 분석하여 다음 여섯 가지로 분류하였다.

①잘못 이용된 자료(Misused Data) : 문항에 주어진 자료와 학생들이 사용한 자료 사이의 불일치로 인한 오류

② 잘못 해석된 언어 : 수학적 시실 들을 하나의 수학적인 기호 언어에서 다른 언어로 옮기는 과정의 부정확에서 오는 오류. 즉, 문제 내용을 잘못 해석하는데서 오는 오류

③ 곡해된 정리나 정의 : 특수한 원리, 법칙, 정리 또는 정의를 부적절하게 사용한 경우

④논증되지 않은 해답 : 학생들이 밟은 각 단계들이 그 자체로는 옳으나 검토를 하지 않음으로 인해 나타난 마지막 결과가 언급된 문제의 답이 아닌 경우

⑤논리적으로 부적절한 추론: 주어진 정보로부터 혹은 전에 잘못된 것으로부터 새로운 정보가 부적절하게 이끌어지는 데서 오는 오류

⑥기술적 오류: 계산상의 오류, 표로부터 자료를 잘못 끌어내는 오류, 초등학교 또는 중학교 수학에서 습득된 알고리즘을 시행하는데 있어서의 오류 등이 여기에 포함된다.

김옥경(1990)은 고등학교 학생들을 대상으로 테스트를 실시하고 오류를 분석 연구하여 오류의 분류모델을 Hadar의 여섯 가지 범주에 풀이과정이 생략된 오류와 오류의

애매 모호성을 추가하여 여덟 가지 범주로 분류하였다. 여기서 보면 기술적인 오류도 흔히 범하지만 **곡해된 정리나 정의에 의한 오류의 빈도가 가장 높았고** 이것으로 학생들이 수학적 정리나 정의를 이해하는데 문제가 있음을 알 수 있다.

3) 오개념 형성의 원인

(1) 내적 요인

① 아동의 지각 특성과 관련된 요인

아동들은 처해진 내에서 관찰에 의하여 지각되는 것에 대하여 우선적으로 생각하려는 경향이 있고 가르치고자 하는 내용과 관련성 있는 요소로 아동의 지식 체계가 학습에 지대한 영향을 끼치는데 이러한 지식체계인 인지구조는 지각적 경험의 표상인 개념들이 위계적으로 조직된 체계를 의미한다.

② 아동의 논리적 추론 특성에 따른 오개념

아동들은 모든 것의 현상이나 의미를 직관적으로 보면서 해석하는 경향이 있으며, 관찰결과에 대하여 깊이 생각함이 없이 상식적인 생각에 의존하여 성급한 결론을 이끌어 내거나, 지나치게 일반화함으로써 일어날 수 있다.

(1) 외적 요인

①교과서에 의한 오개념

수학자들에 의해서 집필된 지식체계 구조는 아동들의 지식체계 구조와는 많은 차이를 보이고 있다. 따라서 교과서 집필자들에 의해 진술된 교과서의 개념 구조는 아동의 지식체계와는 상당한 차이를 보여서 쉽게 받아들여지지 않을 수도 있다.

② 교사에 의한 오개념

학생들은 수학 내용을 교과서를 통해서 학습하기도 하지만, 대부분은 교사와 학생간의 교수-학습활동을 통해서 대부분의 개념을 획득한다. 따라서 학생의 인지 능력과는 상관없이 교사가 잘못된 개념을 가지고 있게 되면, 이는 직접적으로 학생의 개념 획득에 영향을 주게된다.

③언어의 모호성에 의한 오개념

수학에서 많이 사용되고 있는 용어는 일상생활에서 사용되는 단어를 그대로 대체하여 사용되어지곤 한다. 이때 언어 자체의 은유적 의미와 단어가 지닌 불명확한 표현으로 인하여, 아동들은 수학에서 사용하는 용어의 의미를 자신이 가진 개념체제 내에 있는 일상적인 의미의 언어로 동화하려고 한다.

5. 치료적 지도의 원리와 방법[9]

1) 치료의 원리

치료적 지도의 원리는 아동들의 잘못 만을 치료하는 것이 아니라 아동들이 오류를 범한 것은 교사가 세운 지도 계획과 아동들의 학습활동간의 부적응에 있다고 생각되므로 치료적 지도는 어떠한 특수 아동에게만 아니라 일반적으로 전체 아동에 대한 지도법이라 할 수 있다. 이는 비슷한 연령의 아동, 비슷한 지역사회에서 같은 학습소지, 닮은 발상 형식 등 이러한 이유에서 아동들의 오류는 어느 정도 보편성을 지니고 있다고 생각한다. 그런고로 치료의 원리로는 아동의 오류 초점에만 치료를 한다는 것 같지만 반대로 아동의 입장에서 본다면 학습원리라고 생각함이 바람직하다고 생각한다.

치료 방법의 원리를 찾아보면 다음과 같다.

(1) 문제점의 자각과 자기 회복력을 강화하다.

- 오류사례의 문제점을 아동 자신에게 자각시킴
- 자기의 문제는 자신이 해결하려는 의욕을 조장
- 오류를 범하는 원인을 자신이 제거하고 치유하는 능력을 강화시키도록 한다.

(2) 확실한 영역으로 연관되는 시사점을 준다.

- 아동의 심리 파악과 예민한 관찰실시
- 아동의 이해와 기능이 계통적이고 조직적이 아닌 부정확한 점에서 일어난 혼돈 때

9) 김웅이, 평면도형 구적능력 향상을 위한 구적연습의 오류분석과 지도(36회 현장교육연구대회 우수보고서집, 경북교원단체연합회, 1993), P.166~P.167에서 재인용

문이므로 오류 사례를 아동들에게 지적하여 주어 확실한 영역에 도달할 수 있도록 자극을 준다.

(3) 문제의식과 논리과정을 원조한다.

・아동과 교사간의 공동 의식은 논리의 보편성에서 생기는 것이니 아동들의 논리 하는 힘을 아동 스스로 개발하게 하고 그 추진 방법을 문제의식의 강화에 불러일으키도록 도와준다.

・이해점의 근접과 이해 내용의 혼란의 정비 조직화를 초점으로 삼아야 한다.

이상의 원리는 학습 진행 과정에서 수시로 단계적으로 제시하거나 필요한 시기에 적절한 내용으로 문제 사태에 대한 논리적으로 생각하여 문제의식을 강화시켜 자기 학습력을 정착시켜야 하겠다.

2) 치료의 평가

오류를 범한 사례요인을 의식시키고자 자기 회복력을 강화시키는 치료적 지도 방법으로 개별 지도와 집단 치료 지도의 양면을 병행하여야 한다 라고 하였다.

그 내용을 소개하면 다음과 같다.

(1) 치료의 방법

・대조법 -몇 개의 정답과 오답을 판서 등에 의해 병렬적으로 제시하여 비교시키든지 토의를 시켜서 오류사례를 부각시켜 원인을 알도록 한다.

・설명법-오류를 범한 사례에는 반드시 논리가 정상적으로 성립하지 않아서 어딘지 모르게 착각이나 비약점을 발견할 수 있다. 이것은 아동 자신에게 다시 설명을 시켜 자신이 스스로 착각하였음을 알게 하는 방법이다.

・모순 지적법 -자신의 모순점을 지적하여 문제의식을 자극시켜 잘못을 반성하여 알도록 한다.

・논리적 방법-아동들 자신이 가지고 있는 확실한 문제 해결 방법을 다시 생각하도록 하며 논리적 사고의 촉구로서 문제 해결을 알게 하는 방법 즉, 어떤 정의를 알고 있으며 스스로 한 행위가 정확하게 되지 않을 때 아동들에게 논리적으로 반성하여 알

게 하도록 하는 것이다.

・**문제영역 지도법-오류점의 영역을 넓게 제시하여 아동 자신이 문제에 전체적인 윤곽을 발견하여 오류를 수정하게 하는 방법이다.**

・체험 자각법-오류 사례를 직접 행동이나 체험을 시켜 오류의 원인에서 해답의 모순점을 발견하여 스스로 깨닫게 하는 것이다.

이상의 내용들은 아동들의 실태와 교재의 특성을 고려해서 적절한 방법을 선택하여 활용하면 그 효과가 클 것으로 생각한다.

(2) 치료의 평가

・오류를 범한 아동에게 치료적 지도를 실시하여 그 반응의 결과를 치료적 지도의 지표로 삼아야 한다. 이 때 시일이 경과한 후 재평가가 실시되어야 하되 평가의 원래 성격은 지도 활동과 항상 불가분의 원칙이 있다는 것을 잊지 않고 시행해야 함을 상념해야겠다.

6. 효율적 수업처방의 기법[10]

1) 진단평가와 수업정치(定置)

주어진 학습과제를 학습하기 전에 수업정치 처방을 위한 진단평가를 실시한다.

2) 누가적-계속적 진단과 처방수행

학습과제를 학습하는 중에 계속적인 형성평가를 실시하며, 진단과 처방은 누가적이고 계속적인 학습진전 정보에 따라 갱신된다.

