碩士學位論文

Spreadsheet를 活用한 상수 e의 計算 比較

指導敎授 金 鐵 洙

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

梁 榮 根

2000年 8月

Spreadsheet를 活用한 상수 e의 計算 比較

洙導敎授　金　鐵　洙

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2000年　5月　　日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者　梁　榮　根

梁榮根의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

2000年　7月　　日

審査委員長	印
審 査 委 員	印
審 査 委 員	印

Spreadsheet를 活用한 상수 e의 計算 比較

梁 榮 根

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 金 鐵 洙

이 논문은 수학적으로는 중요한 상수 e 가 일선 고등학교 현장에서는 내용 자체가 부족하여 소홀히 다루어지고 있는 부분을 컴퓨터를 이용하여 지도하고자 다음과 같이 정리하였다.

우선 상수 e 를 지도함에 있어서 상수 e 가 등장하게 되는 역사적인 배경을 수학사적 관점에서 요약하고, 극한으로 정의되어진 상수 e 의 존재성과 상수 e 가 무한급수를 사용해서도 표현될 수 있음을 보이고 이를 이용하여 상수 e 가 무리수임을 증명하였다.

아울러 무리수의 구체적인 값을 계산할 수 있는 몇 가지 접근법을 발췌하여 소개하고, 그 접근법들에 대하여 엑셀 스프레드쉬트를 활용하여 값을 계산하는 방법을 제시하고 직접 계산한 값들을 관찰, 비교하여 그래프로 제시하였다.

마지막으로 교육현장에서 가장 효율적으로 지도할 수 있는 방법을 찾아 활용함으로써 학생들로 하여금 상수 e 에 대한 이해와 접근을 쉽게 할 수 있도록 하는데 도움을 주고자 하였다.*

* 본 논문은 2000년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목　　차

표 목 차

그 림 목 차

I. 서 론

고등학교 2, 3학년이 되면 특별한 함수(예를 들면 초월함수)를 접하게 되는데 지수함수라 하는 $y=e^x$와 그 역함수로 자연로그라 하는 $y=\ln x$의 두 함수이다. 미적분을 공부하면서부터 지수함수를 미분하거나 적분하면 자신의 함수가 되고, 로그함수를 미분하면 $y = \dfrac{1}{x}$ 이 되는 사실을 접할 수 있고 이를 1에서부터 e 까지 정적분을 하면 $\int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$ 가 된다는 신기한 사실을 알 수 있다. 이러한 사실들은 상수 e 가 어떤 수인가? 하는 의문을 낳기에 충분하다

수학자들이 신비로운 수 e 에 대하여 흥미를 가지고 e 에 대한 이야기와 지식을 사용하여 삼각함수, 해석학, 미분방정식, 기하학, 대수학, 통계학 등 무수히 많은 서로 다른 수학 분야에서의 다양한 수학적 관계를 발견하였다는 것은 대단히 놀라운 일이라고 할 수 있을 것이다.

이런 수학적 중요성에 비추어 현재 고등학교 과정에서 배우는 <수학II> 교과서에 나타나는 수 e 에 대한 설명을 보면 다음과 같다.

『 함수 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$에 대하여 x가 0에 한없이 가까워질 때의 극한값

즉 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값에 대하여 알아보자.

오른쪽 표는

$x = 1, \pm 0.01, \pm 0.001, \cdots$

에 대한 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 의 값을 구한 것이다 이 표에서 x의 값이 0에 가까워짐에 따라 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값이 어떤 수에 수렴하고 있음을 짐작할 수 있다.

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
1	2.0
0.01	2.7048⋯
0.001	2 7169⋯
0.0001	2 7181⋯
0.00001	2 7182⋯
⋯	⋯
-0.00001	2 7182⋯
-0.0001	2.7184⋯
-0 001	2.7196⋯
-0 01	2.7319⋯

실제로 $x \to 0$ 일 때 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 의 극한값이 존재한다는 것이 알려져 있으며 이 극한값을

$$e$$

로 나타낸다. e 는 무리수로서 그 값은 다음과 같음이 알려져 있다

$$e = 2.71828182845\cdots$$

e 의 정의

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

위의 e 의 $\frac{1}{x} = z$ 로 놓으면, $x \to 0$ 일 때 $z \to \infty$ 이므로, e 는 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\lim_{z \to \infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e$$ 」[1)]