3) 학습량의 정적화

학습량의 정적화를 위한 알고리즘의 기법으로 대표될 수 있는 모형으로는 “수학적 모형(mathematical model), 검사-분기(分岐)모형(test-branching model), 마르코프 모형(markovian model), 베이시안 통계적 모형(bayseian statistical model)등을 들 수 있다.

---

10) 朴成益, 授業方法探究(서울:教育科學社,1996),PP.246～247.

베이시안 통계적 방법을 활용하여 학습의 양을 적정화시켜 주는데는 세 가지의 지수, 즉 달성해야할 목표의 수준(mastery level), 학업 성취수준(achievement level) 및 실패율(loss ratio)을 사용하여 학업 성취에 필요한 학습의 양을 적정화시켜 주는 것이다.

4) 학습계열의 최적화

학생들의 반응 유형에 따라 학습내용 간에 변별 능력을 향상시켜주는 것으로써, 주어진 문제 사태에 오답을 한 경우에는 다음의 학습과제에서 직전에 반응했던 오답지와 같은 계열(혹은 내용)의 문제를 선정하고 제시하여야 하며, 정답을 한 경우에는 정답을 한 문항과는 다른 계열에서 다음의 학습 내용을 선정하여 제시하게 되면 효율적인 학습을 시킬 수 있게 된다.

5) 학습시간의 효율화

학습 과정 중에 주어진 문항에 정답을 한 경우에는 다음 문항을 제시할 때 문항에 대한 학생들의 평균 반응 시간보다 증가시켜 줄 때 개념에 대한 전형(prototype)을 획득하는데 도움이 되고 변별기능(classification skill)을 향상시켜 주기 위하여는 문항에 대한 평균 반응 시간보다 감소시켜 줄 때 효과적이다.

6) 피이드 백의 다양화

학생들의 반응 결과에 따라 정답을 한 경우는 정적인 강화를 주되 오답을 한 경우는 부적인 강화와 함께, 반응한 문항의 정답 및 그 이유를 설명해 줌으로써 다음의 학습과제를 수행하는데 필요한 정보를 제공해주는 교정적 피이드 백(corrective feedback)이나, 또는 반응한 결과에 대한 정당성, 혹은 학습 과제에의 정답, 혹은 오답의 이유를 분석적으로 따져서 정보를 제공하는 분석적 피이드 백(analytic feeback) 및 학습을 수행하는 과정에서 부분적인 오류를 범한 경우에 제공하는 과정적 피이드 백(process feedback)등을 제공함으로써 학습력을 신장시킬 수 있다.

7) 인식을 하기 위한 지도법

(1) 교재의 흐름을 인식한다. 정리를 하기 위한 관점 기입란을 설치한다.

교재의 연관을 정리하도록 하거나 할 주체적인 학습태도는 학생이 교재의 흐름 속에

과제의 가치를 인식하고 과제가 발전하는 방향이나 목적이 과제의의를 예측하고 교재의 흐름을 파악했을 때 비로소 이루어지는 것이다. 과거, 현재, 미래를 통한 교재의 흐름을 의식하고 비교하여 이해의 수준을 높이며 응용력을 기르도록 하며 정확한 개념정리를 위하여 서술적인 형태로 정리하여 이해도를 높인다.

(2)과제를 분류하거나 정리하거나 하여 과제의 유형을 만든다.

학생이 과제에 임할 때 그것만을 과제로 생각하게 하는 것이 아니고 관련을 지운 과제 전체를 과제로서 파악하도록 하고, 많은 과제 중 하나의 과제로서 의식하게 한다.

즉, 교재의 흐름을 항상 의식시키기 위해 노트에 틀을 짜거나 분류·정리를 하기 위한 관점 기입란을 설치한다. 그리고 그들 한 장 한 장의 노트를 단원의 학습이 끝난 단계에서 다시 feed back 조작을 통하여 정리해 간다.

학습과제를 같은 의미의 것, 같은 형식의 것, 같은 수법의 것이라는 관점에서 바라볼 수 있도록 하여 수학적으로 관찰하는 방법을 심화시켜 문제 해결 능력을 신장시키고자 하는 것임을 알 수 있다.

수학교수법은 다양한 방면에서 노력해야 하겠다. 그 중에서도 피드백의 중요성(반복학습) 개념의 연관성(학습계열의 최적화)에 중점을 두고자 한다. 학생들이 흥미를 느낀다는 것은 성취감이 가장 큰 역할을 한다고 본다. 주어진 문제를 논리적으로 스스로 해결했을 때 오는 희열을 느끼게 된다면 수학에 도전하려는 용기가 생길 것이다. 어려운 개념을 이해를 바탕으로 기억할 때 문제 해결력은 높아지리라 생각된다. 짐작으로 문제에 접근한다면 실패할 확률이 높아질 것이다. 그로 인해 자신감을 상실하게도 된다. 수학에서 가장 중요한 것은 개념의 확실한 이해가 아닌가 생각된다.

7. 선행 연구의 고찰

사고 오류 원인과 관련된 선행 연구물에서 본 연구의 목적과 관련 있는 것들을 살

펴보면 다음과 같다.

1) 선행연구

(1) 조해영: 중학교 수학의 대수 영역에서 발생하는 수학적 오류에 관한 연구(1학년, 1999)

◦오류경향을 최소화하기 위해서는 주관식형의 보충 학습지를 통한 개념원리학습이 충분히 이뤄져야 한다.

◦정기적인 평가지를 통해 답안을 분석하여 개념이해를 정착시켜 기술적인 오류를 최소화해야 한다.

(2) 손영희: 수학적 개념지도에 관한 연구(2001.05)

◦교사는 학생이 개념을 형성하도록 도와 줄 수는 있지만 개념 구성하는 것은 학생의 몫이다. 학생들은 자기 주도적 학습이 이뤄져야하고 교사의 도움을 주는 발문, 교수자료, 활동은 아주 중요한 역할을 한다.

◦언어적인 개념정의를 통한 전통적인 학습지도방법은 개념학습에 부정적인 결과를 초래하므로 적절한 예로부터 공통 성질의 추출을 통한 개념형성이 필요하다.

◦ 단원의 성격에 따라 발문위주의 수업, 활동을 통한 개념획득, 전통적인 설명식 수업방법 중에서 어느 한 방법이 효과적인 수업을 진행하는 방법이 될 수가 있다.

(3) 김용호: 일차부등식의 해결과정에서 발생하는 오류유형분석(중학교 교육과정, 2001.02)

◦학생들은 그들이 배운 용어의 개념을 정확히 알지 못하거나, 알고 있으면서도 활용할 수 있는 능력이 부족하여 문제이해의 단계에서부터 오류가 발생한다.

◦주어진 문제를 해결하기 위해 주어진 조건이나 자료를 간과하거나 잘못 해석하여 오류를 발생하는 경우가 있다.

(4)이강진: 문제해결을 통한 개념과 절차의 통합학습 프로그램 구안 적용을 통한 수학적 힘 개발(1999.02)

◦개념, 절차, 문제해결을 순서에 따라 각각 분리하여 독립적인 것으로 지도하기보

다는 개념과 절차를 통합하여 학습할 때 수업내용이 효과적이고 수학과에 대한 긍정적인 학업태도가 형성되었다.

(5) '문자와 식'단원에서 학습능력수준에 따른 오류분석과 교정에 관한 연구 (2001.02)

◦심화반학생, 기초반 학생 모두 '이해의 오류'가 가장 많이 발생했다. 따라서 충분한 개념학습 강조함과 아울러 이를 활용할 수 있는 지도에 중점을 두어야 한다.

2) 분석 결과

(1) 문제해결능력에 가장 큰 영향을 주는 것은 개념의 이해에 있음을 알 수 있다.

(2) 개념을 형성하는데 도움을 주는 것은 교사의 교수법이지만 개념을 형성하는 것은 학생이므로 자기 주도적 학습이 이뤄져야 한다.

(3) 단원의 성격에 따라 효과적인 수업방법은 한가지로 정해진 것이 아니고 다양하게 운영할 수 있다.

위에서 살펴 본 바에 따르면 수업을 진행하는 방법은 여건, 내용에 따라 다양하다. 이미 예습한 학생들을 대상으로 개념에 따른 기초적인 문제만을 다룬다면 학생들은 수업에 대한 의미를 부여하지 않을 수 있다. 자신이 알고 있다고 자만하는 문제에 개념의 깊이를 주어 제시되었을 때 오류를 경험한다면 학생들은 겸손해질 수 있으며 수업에 관심을 가질 수 있을 것이다. 그리고 개념에 대한 이해가 정확해질 것이다. 학생들의 개념이해을 위한 교사들의 노력은 영원히 계속 되어야 할 것이며 본 연구자는 정리학습지의 개발을 통하여 학생들에게 보다 정확한 개념이해를 할 수 있도록 도움을 주고자 한다.

Ⅲ. 연구의 설계

1. 연구 대상 및 기간

기간 : 2002년 3월 ~ 2002년 7월

대상 : 제주시내 남자중학교 1학년 1반~5반

2. 연구 절차

단 계	내 용	기 간
연구 계획	◦ 연구 주제의 설정 ◦ 선행 연구 및 관련 문헌 연구 ◦ 연구 계획서 작성	2002. 1
연구 실행	◦ 문헌연구 ◦ 사고 오류원인 요소 추출 ◦ 개념이해 및 응용력을 기르기 위한 정리 학습지 개발 및 학습지도	2002. 3. 2002. 3. ~ 2002. 7 2002. 3. ~ 2002. 7.
검증 평가 및 보고	◦ 연구 결과 설문지조사 분석 ◦ 연구 결과 종합과 정리 ◦ 연구 보고서 작성 및 결과 반성	2002. 8. 2002. 8. ~ 2002. 12 2002.. 8 ~ 2003. 2.

3. 연구 방법

1) 이론적 연구

• 개념지도

• 절차지도

◦ 개념, 절차의 구조화 및 연결성

• 수학적 오류

• 치료적 지도의 원리와 방법

◦ 효율적 수업처방의 기법

• 선행연구의 고찰

2) 실천 연구

• 사고(思考) 오류요소를 추출.

• 개념이해가 어려운 문제에 대한 정리 학습지 개발

• 사고(思考) 오류 원인 처치능력 신장을 위한 과제 개발.

Ⅳ. 연구의 실행

1. 사고(思考) 오류원인 요소 추출

본 연구자가 재직하면서('82~'2002) 평소에 학생들의 질문내용과 학생들의 수업활동 시 잘못된 풀이를 처치하는 과정에서 발견된 문항들을 토대로 사고(思考) 오류처치 능력 신장 요소를 추출하였다.

1) 오류과제 수집

• 학생들의 질문이 많은 내용

- 형성평가, 정기적인 평가에서 오답률이 높은 문항
- 과제를 제시했을 때 어려움을 호소하는 내용
- 이유를 잊은 체로 기계적으로 풀어 가는 내용(등식의 성질 등 여러 가지 성질, 공식)
- 비슷한 유형으로 개념의 차이를 인식하지 못하고 오류를 발생하는 내용

  (일차식 간단히 하기와 일차방정식 풀기)

2) 대표적인 오류과제

그 동안 오류과제 수집을 통하여 볼 때 가장 많이 발생하는 내용으로 다음과 같다.

(1) 이유를 잊은 체 기계적으로 푸는 내용

이항할 때 부호가 바뀌는 이유를 아는가? → '등식의 성질 중 양변에 똑같은 수를 더하거나 빼어서' 라고 자신 있게 답변할 수 있는 학생은 한 반에 2, 3명에 불과하다. 이유도 모르면서 암기하여 기계적으로 문제를 풀고 있다. 성적이 낮은 학생들은 교환할 때도 부호를 바꾸고 있다. 이는 이유를 생각지 않고 암기 식으로 푸는데서 오는 현상이다.

(2) 비슷한 유형으로 개념의 차이를 인식하지 못하고 오류를 발생하는 내용

- $\frac{3x+1}{2}-\frac{4x-2}{3}+\frac{x+5}{4}$ 를 간단히 하시오

→ 일차방정식을 배우고 나서는 대다수의 학생들이 등식이 아닌데도 12를 곱하여 문제를 간단히 하고 있는 실정이다. 여기서는 일차 방정식을 풀면서 해오던 습관대로 실수하는 경우도 있고 등식인 경우만 등식의 성질을 적용해야 함을 이해 못하는 데서 오는 오류를 범하는 학생도 있다.

- $n(A-B) = n(A) - n(A\cap B) \rightarrow n(A-B) = n(A) - n(B)$

분배법칙에 익숙하다보면 n(A)가 원소의 개수를 나타내는 것임에도 분배법칙처럼 괄호를 풀어 버리는 오류가 많이 발생하고 있다. 이내용은 처음에는 구체적인 예를 통하여 설명하므로 이해를 했다가도 시간이 흐르면서 분배법칙과 혼동하여 버리는 오류가 발생하고 있다. 그러므로 여러 번 기억을 상기시키는 노력이 필요하다.

(3) 개념이해가 어려워 오류를 발생하는 내용

• 6으로 나누면 5가 남고, 5로 나누면 4가 남고, 4로 나누면 3이 남는 가장 작은 자연수와 세 자리 자연수중 가장 큰 수를 구하여라.

→ 거의 대다수의 학생들이 해결하지 못하는 문제이며 해결하더라도 가장 작은 자연수59를 구하는 정도이다. 그리고 59를 구한 학생은 세 자리 자연수를 구하기 위하여 59의 배수 중에서 세 자리 자연수중 가장 큰 수를 구하고 있는 실정이다. 이는 확실한 이해가 안된 상태에서 막연한 짐작에 의존하여 문제를 해결하려는 자세에서 오류가 발생하고 있다.

구하고자 하는 수를 x라 하고 나머지가 다르므로 모자라는 1을 더하여 x+1이 4, 5, 6의 공배수임을 알고 공배수는 최소공배수의 배수임을 이용하여 60의 배수에서 1을 빼는 과정을 주지시키지만, 학생들이 이해하기 어려운 문제에 속한다. 여기서 **나머지의 처리를 통하여 약수, 배수 관계가 성립함을 이용하여 문제를 해결하도록 이해시켜야 한다.**

그리고 가장 작은 자연수하면 최소공배수, 가장 큰 자연수하면 최대공약수를 정확한 이해 없이 기계적으로 푸는 경향이 있다. '왜 그렇게 할까' 라는 질문에 답하는 학생이 몇 사람 안 된다. 다양한 문제 및 여러 개의 답이 나오는 문제를 통하여 개념에 대한 정확한 이해가 필요하다, 이해 없이 방법만을 습득하여 문제 해결하는 경우는 시일이 지나면서 다시 해결하지 못하는 경우가 대부분이다.

또한 약수, 배수 문제에서 제수가 나머지보다 커야 한다는 사실을 잊어버리는 경우도 많다.

• 농도에 관한 문제는 많은 학생들이 어려워하고 풀려고 하지를 않는다. 다양한 유형

의

문제를 통하여 학생들에게 이해를 시켜야 한다. 여러 가지 현상을 접하다 보면 이해의 폭이 넓어짐을 알 수 있다. %의 개념에 대한 이해가 필요하다.

• y의 변역이 치역인지, 공역인지 구분을 하지 못한다. 치역으로 답한 학생도 왜 그러냐는 질문에 답하지 못하는 경우가 많다. y가 x의 함수 값임을 인식하지 못하는 경우가 많다.

3) 단원별 오류과제 추출

영역	대단원	중단원	오류요소 및 이해가 어려운 개념	비고
수 와 연산	Ⅰ 집합 과 자연수	집합	°4로 나누었을 때 나머지가 3인수의 조건제시법표기 °이거나, 와 그리고의 차이 °부분집합사이의 관계, 집합의 연산 사이의 관계	
		자연수의 성질	°약수, 배수관계를 위한 나머지의 처리 °최대공약수, 최소공배수와 관련된 문제 °제곱수에 대한 이해	x÷4=몫 ......3 →x−3,x+1 : 4의배수
		십진법과 이진법	°십진법의수를 이진법의수로 고치는 과정 이해 °다양한 십진법, 이진법의 전개식 이해	2로 나눈 나머지를 거꾸로 읽는 이유생각
	Ⅱ 정수 와 유리수	정 수 와 유리수	°절대값 °정수와 유리수의 덧셈 °혼합된 사칙연산	덧셈에서 혼란이 많이 일어남
		유리수의 계산	°혼합된 사칙연산	계산순서훈련이 필요함

문자와식	III 문자와식	문자와식	°지수, 차수의 차이	
		등식	°교환법칙, 이항, 양변을 계수로 나누기 비교 °계수가 분수인 일차식의 계산과 일차방정식의 풀이에서 혼란(등식의 성질적용 여부) °해가0인 방정식, 해가 없는 등식, 항등식비교	°계수가 분수로 주어지면 기계적으로 분모를 없애기 위해 최소공배수를 곱하는 경향이 있음
		일차방정식	°다양한 농도에 관한 문제의 이해 °%의 개념이해 °거리, 시간, 속력사이의 관계 °x의변역에 따른 방정식풀이	
규칙성과 함수	IV 함수	함수	°x,y의 변역과 정의역, 치역, 공역과의 관계 °	y의변역이 공역인지, 치역인지 이해가 필요함
		함수의 그래프	°정의역에 따른 함수의 그래프 비교	

2. 사고 오류빈도가 높은 개념이해 및 처치 능력 신장을 위한 정리 학습지 개발

학생들의 오해에 관한 정보를 이끌어 내도록 다음과 같은 방향을 설정하여 문제를 고안하고 정리한 학습지를 개발하였다.