따라서 자연수 n 에 대하여 $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 로 사용되고 있으나 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 의 수렴 여부를 조사하지도 않고 이 수열의 극한값을 e 로 정의하고 있다. 또한 n 이 변화에 따라 극한값이 어떻게 되는가, e 가 구체적으로 어떤 수인가에 대하여도, 어떻게 계산하는 것이 좋은가에 대한 언급이 없거나 충분하지 못하여 이해를 돕는데 부족한 점이 많다

정보화 사회에서 첨단 기술을 수학 교육에 도입하여 창의적이고 생동하는 과학 기술 현장에서 이용할 수 있는 것이 되도록 교과내용과 교육방법을 개혁해야 한다는 시대적 요청이 전문가들 사이에 꾸준히 제기되고 있다 미국의 경우 수학교육에 실험수학적인 방법을 도입하여 교육의 질을 높일 것을 추구하고 있다. 또

1) 이홍천(1996), 「수학II」, 두산동아, p.190

한 수학교육이 교실에서만 이뤄지는 것이 아니라 on-line을 통해 집에서도 이뤄질 수 있는 환경으로 바뀌어 가고 있고, 학생들도 통신망을 통해서 방과후에도 숙제하다 궁금한 사항 등을 교사에게 물어볼 수 있는 전자메일 기능의 활성화로 인해 수학교육의 내용에 변화가 필요한 시점이다.

이 논문은 이러한 관점에서 탐구 활동을 수학교육에 도입하는 실험수학적 활동을 통해 수학교육의 내용과 방법에 변화를 모색하고자 하는 데 있다. 따라서 미분과 적분의 과목 수업 시에 e 의 무한급수를 이용한 정의의 소개와 더불어 직접 e 의 구체적인 값을 계산하기 위한 실험수학적 방법을 통해 관찰, 비교함으로써 무리수로써 e 의 이해뿐만 아니라 나아가 복소수 영역에서 밑을 e 로 사용하는 지수함수와 로그함수 및 삼각함수 사이의 관계 등의 이해를 가능하게 하고, 통계에서 나타나는 정규분포 곡선에서도 e 가 사용되는 확률밀도함수 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 를 이해할 수 있는데 도움이 되리라고 생각한다.

이에 본 논문에서는 II 장에서 e 가 등장하게 된 역사적 배경을 소개하고, III 장에서는 e 의 극한의 정의와 무한급수의 정의 사이의 관계를 설명, 무리수임을 증명하고, IV장에서는 e 를 구체적으로 계산할 수 있는 몇 가지 접근법들을 소개하였다. V장에서는 소개된 접근법들을 실험하고 관찰, 비교하기 위해 엑셀의 스프레드쉬트(Spreadsheet)를 이용하여 e 의 값을 계산하는 방법을 제시하고, VI 장에서는 쉬트상에서 계산된 e 의 값의 결과를 비교하고 효율적인 지도방법을 언급하고, 마지막으로 VII장에서 결론을 제시하였다.

Ⅱ. 상수 e 등장의 역사적 배경

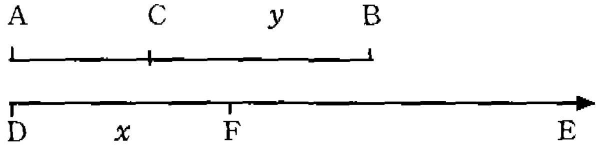
16세기의 독일의 수학자 미카엘 쉬티펠(Michael Stifel, 1487-1567)은 1544년에 출간된 「산술총서, Arithmetica Integra」에서 등차수열과 등비수열을 연관시키는 이점을 지적하면서

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

이라는 지수법칙을 기술하였는데 이것이 바로 거의 한 세기 뒤의 로그(logarithm) 발명의 전조를 보여 주었다

이를 바탕으로 하여 소수를 발견한 네델란드의 공학자 시몬 스테빈(Simon Stevin, 1548~1620)은 지수기호법을 발견하고 1584년에 프랑드르어로(후에 프랑스어)로 복리표를 간행하여 유스트 뷔르기(Jobst Bürgi, 1552-1632)에 영향을 주었다

삼각법에 관심을 두고 있던 존 네이피어(John Napier, 1550-1617)는 1614년에 로그에 관한 논문을 「놀라운 로그 체계의 기술, Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio」이라는 제목을 달아 소책자로 발간하였는데, 그 책에서 로그를 다음과 같이 정의하였다.