1) 기본 방향

(1) 비슷한 유형이면서 이 개념 문제, 즉 혼란이 발생하는 유형을 정리하고 상호비교 및 다양한 관련문제를 통하여 사고 오류처치 능력 신장 및 개념이해를 돕는 과제를 개발한다.

(2) 예와 예가 아닌 것을 동시에 제시하여 개념이해를 분명히 할 수 있는 동시 제시법을 주로 활용한다.

(3)학생들의 지적 호기심을 고취시키고 새로운 아이디어를 창출해 낼 수 있으며 응용력과 사고력을 신장시킬 수 있는 과제를 중심으로 구성한다.

(4) 과제와 답안작성부분을 분리 구성하여 자신의 알고 있는 내용에 대한 확인 및 반복학 습할 수 있도록 한다.(오답노트 역할)

(5) 내용을 확실히 파악하도록 여러 개의 답을 요구하거나 서술형 답변을 요구한다.

(6) 정리학습지로서의 역할을 하도록 중요한 내용, 간과하기 쉬운 내용에 대한 요점을 정리한다.(학원 및 학습지 등 가정학습을 통하여 기본내용은 미리 예습하고 있는 상황이므로 기본내용을 위주로 수업을 진행하면 진부해지고 흥미를 잃을 염려가 있다.)

(7) 용어의 정의 및 뜻을 이해시키고 이를 활용하도록 한다.

(8) 기본적인 요소에서 복잡하고 어려운 개념으로의 연계성을 이해시키고 응용력을 신장한다.

2) 정리 학습 지의 활용

(1) 중 단원이 마무리될 때 그 동안의 내용을 상기시키고 학생들의 실력을 형성평가해보는 기회로 사용하였다.

(2) 어려운 내용은 과제로 제시하여 가정학습을 하도록 하였다.

(3) 학생들이 미처 파악하지 못한 부분의 문제를 제시하여 여러 각도로 사고하도록 하였다.

(4) 노트에 부착하고 반복학습의 기회를 자주 부여 하였다.

형성평가 및 학습과정에서 학습내용과 관련한 피드백 질문, 직접 나와서 푸는 기회 등를 자주 실행 하였다.

(5) 형성평가 및 질문내용에 대한 답변은 수행평가로 반영하였다.

(6) 하위층 학생에게는 정리학습지의 어려운 내용을 강요하지는 않고 특별보충과정을

통하여 쉬운 문제로 자신감을 심어주려고 하였다.

(7) 발문에 신경을 써서 느낌으로 대답을 하지 않고 이유를 설명할 수 있도록 하였다.

3) 정리 학습지의 예시

<집합의 표시법> 1. 원소나열법 2. 조건제시법 : 조건을 보여주는 법 {x | x의 조건} (여기서 x 는 <u>원소)</u> 1) 6의 약수의 집합을 표현한 것중에서 잘못 된 것은? 그리고 그 이유는? ① { 1, 2, 3, 6 } ② {6, 12, 18......} ③ {x | x는 6의 약수} ④ {x | x는 6의 약수의 집합} 2) {1, 4, 7, 10,.........}를 조건제시법으로 나타낸 것 중에서 잘못된 것을 고르고 그 이유를 써라? ① {x | x는 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 자연수의 모임 } ② {x | x = 3n + 1 , n : 자연수 } ③ {x | x = 3n − 1 , n : 자연수 } ④ {x | x = 3n − 2 , n : 자연수 } ⑤ {x | x = 3n + 1 , n : 0, 자연수 } 3) 다음 중 무한집합을 있는 데로 고르고 그 이유를 써라 ① {x | x = 3n + 1 , n : 100보다 작은 자연수 } ② {x | x = 3n + 1 } ③ {x | x = 3n + 1 , 1< n <10 } ④ {x | 1< x < 7 , x : 자연수 } ⑤ {x | 1< x < 7 } 4) 다음 중 공집합, 유한집합, 무한집합으로 구분하라 ① {x | 1< x < 2 } ② {x | 1< x < 2 , x는 자연수 } ③ {x | x는 1보다 작은 양수 } ④ {Φ} *) 수는 자연수로만 되어 있지 않다 (소수도 있다)	

V.설문지조사 결과 분석

1. 설문지조사

1) 연구대상

설문지 검사는 정리학습지를 제공받은 남자 중학교 1학년 5개학급 183명을 대상으로 조사하였다.

2) 연구방법

본 연구는 2002년 3월부터 2002년 7월까지 수학7가 교과서와 관련하여 학생들이 어려워하는 부분과 개념에 대한 이해 없이 기계적으로 해결하는 부분에 대하여 정리학습지를 만들어 학생들에게 제공하고 보충 및 오답노트의 역할을 하도록 하였다. 정리학습지의 유용성과 정리학습지의 내용에 대하여 학생들의 반응 및 요구도를 설문지를 통해 조사하였다.

여기서 상(1등~100등), 중(101등~300등), 하(301등이상)로 구분하여 조사하였으며 아래 수치는 %이다.

2. 설문지 결과 분석

1) 정리학습지의 유용성 조사

1.정리학습지가 개념정리에 도움이 되십니까?

구 분 \ 성적수준	상	중	하
① 아주 도움이 된다.	63	27	9
② 도움이 된다.	24	47	53
③ 그저 그렇다.	7	19	31
④ 도움이 안된다.			5
⑤ 전혀 도움이 안된다.	5	7	2

2. 정리학습지가 필요하다고 생각 되십니까?

구 분 성적수준	상	중	하
① 아주 필요하다.	50	22	25
② 필요하다.	38	34	40
③ 그저 그렇다.	7	38	27
④ 필요 없다.	5	2	5
⑤ 더 혼란을 초래한다.		4	3

3.정리학습지를 통하여 애매하던 개념이 확실히 이해된 적이 있습니까?

구 분 성적수준	상	중	하
① 비슷한 문제비교가 개념이해를 확실히 해준 적이 많다.	50	20	64
② 가끔 있다.	25	74	24
③ 그저 그렇다.	15		10
④ 도움이 안 된다.	10	4	2
⑤ 더 혼란을 초래하고 있다.		2	

4. 가정에서 정리 학습지를 반복하여 학습하고 있습니까?

구 분 성적수준	상	중	하
① 많이 하는 편이다.	51	8	18
② 시험 전에 가끔 한다.	25	46	16
③ 두세 번 학습한 편이다.	2	33	46
④ 과제로 냈을 때 단 한번 학습했다.	9	13	12
⑤전혀 보지 안았다.	12		8

5.앞으로도 정리학습지를 배부하여 주기를 바라고 있습니까?

구 분 성적수준	상	중	하
① 계속하여 제공하기를 바란다.	63	34	25
② 학습지의 양을 적게 하여 간혹 주었으면 한다.	25	61	67
③ 별도움이 되지 않으니 주지 않았으면 좋겠다			3
④ 너무 어려워 수학에 대한 흥미를 잃게 만들므로 주지 않았으면 한다.	13	7	5

6. 학습지, 정리학습지 중에서 어떤 것이 더 필요하다고 생각하십니까?

구 분 성적수준	상	중	하
① 정리학습지가 더 필요하다	63	40	44
② 일반학습지가 더 필요하다.	13	21	46
③ 두 학습지의 비중이 비슷하다.	24	32	5
④ 학습지의 필요성을 못 느낀다.		7	5

① 개념정리에 도움이 되느냐의 질문에 가장 높게 나타난 문항의 비율은 상위층 학생들이 '아주 도움이 된다'에 63%, 중하위층학생들이 '조금 도움이 된다'가 50%이다.
② 필요함에 대한 질문은 '매우필요하다'에 상위권은50%, 중위권은 '그저 그렇다'에 38%로 가장 높고 하위층 학생은 필요하다 에 40%로 가장 높다. 그리고 '필요하다' 이상이 상위권은88%, 중위권 56%, 하위권은65%로 나타나 비교적 필요하다고 생각하고 있다.
③ '비슷한 문제 비교가 개념이해에 도움을 준다' 가 상위권, 하위권이 50%, 64%이고 중위권은20%이다. 중위권 학생들은 도움을 준 적이 가끔있다에 74%의 학생들이 응답하고 있다.
④가정에서 정리학습지를 공부하는 비중은 많이 하는 순서로 상위층, 중간층, 하위층 학생으로 순서이다.
⑤ 가정학습지의 제공여부는 현재처럼 계속적으로 제공해주기를 바라는 층은 상위권이고 중간층, 하위층은 학습지의 양을 줄여서 제공해주기를 바라고 있다.
⑥ 정리학습지와 일반학습지에 대한 선호도는 상위, 중간학생은 정리학습지가 더필요하다고 응답하였고 하위권학생은 일반학습지가 더 필요하다고 응답하였다.

정리학습지에 대해서 대부분의 학생들이 성적에 관계없이 긍정적인 평가를 내리고 있다.