<그림 II-1>

<그림 II-1>에서와 같이 선분 AB 와 반직선 DE 를 생각하자. 점 C 와 F 가 동시에 A와 D 로부터 출발하여 각각의 선을 따라 같은 초속으로 움직인다고 하자 C 는 항상 CB의 거리와 수치상으로 같은 속도로 움직이고, F 는 일정한 속도로 움직인다고 가정하자. 네이피어는 DF 를 CB 의 로그로 정의했

다. 즉 $DF = x$, $CB = y$ 라 놓으면,

$$x = \text{Nap} \log y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{y}{10^7} \right)$$

분수의 번거로움을 피하기 위해 네이피어는 AB 의 길이를 10^7 으로 택했다. 이것은 그가 이용할 수 있는 가장 좋은 사인표가 일곱 자리까지 나타낸 것이기 때문이다. 따라서 자주 언급하는 '네이피어 로그는 자연로그이다.'는 말은 실제로 전혀 근거가 없다 네이피어 로그는 자연로그와는 반대로 진수가 증가함에 따라 감소하는 것임을 알 수 있다.

네이피어는 발간한 소책자에 분 단위의 각 각에 대한 사인의 로그값을 계산한 표가 실려 있는데, 이 때 사용한 로그의 밑이

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

이다. 실제로 이 밑의 값은 $\frac{1}{e}$ 의 근사값이 된다[2)]

네이피어가 그의 결과를 세상에 발표하였던 6년 후인 1620년에 스테빈의 복리표를 바탕으로 독자적인 로그표를 발간한 뷔르기는 새롭게 로그를 정의하였는데 그의 정의는 다음과 같다.

만약 양의 정수 N 이

$$N = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^L$$

으로 표현되었다면, $10L$(오히려 L보다는)을 "로그" 라고 불렀다. 이 때 사용한 로그의 밑

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^L$$

의 값은 $L = 10000$일 때 e 의 근사값인 2.718146이 된다.

네이피어와 뷔르기 모두 발표하기 전에 오랫동안 로그의 개념을 연구하였지만 네이피어가 먼저 그 생각을 했었다고 일반적으로 믿고 있다. 네이피어의 접근방

---

2)Howard Evas(1964). An Introduction to the History of Mathematics. Rpt. Philadelphia: Saunders Collage Publishing,1983, 신항균외 역,p273-4

법이 기하학적인 반면에 뷔르기의 접근방법은 대수적이었다. 오늘날에는 일반적으로 로그를 지수로 간주한다 즉 $a = b^x$ 이면 x 는 b 를 밑으로 하는 a 의 로그라고 한다. 이 정의에 의하면 로그의 법칙들은 지수의 법칙으로부터 바로 얻어진다.

이렇게 로그가 발견됨에 따라 상수 e = 2.718281… 도 자연스럽게 등장하기 시작하였는데 이를 최초로 문자로 쓰기 시작한 사람은 고오트프라이드 빌헬름 라이브니츠(Gottfried Wilherm Libniz, 1646-1716)로 1690년과 1691년에 물리학자인 크리스찬 호이겐스(Christian Huygens, 1629-1695)에게 보낸 편지 속에 영문자 b 로 나타내었고, 후에 레오나르드 오일러(Leonhard Euler, 1707-1783)에 의해서 영문자 e 로 표기되었는데, 그는 러시아 페테르부르크의 궁정 시절 그의 나이 스물 한 살 때에 「대포의 점화에 대해서 최근 이루어진 실험에 관하여, Meditatio in Experimenta explosion tormentorum nuper instituta」라는 논문에서 다음과 같이 제안하고 있다.

"그 로그가 1인 수를 e 라 적기로 하자. 이 수는 2.7182818…이고 10을 밑으로 하는 e 의 로그는 0.4342944…이다."

그리고 1731년 11월 25일 골드바흐(Goldbach, 1690-1764)에게 보낸 편지에서도 e 가 나타나는 것을 볼 수 있다.

"e 는 쌍곡 로그(hyperbolic logarithm)값이 1인 수를 나타낸다."[3)]

오일러가 이 문자를 택한 이유는 지수(exponential)의 첫 글자이기 때문이라고도 하고 자신의 이름의 첫 글자이기 때문이라고 하지만 그 후 많은 사람들은 e = 2.7182817…이라는 수를 오일러 상수 또는 네이피어 상수라고 불러주기도 하였다. 오일러는 자연로그의 밑 e 를 소수점이하 23자리까지나 계산하였는데 그 값은 e = 2.71828182845904523536028 이다

3)Eli Maor(1994) e : The Story of a Number. Princeton University Press p.156

Ⅲ. 상수 e의 정의와 간단한 성질

실수 R 의 공집합이 아닌 부분집합 X 가 모든 점 $x \in X$ 에 대하여 실수 a 가 존재하여 $x \leqq a$ 를 만족하면 이면 **위로 유계**(bounded above)라 하며, $x \geqq a$ 을 만족하면 **아래로 유계**(bounded below)라고 한다. 이 때 실수 a 를 **상계**(upper bound) 또는 **하계**(lower bound)라고 각각 부르고 상계 a 가 부분집합 X 의 다른 상계 b 에 대하여 $a \leqq b$ 를 만족하면 **상한**(least upper bound) 또는 **최소상계**(supremum ; sup), 하계 a 가 부분집합 X 의 다른 하계 b 에 대하여 $b \leqq a$ 를 만족하면 **하한**(greatest lower bound) 또는 **최대하계**(infimum ; inf)라고 한다

수열 $\{a_n\}$ 이 $m < n$ 일 때 $a_m \leqq a_n$ 을 만족하면 **단조증가수열**(monotonic incresing sequence), $m < n$ 일 때 $a_m \geqq a_n$ 을 만족하면 **단조감소수열**(monotonic decresing sequence)이라고 한다.

〔정리 1.〕 단조수열 $\{a_n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $\{a_n\}$이 유계이다.

【증명】 $\{a_n\}$을 증가수열이라고 하자(감소수열에 대해서도 비슷하게 증명할 수 있다.) 만약 $\{a_n\}$이 수렴한다고 하자. 즉, $\lim_{n \to \infty} a_n = L$이라고 하고 $\varepsilon = 1$ 이라고 하자. 그리면 양의 정수 N 이 존재하여 모든 $n \geqq N$ 에 대해서

$$|a_n - L| < 1$$

이다. 그러므로 만약 $n \geqq N$ 이면

$$|a_n| \leqq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$$

이고, 만약 $n < N$ 이면

$$|a_n| \leqq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|\}$$

이다. 따라서 만약 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|\}$ 이라 두면, 모든 양의 정수 n 에 대해서 $|a_n| \leqq M$ 이다. 그러므로 $\{a_n\}$ 은 유계이다.

역으로 $\{a_n\}$ 이 유계라고 하면, 상한 공리에 의하여 집합 $X = \{a_n \mid n$은 자연수$\}$는 상한 L 을 갖는다. $\varepsilon > 0$ 이라고 하면 $L-\varepsilon$ 은 X 의 상한이 아니므로, 양의 정수 N 이 존재하여 $L-\varepsilon < a_N$ 을 만족한다. $\{a_n\}$ 이 증가이므로, 만약 $n \geqq N$ 이면 $a_n \geqq a_N$ 이다. 따라서 모든 $n \geqq N$ 에 대하여

$$L-\varepsilon < a_N \leqq a_n \leqq L < L+\varepsilon$$

이다. 그러므로 $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n = L$ 이다. ■

[정리 2.] 수 a, b 에 대하여 $0 \leqq a < b$ 라고 하면

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$$

이다.

【증명】 $0 \leqq a < b$ 이면

$$\begin{aligned}\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} &= b^n + ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + \cdots + a^{n-1}b + a^n \\ &< b^n + bb^{n-1} + b^2b^{n-2} + \cdots + b^{n-1}b + b^n \\ &= (n+1)b^n\end{aligned}$$

이다. ■

[정리 3.] 수열 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 은 증가하고 수렴한다

【증명】 위의 정리2로부터 부등식을 다시 쓰면

$$b^n[b-(n+1)(b-a)] < a^{n+1}$$

이다. 만약 $a = 1+\dfrac{1}{n+1}$, $b = 1+\dfrac{1}{n}$이라 두면, 괄호안은 1 이 되고

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

임을 알 수 있다.