하위층 학생들은 정리학습지보다 일반학습지에 대한 선호도가 조금 높은 정도이고 상위층 학생들은 정리학습지에 대한 선호도가 일반학습지에 비해 4배이상 높다. 그리고 정리학습지에 대한 효과는 상위층학생들에게 높게 나타났으며 비슷한 문제비교에 대한 효과도 상위층 학생에게서 높게 나타났다. 그러나 중간층 학생들에게는 깊은 영향을 주지 못하고 있고 '조금 도움을 준다' 가 높게 나타나고 있다. 이는 문제에 대한 부담으로 쉽게 접근하지 못하는 데서 연유하는 것이라 생각한다. 중하위층에 속하는 학생들은 학습지에 대한 부담이 높게 나타나고 있음을 정리 학습지의 양을 줄여주기를 바라는 데서 알 수 있다. 그리고 하위층 학생들은 정리학습지가 70%이상이 도움을 준다고 답하였지만 정리학습지 보다 일반학습지가 더 필요하다고 답하고 있다. 이는 쉽게 해결할 수 있는 기본적인 문제를 바라고 있는 현상이다. 평소에 수업을 진행해보면 상위층 학생들이 정리학습지에 대한 관심이 아주 높고 도전적으로 해결해보려는 적극성을 지니고 있다.

2) 학습지의 수준 및 관심도 조사

7. 정리 학습지의 내용이 여러분이 해결하기에 수준이 어느 정도라고 생각하십니까?

구 분 \ 성적수준	상	중	하
① 아주 어려운 편이다.	13	14	12
② 어려운 편이다.		20	53
③ 보통이다.	25	47	27
④ 쉬운 편이다.	52	19	3
⑤ 아주 쉬운 편이다.	10		5

8. 정리 학습지의 문제를 해결할 때 신중한 사고가 필요한 편입니까?

구 분 성적수준	상	중	하
① 다양하고 신중하게 해결해야 한다.	38	7	10
② 신중하게 풀지 않으면 실수를 하는 경우가 있다.	13	54	72
③ 답이 여러 개가 나오는 경우가 있어서 사고를 많이 하는 편이다.	16	24	8
④ 평소와 다름없이 해결하고 있다.	25	15	8
⑤ 쉬운 내용이라 단순히 사고해도 된다.	8		2

9.앞으로 정리학습지의 수준은 어느 정도로 하였으면 좋겠습니까?

구 분 성적수준	상	중	하
① 현재보다 더 어려웠으면 한다.	25	7	
② 현재수준을 유지했으면 한다.	54	62	37
③ 현재보다 조금 더 쉬워졌으면 한다.	6	27	55
④ 현보다 아주 더 쉬워졌으면 한다.	15	4	8

10. 학생은 다음 중에서 어느 편에 해당합니까?

구 분 성적수준	상	중	하
① 정리학습지 문제를 해결할 때가 가장 흥미롭다.	63	27	18
② 보충학습지 문제를 해결할 때가 가장 흥미롭다.	13	14	16
③ 교과서를 가지고 공부할 때가 가장 흥미롭다.	15	54	48
④ 그저 그렇다.	9		10
⑤ 수학시간 그 자체가 싫다.		5	8

11. 정리학습지의 내용 중에서 가장 좋은 내용은?

구 분 성적수준	상	중	하
① 중요한 내용에 대한 요약이 좋다.			
② 비슷한 문제비교가 개념정리에 도움을 주어 좋다.			
③ 많은 답을 요구하는 문제가 생각을 많이 하게 되어 좋다.			
④ 그저 그렇다.			

⑦ 상위권학생은 난이도가 보통 또는 그 이하라고 답한 학생이 87%, 중간, 하위그룹은 어려운 정도가 보통 또는 그 이상이다 가 81%, 92%로 나타났다.

⑧ ‘문제를 해결할 때 신중하게 풀거나 사고를 많이 한다 ’고 답한 학생이 상, 중, 하, 차례로 보면 67%, 85%,90% 로 나타났다.

⑨ 정리학습지의 수준이 현재 수준유지를 했으면 하는 바램이 상, 중에서 54 %. 62 %를 보였고 하위 층에서는 더 쉬워졌으며 하는 바램이 48 %로 가장 높았다.

⑩ 가장 흥미 있는 시간은 상위층학생은 정리학습지 풀이시간으로 63 %가 선택했으며 중하위층 학생은 교과시간으로 54 %, 48 %를 보이고 있다.

정리학습지에 대한 관심도 및 흥미는 상위그룹 학생들에게 높게 나타나고 있으며 중하위층 학생들은 수준을 좀더 쉽게 하기를 바라고 있다. 그리고 교과시간이 가장 흥미롭다고 답하고 있으며 정리학습지의 문제가 단순히 해결되지 않음에 스릴을 느끼는 것이 아니라 부담을 느끼고 있는 상황이다. 학생들에게 도전하고 싶은 상황설정이 되도록 문제의 짜임을 수준별로 만들 수 있다면 더욱 바람직하지 않은가 하는 생각이다.

VI 결론 및 제언

1. 결론

본 연구는 학생들에게 개념에 대한 이해를 분명히 하게 함으로써 혼란을 피하고 시간이 흘러도 한번 배운 내용에 대해서는 자신을 가지고 도전할 수 있는 자신감을 심어주고자 하는데 목적이 있다. 평소 학생들을 지도하면서 반복학습과 개념에 대해 유사문제를 비교하는 기회를 자주 부여함은 학생들의 문제 해결력을 높이는 데 중요한 역할을 하고 있음을 늘 느끼고 있다.

본 연구대상 학생들에게 정리학습 자료를 투여하고 반응을 조사한 결과 많은 학생들이 정리학습지의 중요성을 알고 있으며 정리학습지를 통하여 개념이해에 도움을 느끼고 있었다. 그 중에서도 상위그룹 학생들이 가장 높은 흥미와 관심을 가지고 정리학습지를 대하고 있었다. 중 하위 층 학생들은 쉽게 정답이 나오지 않아 부담을 가지고 있었지만 여러 개의 답을 요하는 문제를 풀 때마다 많은 사고를 하게 되므로 개념이해에 도움이 된다고 답하고 있다.

이해가 어려운 내용에 대해서 반복학습과 유사문제의 비교를 통하여 이해도를 높였을 때 방법만을 알고 문제에 임할 때의 혼란이 사라지고 보다 문제에 대한 응용력이 높아지며 자신감을 가지고 문제해결이 가능함을 알 수 있다.

학생들의 문제에 대한 맹점은 비슷하다. 오류를 보이는 부분이 대부분 공통적임을 알 수 있다. 이에 대해서는 특별한 지도과정이 필요하다. 좀더 나은 자료로 학생들이 개념정리를 확실히 할 수 있고 한 과정 과정마다 '왜'라는 질문에 정확한 답변을 할 수 있도록 가르친다면 문제 해결력은 현저히 높아지고 수학에 대하여 자신감은 길러지게 될 것이다.

본 연구 대상학교처럼 과외로 선수학습을 거의 95 %이상 해오고 있는 경우는 교과서의 기본적인 내용만을 수업한다면 수업시간이 별 의미 없이 지나칠 우려가 있다.

학생들도 흥미를 잃게 될 소지가 다분하다. 그리하여 수업시간에 소홀하게 응하여 수업분위기를 해칠 수도 있다. 간혹 자신의 알고 있는 내용이 극히 일부에 해당한다는 인식을 느끼게 하고 겸손한 자세로 수업에 임하도록 사고를 많이 해야 풀 수 있는 문제를 접하게 할 필요가 있다.

본 연구에서 보면 정리학습지를 통하여 자신이 잘 알고 있다고 자부하던 내용이 짧은 생각으로 틀리는 경험을 하게 되어서 좀더 신중한 사고를 할 수 있게 되었고 수업에 관심을 갖게 되었으며 개념에 대하여 깊이 있는 이해가 형성되었으며 정리학습지의 필요성을 80%이상의 학생들이 느끼고 있음을 알 수 있다.

오류에 대한 선행연구에서 이해의 오류가 가장 큰 비중을 차지하고 있음을 지적하고 있듯이 확실한 이해가 형성된다면 문제 해결력은 높아짐을 알 수 있다. 막연한 경험에 의한 문제풀이는 실패의 경험만을 하게되고 자신을 잃게 만든다.

학생들의 이해를 도울 수 있는 자료의 개발 및 수업방법 개선에 대한 연구가 꾸준히 이뤄져야 한다. 개념에 대한 확실한 이해가 이뤄진다면 어떤 유형의 문제이든 학생들은 자신감을 가지고 도전하게 되고 수학은 흥미로운 교과가 될 것이다.

2.제언

① 선수학습이 이뤄진 학생들에 대한 교수-학습방법에 대한 연구가 필요하다.

② 대다수의 학생들이 오류를 보이는 부분에 대한 꾸준한 지도자료의 개발이 필요하다.

③ 개념이해에 도움을 주기 위해서는 단순한 1개의 답을 요하는 문제보다 답이 많이 나오는 문제가 제시되어 깊이 있는 사고를 하도록 할 필요가 있다.

④ 하위권학생을 위한 도우미 학생의 역할이 필요하다.

⑤ 어려운 문제에 많은 비중을 두면 중하위권 학생들이 흥미를 잃고 포기할 우려가 있다.

⑥ 비슷한 문제에 대한 경험이 사고의 습관적인 경직성을 가져와 오류를 범할 확률이

높으므로 이에 대한 비교자료로 사고를 환기시킬 필요가 있다.
⑦ 능력은 있지만 스스로 노력을 하지 않은 학생은 개별적인 질문, 반복학습을 통해서도 여전히 개념정착이 어렵다, 하고자 하는 욕구를 심어줄 수 있는 교육프로그램 개발이 필요하다..
⑧ 생각할 수 있는 기회를 줄 수 있는 발문에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

[강행고 외 9인] 중학교 7-가 교사용 지도서 (주)중앙교육진흥연구소, 2003

[차승진] 문자와식 단원에서 학습능력에 따른 오류분석과 교정에 관한 연구

[박성익] 수업방법연구 , 서울:교육과학사,1996

[이용남] 교육방법 및 교육공학 서울: 교육과학사 , 1997

[신동선, 류희찬] 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사, 1998

[김웅이] 평면도형 구적능력 향상을 위한 구적연습의 오류분석과 지도

[정영옥]현실적 수학교육에 관하여, 1988

[조해영]중학교 수학의 대수 영역에서 발생하는 수학적 오류에 관한 연구(1학년, 1999)

[손영희] 수학적 개념지도에 관한 연구(2001.05)

[김용호]일차부등식의 해결과정에서 발생하는 오류유형분석(중학교 교육과정, 2001.02)

[디이즈・힐즈・엣지즈 공저] 학습심리학 서울:법문, 1987

[강옥기] 수학과 평가방법 그 이론과 실제 , 서울: 교학사, 1991

[박성태] 문제해결학습의 현장 적용에 관한 소고, 청람 수학교육 제4집, 1994

[Ellen D. Gagne] 인지심리와 교수-학습], 서울:교육과학사,1993

<Abstract>

Development of a Mathematical Comprehension Study Aid for the purpose of understanding concepts and applying formulas

Lee, In-Soon

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University

Jeju, Korea

Supervised by Professor Ko, Youn-Hee

In order for students to solve difficult mathematical problems in the areas of mathematics which they tend to have difficulties with, they need to fully and accurately understand the mathematical concepts, as well as be able to recognise the differences and the similarities between various mathematical problems.

The purpose of this thesis is to develop materials which are capable of assisting students to understand concepts through repeated and comparative learning. The rates of incorrect answers remain high in spite of ironing out the difficult concepts in certain questions. This highlight the need to develop materials, which play the role of a notebook, in which important records are made in correspondence with each incorrect answer.

Thereupon a mathematics comprehension study aid was developed and distributed to the students. At first, the students found the materials a burden and there was some concern that by presenting difficult questions to the students, they would lose self-confidence. However, other students expressed a huge interest and enthusiasm and requested that the mathematics comprehension study aid would continue to be provided.

Drawing on her twenty years experience as a teacher, the researcher was able to develop relevant content matter, based on data gauged from the questions which students were normally confused by or answered incorrectly. The students

were provided with the opportunity to do repeated learning on many occasions through the m.c.s.a. (mathematical comprehension study aid) and five months later, their responses were analyzed through questionnaires. More than seventy percent of the students gave a positive response on the m.c.s.a. while five percent and less gave a negative response, the reason given that the volume of the study materials was too much and the content matter was too difficult to organise.

Some students who were trying to dodge difficult and tough questions, lacked the determination to solve them and would have rather memorized simple techniques than draw logical conclusions from the content matter. This resulted in a loss of self-confidence in mathematics. Thus, better and more interesting materials need to be developed in order to improve their problem solving ability.

※ A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2003.

〈부록 I〉

정리 학습지 I

<집합의 표시법>

1. 원소나열법
2. 조건제시법 : 조건을 보여주는 법 {x | x의 조건}

(여기서 x 는 <u>원소)</u>

1) 6의 약수의 집합을 표현한 것중에서 잘못 된 것은? 그리고 그 이유는?

① { 1, 2, 3, 6 }
② {6, 12, 18......}
③ {x | x는 6의 약수}
④ {x | x는 6의 약수의 집합}

2) {1, 4, 7, 10,.........}를 조건제시법으로 나타낸 것 중에서 잘못된 것을 고르고 그 이유를 써라?

① {x | x는 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 자연수의 모임 }
② {x | x = 3n + 1 , n : 자연수 }
③ {x | x = 3n - 1 , n : 자연수 }
④ {x | x = 3n - 2 , n : 자연수 }
⑤ {x | x = 3n + 1 , n : 0, 자연수 }

3) 다음 중 무한집합을 있는데로 고르고 그이유를 써라

① {x | x = 3n + 1 , n : 100보다 작은 자연수 }
② {x | x = 3n + 1 }
③ {x | x = 3n + 1 , 1< n <10 }
④ {x | 1< x < 7 , x : 자연수 }
⑤ {x | 1< x < 7 }

4) 다음 중 공집합, 유한집합, 무한집합으로 구분하라

① {x | 1< x < 2 }
② {x | 1< x < 2 , x는 자연수 }
③ {x | x는 1보다 작은 양수 }
④ {Φ}

*) 수는 자연수로만 되어 있지 않다 (소수도 있다)

정리 학습지2

< 원소의 개수>

n(A) : A집합의 원소의 <u>개수</u> (결과는 0 또는 자연수)

1) 다음중에서 옳지 않은 것을 고르고 옳게 고쳐라

① n ({ Φ }) = 0

② n ({ 0 }) = 0

③ n (Φ) = 1

④ Φ = 0

⑤ { a, b, c } = 3

⑥ Φ= { 0 }

⑦ n ({x | 1< x < 2 }) = 0

⑧ $n(\{2\})=2$

2) 집합 $A=\{x \mid x\ 12$ 이하의 3의 배수$\}$이고 B 는 A의 부분집합이다. 이때, 다음을 구하시오.

(1) $n(B)=0$인 B를 모두 구하시오.

(2) $n(B)=2$인 B 를 모두 구하시오.

(3) A의 부분집합은 모두 몇 개인가?

3) 집합 A={1,2,3,4) 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것을 고르고 옳게 고쳐라?

① $\varnothing \in A$ ② $2 \subset A$ ③ $\{1,\ 3\} \subset A$

④ $3 \ni A$ ⑤ $\{2,\ 3,\ 4\} \in A$

4) 두 집합 $A=\{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $B=\{x \mid 1 \leq x \leq 15,\ x$는 3의 배수$\}$ 에 대하여 $n(A-B)$를 구하시오.

*) <u>n (집합) : 원소의 개수이므로 0또는 자연수와 같다.</u>

*) 집합A와 n(A)(= 0과 자연수)는 같을수가 없다. (Φ≠0)

*) 집합과 같은 것은 집합이어야 한다. (Φ= { })

정리 학습지3

< 부분집합>
집합B의 모든원소가 집합A에 속할 때
B를 A의 부분집합이라고 한다.
B는 A에 포함된다.
A는 B를 포함한다.
B는 A에 속한다
*) $\in$: 원소와 집합사이에 사용
$\subset$: 집합과 집합사이에 사용
< : 대소관계에 사용
*) 모든 경우에 큰쪽으로 향한다.

1)다음중 옳지 않은 것을 고르고 그 이유를 써라
① $\Phi \subset A$
② $\Phi \subset \Phi$
③ A = { 0, 1, 2, 3} 의 부분집합의 수는 16개이다.
④ $0 \in \Phi$
⑤ n({ 0, 1, 2 }) = 2
⑥ {1, 2}$\in$ { 0, 1, 2 }

2) A = {1,2,3,4,5} , B= { 4, 5, 6} 일 때 다음을 구하여라

① A의 부분집합 중에서 원소가 2개인 부분집합을 모두 구하면?

② A의 부분 집합 중에서 원소 4, 5를 포함하는 부분집합을 모두 구하면?

③ $(A\cap B)\subset X \subset A$를 만족하는 집합 X를 모두 구하면?

④ $(A\cap B)\cup X=X$, $A\cap X= X$를 만족하는 집합 X를 모두 구하면?

3) A = {1, 2, 4, 8 } 이고 $A\subset B$, $B\subset A$ 일 때 B를 조건제시법으로 나타내면?