다음 만약 $a = 1$, $b = 1+\dfrac{1}{2n}$이라 두면, 괄호안은 $\dfrac{1}{2}$이 되고

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} < 2$$

이다. 따라서

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

이고, $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 이 증가수열이므로 모든 양의 정수 n 에 대해서

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

이다. 그러므로 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 은 증가수열이고 4에 의하여 위로 유계이다. 따라서 정리 1에 의하여 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$는 수렴한다. ■

위의 정리로부터 모든 양의 정수 n 에 대하여 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} < 4$ 이고, $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 이 증가수열이고 $n = 1$ 일 때 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = 2$ 이므로 모든 양의 정수 n 에 대하여 $2 \leq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} < 4$ 이다.

따라서 다음과 같이 고등학교 과정에 나오는 상수 e 의 정의를 만들 수 있다.

[정의 1.] $\lim_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$

위의 정의를 사용하여 급수로 표현되는 상수 e 를 증명하여 보자.

[정리 4.] $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

【증명】 $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $T_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 이라고 놓자,

이항정리에 의하여

$$T_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

이므로 $T_n \leqq S_n$ 이 된다 따라서 $e = \lim_{n\to\infty} T_n \leqq \lim_{n\to\infty} S_n$

다음으로 $n \geqq m$ 인 모든 $n, m \in N$ 에 대하여

$$T_n \geqq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

이 성립하므로 m을 고정시키고 $n \to \infty$이면

$$\lim_{n\to\infty} T_n \geqq \lim_{n\to\infty}\left[1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right] = S_n$$

이 된다. 따라서 모든 $m \in N$ 에 대하여 $S_m \leqq \lim_{n\to\infty} T_n$ 이므로

$$\lim_{m\to\infty} S_m = sup\{S_m\} \leqq \lim_{n\to\infty} T_n = e$$

을 얻는다. 그러므로

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

가 된다.■

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots, \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

의 부분합 수열 S_n 은

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

이므로 단조증가수열이면서 위로 유계이다. 따라서 수렴한다.

급수의 수렴속도는 다음과 같이 평가된다

$$e - S_n = \frac{1}{(n+1)!} 1 + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{n+3} + \cdots \right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{n \times n!}$$

따라서

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n \times n!}$$

이다.

〔정리 5.〕 상수 e 는 무리수이다.

【증명】 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ ①

를 유리수라고 가정하자 그러면

$$e = \frac{q}{p} \qquad (\text{단, } p,\ q\text{는 서로소 } p \neq 0)$$

그런데 e 는 정수가 아니므로 $p \geq 2$ 라고 할 수 있다. ①의 양변에 $p!$ 을 곱

하면

$$p!e = p!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right) \qquad ②$$

$$= p!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{p!}\right)$$

$$+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots$$

$e = \frac{q}{p}$ 이므로 $pe = q$

우변의 q 는 정수이므로 좌변 pe 도 정수이다. 그러므로 ②의 좌변 $p!e$ 도 정수이다. 또 ②의 우변중에서

$$p!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{p!}\right)$$

도 정수이다. 그런데

$p+1<p+2<p+3<\cdots$ 이므로

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots < \frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}+\cdots$$

$$= \frac{1}{p+1}\times\frac{1}{1-\frac{1}{p+1}}$$

$$= \frac{p+1}{p(p+1)}$$

$$= \frac{1}{p}$$

그런데 $p \geqq 2$ 인 정수이므로 $\frac{1}{p}$ 은 정수가 아니다.

곧, 좌변 $p!e$ 는 정수이고, 우변의 $p!\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}$ 도 정수이지만

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots < \frac{1}{p}$$

에서

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \cdots$$

은 정수가 아니므로 ②는 모순이다. 따라서 e 는 무리수이다 ■

앞으로 전개되는데 사용된 몇 개의 용어를 보면 다음과 같다.

○<지수함수> 실수의 집합 R 에서 R 의 부분집합 $(0, \infty)$으로의 함수 $f: R \to (0, \infty)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

을 **지수함수**라고 하고 기호로 $\exp(x) = e^x$ 로 나타낸다.

○<로그함수> 지수함수의 역함수를 **로그함수**라 하고 기호로 $f(x) = \ln x$ 로 나타낸다.

○<상대오차> 오차가 생겼을 때, 그 오차의 절대값의 참값에 대한 비율을 **상대오차**라고 한다. 참값 A에 대한 근사값을 a라 할 때, $a-A=\triangle A$의 절대값을 절대오차라 하고 참값 A에 대한 비율 $\frac{|\triangle A|}{A} = \frac{|a-A|}{A}$를 근사값 a의 상대오차 또는 오차율이라고 한다. 대부분의 경우 $\frac{|a-A|}{a}$를 사용한다. 상대오차는 근사값의 정밀한 정도를 나타내는 데 사용한다.