정리 학습지4

*) 집합의 연산 *)다음집합을 조건제시법으로 써라 1) A∪B 2) A∩B 3) A-B 4) A^c *) 이거나, 또는 의 개념 생각하기 다음은 참인가 , 거짓인가? 결과에 대한 이유를 써라 ① 3≥2 ② 2≤2 ③ 3≤2 *) 집합에 나오는 공식 ① n(A∪B) = n(A) +n(B) - n(A∩B) ② n(A∩B) = n(A) +n(B) - n(A∪B) ③ n(A-B) = n(A) - n(A∩B) *)집합에 나오는 정리(벤다이어그램으로 확인할것) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $A - B = A \cap B^c$ 1) 다음 괄호 안에 알맞은 것을 넣어라 ① A-B=A- ( ) = (A∪B) - ( )= A∩( ) A^c∩B = (-) *) A∩ B^c = A - B 인 이유 생각하기 1) 벤다이어그램으로 확인하기 2) A-B = { x | x∈A 그리고 x∈B } = { x | x∈A 그리고 x∈□ } = A∩□ ② (A-B)∩(B-A) =( ) (A-B)∩(B∩A) =( ) (A-B)∩(B) =( ) *) x∈A 이면 x∈ A^c 이 된다.	

정리 학습지5

③ A- (A∪B) = (　　) A- U = (　　) (A∪B) - A = (　　) U - A = (　　) U - A^c= (　　) $(A^c)^c$ = (　　) ④ n(A - B) (　　) n(A) - n(B) n(A - B) = n(A) - n(　　) ⑤ A⊂B 일 때 A- B = (　　) A⊂B 일 때 A∩B = (　　) A⊂B 일 때 A∪B = (　　) 3) 우리 반 학생은 36명이다. 이중에서 형이 있는 학생이 15명, 누나가 있는 학생이 10 명이고, 형도 없고 누나도 없는 학생이15 명이다. ① 형 또는 누나가 있는 학생수는? ② 형과 누나가 있는 학생의 수를 구하시오. ③ 형만 있는 학생의 수는? ④ 형, 누나 중에서 한 명만 있는 학생 수는? 4) 집합 $A=\{2,\ 3,\ a\}$, $B=\{a-1,\ 4,\ 7\}$이고, $A\cap B=\{3,\ 4\}$일 때, A∪B의 값은 ? 5)다음중 옳은 것은? ① A=B 이면 n(A)=n(B) ② n(A)=n(B) 이면 A=B ③ A⊂B 이면 n(A)<n(B) ④ n(A)< n(B) 이면 A⊂B ⑤ A≠B 이면 n(A)≠n(B) *) A의 여(餘)집합 : A를 뺀 나머지 집합 *)餘: 나머지 여 ,塗(진흙 도) : 물이 여유로운 흙	

정리 학습지6

*) 약수와 배수

□÷△ = ○ ↔ □ : △ 의 배수, △: □의 약수

*) 나머지가 없어야 약수, 배수인 관계가 성립한다
(∴ 나머지를 빼거나 모자란 부분을 더하여 약수, 배수인 관계가 성립하도록 하여 문제를 해결해야 한다.)

16÷3=5・・・1 ↔ 16-1: 3의 배수, 16+2: 3의배수

$x \div 7 =$ 몫…5 ↔ $x-5$: 7의 배수, $x+2$: 7의 배수

★자연수의 성질

***) 소인수분해한 결과는 모두같다.(소인수 분해성질)**

*) 두수이상의 공약수는 그 수들의 **최대공약수의 약수**이다.(최대공약수성질)

*) 두수이상의 공배수는 그 수들의 **최소공배수의 배수**이다.(최소공배수성질)

*) 두수의 곱= 최대공약수×최소공배수

∵) $A=aG$ $B=bG$, a, b : 서로소, (G:최대공약수, L : 최소공배수)

$A \times B = aG \times bG = G \times abG = G \times L$

1) 6으로 나누면 5가 남고, 5로 나누면 4가 남고, 4로 나누면 3이 남는 가장 작은 자연수와 세자리 자연수중 가장 큰 수를 구하여라.

*) 세자리 자연수는 가장 작은 자연수의 배수가 되는 것이 아니다.

2) $\frac{11}{15}$, $4\frac{7}{12}$의 어느 것에 곱하여도 그 곱이 자연수가 되는 분수 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

3) 116을 나누면 6이 남는 수를 모두 구하면?

4) 116을 나누면 4가 남고, 174를 나누면 6이 남는 수를 모두 구하면?

*) 제수는 나머지보다 커야한다

정리 학습지7

5-1) 두 수 A, B가 있다. 곱은 3200이고, 최대공약수가 10일 때, 두 수를 구하면? 5-2)두수의 비가 2 : 3이고 최소공배수가 54일 때 두 수를 구하면? 6) $2^4 \times 3^2 \times 5$ 의 약수는 모두 몇 개인가? 7) 가로의 길이가 $12cm$, 세로의 길이가 $8cm$인 직사각형 모양의 타일을 자르지 않고 정사각형 모양의 벽에 빈틈없이 붙이려고 한다. 이 때, 타일은 최소한 몇 장이 필요한가? 그리고 이때 정사각형의 한 변의 길이는? 8) 가로의 길이가 $24cm$, 세로의 길이가 $36cm$, 높이가 $42cm$인 직육면체 모양의 상자에 최소한의 정육면체로 된 벽돌을 채우려고 한다. 최소 몇 개의 벽돌이 필요한가? 9) 108 에 가장 작은 자연수a를 곱하면 어떤 자연수b의 제곱이 된다. a+b의 값은? 10) 108 에 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게하는 자연수를 작은 수부터 5개를 구하여라 11) {x | x는 24의 약수} ∩{x | x는 42 약수} = {x | x는 □의 약수} 12) 24를 나누어도 42를 나누어도 나누어 떨어지는 수를 모두 구하면? 13) 252를 어떤 수 x로 나누어 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 가장 작은 자연수 x는? *) 가장작은자연수는 최소공배수, 가장큰 자연수는 최대공약수를 기계적으로 구하지 말고 이유를 생각하자	

정리 학습지8

*) 이진법의수는 왜,십진법의 수를 2로 나누어 나머지를 거꾸로 읽어야 하는 걸까? *) 이진법의 전개식을 계산하면 십진법의 수가 되고 각자리수를 자리값이 높은 차례로 쓰면 이진법의 수가 된다. ex) $2^5 + 2^2 = 100100_{(2)}$: 이진법의 수 $2^5 + 2^2 = 36$: 십진법의수 *) 십진법의수, 이진법의수 표기는 비슷하다. $10^5 = 100000$ $2^5 = 100000_{(2)}$ 1) $2^5 < N < 2^6$을 만족하는 N을 이진법의 수로 나타내면 몇 자리의 수가 되는가? 2) 여섯 자리수의 이진법의수는 몇 개인가? 3) $(11_{(2)})^3$의 값과 다른 것은? ① $3\times3\times3$ ② $11_{(2)}\times11_{(2)}\times11_{(2)}$ ③ $3_{(5)}\times3_{(5)}\times3_{(5)}$ ④ $(3_{(5)})^3$ ⑤ 33 4) 다음 중 옳은 것은? ① $100_{(2)}$보다 1 작은 수는 $99_{(2)}$이다. ② $100_{(2)}$보다 1 작은 수는 $11_{(2)}$이다. ③ $100_{(2)}$보다 1 큰 수는 5이다. ④ 2^5보다 1 큰 수는$100001_{(2)}$ 이다. ⑤ $3_{(5)}$의 값과 3의 값은 다르다.	ex) $15 = a\times2^3 + b\times2^2 + c\times2 + d$ (a,b,c,d: 0 또는1) 15를 이진법의 전개식으로 써서 이진법의 전개식을 2로 나누면 첫 번째 나눈 나머지가 d, 두 번째 나눈 나머지가 c, 세 번째 나눈 나머지가 b, 네 번째 나눈 나머지가 a임을 알수 있다. ∴ 2로 나눈 나머지를 거꾸로 읽으면 이진법의 수가 된다.

정리 학습지9

*)유리수: 분자, 분모가 정수인 분수로 나타낼 수 있는수 (분모≠0) 1. 유리수의 집합을 조건제시법으로 나타내면? 2 다음 방정식을 풀면? (분모가 0인 수를 정할 수 없음을 생각해보고 0으로 나눌 수 없음을 기억하자) ① 2x = 0 ② 0・x = 2 ③ 0・x = 0 *) 위에서 분모가 0인 수를 표현할 수 없음을 생각하자 3. 0은 유리수인가? 유리수라면 그 이유는? 4. 유리수를 분류하면? 5. $\|a\|=5$, $\|b\|=8$일 때 $a+b$의 값 중 가장 작은 값은? 6. $a>0$, $b<0$일 때, a, b, $a+b$, $a-b$ 를 크기가 큰순으로 써라. 7. 다음중 옳지 않은 것을 고르고 이유를 써라 ① 0은 양의 정수도 음의 정수도 아니다. ② 수직선 위에서 음의 정수는 항상 원점보다 왼쪽에 있다. ③ 유리수는 양의 유리수와 음의 유리수로 되어 있다. ④ 유리수란 분자가 정수이고 분모는 0이 아닌 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수이다. ⑤ 서로 다른 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 존재한다. ⑥ 두 정수에서 절대값이 큰 수가 항상 크다.	

정리 학습지10

*) $x\% = \frac{x}{100} = \frac{1}{100}x = 0.01x$, $x\% \neq 0.0x$ x할 = $\frac{x}{10}$ = $0.1x \neq 0.x$ *) $1\times a = a$, $-1\times a = -a$ $0.1\times a \neq 0.a$ $0.1\times a = 0.1a = \frac{a}{10}$ 1) 다음을 괄호 안의 단위로 나타내어라 1) x할 y푼 (할) 2) x% 소금물 y g 속의 소금의 양 2) a%의 소금물 $200g$과 b%의 소금물 $400g$을 섞었을 때, 소금의 양을 구하시오. 3) $3\times(x+y)-a\div(x-y)$를 ×, ÷를 생략하여 나타내면? 4) 길이가 $x$cm인 노끈에서 $y$cm인 노끈 a개를 끊어 낸 나머지의 길이를 구하시오. 5) 정가가 a원인 물건을 30% 할인하여 구입할 때, 지불할 금액을 식으로 나타내면? 6) 1000원으로 3자루에 a원 하는 연필 x자루를 사고 남은 돈을 식으로 나타내시오. 7) 재성이는 버스를 타고 3개의 정류장을 거쳐 친구와 약속한 정류장에 도착했다. 버스를 탄 거리는 $a$km이고 버스의 속력은 시속 40km였다. 한 정류장에서 b분씩 머물렀다고 할 때, 재성이가 약속 장소에 도착할 때까지 걸린 시간을 식으로 나타내시오.	

정리 학습지II

1. 이항이란 무엇인가?

2. 이항할 때 부호가 바뀐다. 그 이유는?

3. 다음 중에서 이항이 아닌 것이 있는가?
 있으면 골라보고 그 이유를 생각해보자

① $1-2x = 3-x \rightarrow -2x + x = 3 - 1$
② $-2x = 4 \rightarrow x = -2$
③ $1-2x = 3 \rightarrow -2x = 3 - 1$
④ $x-2x = 3 \rightarrow -2x + x = 3$

4. 다음과정에서 양변에 한 행위에 대해서 기술해보자

$1-2x = 3-x \rightarrow -2x + x = 3 - 1$

5. 교환과 이항의 차이점은 무엇인가?

6. 다음중에서 옳지 않은 것을 고르고 그 이유를 써라

① $a + c = b + c$ 이면 $a = b$
② $a = b$ 이면 $ac = bc$
③ $ac = bc$ 이면 $a = b$
④ $a = b$ 이면 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
⑤ $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ 이면 $a = b$

6. 다음중에서 옳은 것은?
① 절대값이 가장 적은 정수는 1이다.
② a가 음수일 때 a의 절대값은 a이다.
③ $a>b$ 이면 a의 절대값이 b의 절대값보다 크다.
④ $a<b<0$ 이면 a의 절대값이 b의 절대값보다 크다.
⑤ a가 유리수일 때 절대값이 a인 수는 항상 2개이다.
⑥ a가 양의 유리수일 때 절대값이 a인 수는 항상 2개이다.

정리 학습지12

2) 방정식○표, 항등식△, 방정식도 항등식도
  아닌 것은 ×표하고 문제를 풀어라

① 1 - x = x - 1
② 1 - x =- x - 1
③ 1 - x =- x +1
④ 1 - x = x + 1
⑤ 1 - x = x - (2x - 1)

3) $\frac{3x+1}{2}-\frac{4x-2}{3}+\frac{x+5}{4}$ 를 간단히 하라

4) $\frac{3x+1}{2}-\frac{4x-2}{3}+\frac{x+5}{4}=-1$ 를 풀어라

5) x가 {-1, 0, 1 }의 원소일 때
$\frac{3x+1}{2}-\frac{4x-2}{3}+\frac{x+5}{4}=-1$ 를 풀어라

6) $(-1)-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{3^2}\right)$를 계산하면?

10) $(-1)-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\div(\quad) = -3$
  일 때 (   )의 값은?

11) $3x-2[5-\{-2x-4(1-3x)\}]=x$ 를 풀어라

12) $3x-2[5-\{-2x-4(1-3x)\}]$를 간단히 하라

*) 등식의 성질의 활용은 등식일 때만 가능하다
일차식(간단히하라) 일차방정식(등식, 풀어라)차이를 인식하자

정리 학습지13

농도(%)= $\frac{용질}{용액}\times 100 \leftrightarrow$ 용질=용액× $\frac{농도}{100}$ 1. 10%의 소금물200g에 몇g의 소금을 섞으면 15%의 소금물이 될까? 2. 10%의 소금물200g에 몇g의 물을 섞으면 5%의 소금물이 될까? 3. 10%의 소금물200g에 몇g의 물을 증발시키면 15%의 소금물이 될까? 4. 10%의 소금물200g에 18% 소금물 몇g을 섞으면 15%의 소금물이 될까? 5. 10%의 소금물200g에 몇% 소금물 100g을 섞으면 15%의 소금물이 될까? 6. 10%의 소금물200g에 몇% 소금물 100g을 섞으면 8%의 소금물이 될까? 7. 10%의 소금물 몇g에 4% 소금물을 섞으면 8%의 소금물 300g이 될까? 8. 두 지점 A, B사이를 자동차로 왕복하는데, 갈 때에는 시속 40km로 가고, 올 때에는 시속 50km로 와서 2시간 걸렸다. A, B사이의 거리는 몇 km인가? *) 농도 문제는 용질의 양을 비교하여 풀어보자 농도를 비교하여 풀어도 보자	

<부록2>

설문지

이 설문지는 여러분의 학습에 도움을 주기 위하여 여러분의 솔직한 생각을 알아보고자 하는 것입니다. 아래의 질문에 진솔한 답변을 부탁바랍니다.

1. 학생의 성적수준은 어느 정도 입니까?

① 상위권(100등 이내) ② 중위권(100~300등) ③ 하위권(300등 이상)

정리학습지의 유용성에 대한 조사

1. 정리학습지가 개념정리에 도움이 되십니까?

①아주 도움이 된다. ② 도움이 된다. ③그저 그렇다
④도움이 안 된다. ⑤ 전혀 도움이 안 된다.

2. 정리학습지가 필요하다고 생각되십니까?

① 아주 필요하다 ②필요하다 ③그저 그렇다
④필요 없다 ⑤더 혼란을 초래하고 있다.

3. 정리 학습지를 통하여 애매하던 개념이 확실히 이해된 적이 있습니까?

① 비슷한 문제비교가 개념이해를 확실히 해준 적이 아주 많다.
② 가끔 있다. ③ 그저 그렇다 ④별로 도움이 안 된다 ⑤ 더 혼란을 초래하고 있다.

4. 가정에서 정리 학습지를 반복하여 학습하고 있습니까?

① 많이 하는 편이다. ② 시험 보기 전 가끔 한다. ③한 두 번 학습한 편이다
④ 과제로 냈을 때 단 한번 학습했다. ⑤ 전혀 보지 않았다.

5. 앞으로도 정리 학습지를 배부하여 주기를 바라고 있습니까?

① 계속하여 제공하기를 바란다. ②학습지의 양을 적게 하여 간혹 주었으면 좋겠다.
③ 별 도움이 되지 않으니 주지 않았으면 좋겠다.
④ 너무 어려운 내용이라 수학에 대한 흥미를 잃게 만들고 있으므로 주지 않았으면 한다.

6. 학습지, 정리 학습지 중에서 어느 것이 더 필요하다고 생각하십니까?

① 정리학습지가 더 필요하다. ② 일반학습지가 더 필요하다.
③ 두 학습지의 비중이 비슷하다. ④ 학습지의 필요성을 못 느낀다.
정리학습지의 수준 및 관심도 조사

7. 정리 학습지의 내용이 여러분이뇨 해결하기에 수준이 어느 정도라고 생각하십니까?

① 아주 어려운 편이다. ②어려운 편이다. ③보통이다. ④쉬운 편이다. ⑤아주 쉬운 편이다.

8. 정리 학습지의 문제를 해결할 때 신중한 사고가 필요한 편입니까?

① 다양하고 신중하게 해결해야하는 편이다.
② 신중하게 하지 않으면 실수를 하는 경우가 있다.
③ 답이 여러 개가 나오는 경우가 많아서 사고를 많이 하는 편이다.
④ 평소와 다름없이 해결하고 있다.
⑤ 아주 쉬워서 단순히 사고해도 된다.

9. 앞으로 정리 학습지의 수준을 어떤 수준으로 변형하였으면 좋겠습니까?

① 현재수준보다 더 어려웠으면 한다. ② 현재 수준을 유지하면 좋겠다.
③ 현재보다 조금 쉬워졌으면 한다. ④ 현재보다 아주 쉬워졌으면 한다.

10. 학생은 다음 중에서 어느 편에 해당합니까?

① 정리 학습지의 문제를 풀 때가 가장 흥미가 있다.
② 보충 학습지를 풀 때가 가 장 흥미 있다.
③ 교과서 내용을 공부할 때가 가장 흥미 있다.
④ 수학시간 그 자체가 싫다.
⑤ 수업내용에 대한 의욕이 없고 졸린다.