Ⅳ. 상수 e의 계산 접근법

a 원을 어떤 기간의 초에 저축했다고 하자. 이 기간은 1년이 될 수도 있고 또는 6개월 또는 3개월 또는 더 짧을 수도 있다.

은행에서 그 기간동안 저축한 돈에 대하여 이율 r 로 지급하기로 동의하기로 했다면 이자는 ar 이고 원리합계는

$$a+ar = (1+r)a$$

이다. 즉,

$$\text{기간 끝의 원금 총액} = (1+r)\ \text{처음 금액}$$

이다.

이제, 이율을 1년에 100%로 지급하기로 가정하고 1원을 은행에 저축했다면 그 원리합계는

$$(1+1)1 = 2$$

이다. 만약 은행에서 기간을 둘로 나누어 6개월마다 계산한다면 이율은 50%이고 처음 6개월에 해당하는 원리합계는

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)1 = 1+\frac{1}{2}$$

이고, 두 번째 6개월 동안의 원리합계는

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$$

이다. 1년에 4개월로 나누어 계산하면 이율은 $\frac{1}{3}$ 이고 처음 4개월의 원리합계는

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)1 = 1+\frac{1}{3}$$

이고, 두 번째 4개월 동안의 원리합계는

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^2$$

이고, 마지막 4개월 동안의 원리합계는

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3$$

이므로, 1년을 n 기간으로 나누어 계산한다면 마지막 기간에서의 원리합계는

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

원이다.

다음 표는 1원을 연이율 100%로 저금하여 1년을 몇 기간으로 나누어 1년 말에 지급 받는 원리합계를 나타낸 것이다.

구 분	년	6개월	4개월	3개월	매월	매일	매시간
기 간	1	2	3	4	12	365	8760
원리합계	2	2.25	2.37037	2.441	2.61304	2.71457	2.71828

<표 IV-1> 기간별 원리합계

1년을 아주 많은 기간으로 나누어 이자를 계산할 수 있다면 즉, 극한의 개념에 있어서는 소위 '연속적인 기간에 대한 원리합계'는 e 원이 된다.

상수 e 를 구체적으로 계산하기 위해 정의로부터 시작하여 많은 사람들이 노력해왔고 그 계산법도 많이 소개되어 있다. 컴퓨터가 나오면서부터는 컴퓨터가 그 일을 대신하고 있는데 그 중에서 몇 개의 계산방법을 소개하면 다음과 같다.

1. 고전적 정의를 이용한 계산법

상수 e 는 단조증가수열에 의하여 정의된다. 즉

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

그러나 수렴은 매우 느리다.

$$e_1 = 2$$

$$
\begin{aligned}
e_{10} &= 2.(59374246010\cdots) \\
e_{100} &= 2.7(0481382942\cdots) \\
e_{1000} &= 2.71(692393223\cdots) \\
e_{10000} &= 2.718(14592682\cdots) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

이는 앞에서 소개한 복리로 원리합계를 계산하는 방법과 동일하다.

2. 급수를 이용한 계산법

$$
\begin{aligned}
e &= 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \\
&= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)
\end{aligned}
$$

은 1748년 오일러에 의하여 만들어 졌다. 계승은 빠른 속도로 증가하는 수이기 때문에 e 를 계산하는데는 매우 충분하다.

$$
S_n < e < S_n+\frac{1}{n\times n!}
$$

을 보이는 일은 쉽고 오일러는 이를 이용하여 소수점이하 23자리까지 계산하였다.

3. 연분수를 이용한 계산법

오일러는 1737년과 1738년에 상수 e 와 관계된 세 가지 중요한 전개식을 발표하였다. 편의상 다음과 같은 기수법을 사용한다.

$$
x = a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]
$$

$$\vdots$$

그 첫 번째 전개는

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,\cdots]$$

$$e = \left\{2,3,\frac{8}{3},\frac{11}{4},\frac{19}{7},\frac{87}{32},\frac{106}{39},\frac{193}{71},\frac{1264}{465},\frac{1457}{536},\frac{2721}{1001},\cdots\right\}$$

두 번째는

$$\sqrt{e} = [1;1,1,1,5,1,1,9,1,1,13,1,1,17,\cdots]$$

마지막으로는

$$\frac{e-1}{2} = [0;1,6,10,14,18,22,26,30,34,38,42,\cdots]$$

$$e = \left\{0,3,\frac{19}{7},\frac{193}{71},\frac{2721}{1001},\frac{49171}{18089},\frac{1084483}{398959},\cdots\right\}$$

위에서 보면 e 의 연분수의 수렴속도가 $\frac{e-1}{2}$ 의 수렴속도보다 늦다는 것을 알 수 있다.

이제 $x = [a_0;a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k]$ 라하고 $\frac{p_k}{q_k}$ 를 연분수 x 의 k 번째까지의 수라고 하자. 그러면 다음과 같은 순환 관계를 얻는다.

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}\ ,\quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

여기서 초기 조건은

$$p_{-1} = 1,\quad p_0 = a_0,\quad q_{-1} = 0,\quad q_0 = 1$$

이다.

만약 $\frac{e-1}{2}$ 에 대한 연분수를 사용한다면 $a_k = 4(k-1)+2$ (단, $k > 1$)이고. 연분수의 k 번째까지의 수는 $\frac{p_k}{q_k}$ 이고 이를 이용하여 e 에 대한 연분수의 k 번째까지의 수는 $2\frac{p_k}{q_k}+1$ 이 된다. 예를 들면 $k=1500$이면 e 는 소수점이하 10^4 자리의 값을 얻을 수 있고 $k = 12000$이면 e 는 소수점 이하 10^5 자리의 값을 얻을 수 있다.

4. 무한 곱을 이용한 계산법

무한 곱을 이용한 e 의 값을 계산하는 공식은 여러 가지 있지만 여기서는 1873년 카탈란(Catalan, ?)[4]에 의하여 얻어진 공식을 설명한다.

$$S_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

이라 하면

$$S_{n+1} = S_n+\frac{1}{(n+1)!} = S_n\left(1+\frac{1}{(n+1)!\times S_n}\right)$$

$$= S_n\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

분명히 u_{n+1}은 정수이다. 그리고

$$u_n = n!\times S_{n-1}$$

$$u_{n+1} = (n+1)!\times S_n = (n+1)\times n!\times\left(S_{n-1}+\frac{1}{n!}\right)$$

$$= (n+1)(n!\times S_{n-1}+1)$$

그러므로 수열 u_n을 다음과 같이 정의하면

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = (n+1)\times(u_n+1)$$

부분합

$$S_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$S_n = \frac{u_n+1}{n!}$$

$$= \frac{u_n}{n!}\,\frac{u_n+1}{u_n}$$

$$= \frac{n(u_{n-1}+1)}{n!}\,\frac{u_n+1}{u_n}$$

---

4) 연대 미상

$$= \frac{(u_{n-1}+1)}{(n-1)!}\,\frac{u_n+1}{u_n}$$

$$= \frac{u_{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{(u_{n-1}+1)}{u_{n-1}}\,\frac{u_n+1}{u_n}$$

$$= \frac{(n-1)u_{n-2}+1}{(n-1)!}\,\frac{(u_{n-1}+1)}{u_{n-1}}\,\frac{u_n+1}{u_n}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{u_1+1}{u_1}\,\frac{u_2+1}{u_2}\,\frac{u_3+1}{u_3}\,\cdots\,\frac{u_{n-1}+1}{u_{n-1}}\,\frac{u_n+1}{u_n}$$

따라서

$$e = \Pi\left(\frac{u_n+1}{u_n}\right) = 2.\left(\frac{5}{4}\right)\times\left(\frac{16}{15}\right)\times\left(\frac{65}{64}\right)\times\left(\frac{326}{325}\right)\times\cdot$$

를 얻는다.

5. 지수함수를 이용한 계산법

지수함수의 급수전개는

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

이다. 이 급수로부터

$$e = \exp(1) = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

을 계산하는 대신에 급수의 이점을 살려 다음과 같이 계산하여 보면

$$\exp\left(\frac{1}{2}\right) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\times 2!}+\frac{1}{2^3\times 3!}+\frac{1}{2^4\times 4!}+\cdots$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)+$$

$$\exp\left(\frac{1}{4}\right) = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4\times 2!}+\frac{1}{2^6\times 3!}+\cdots$$

$$\exp\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}\right)+$$

$$\exp\left(\frac{1}{4}\right)^4 = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)+\cdots$$

$$\exp\left(\frac{1}{8}\right) = 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6\times 2!}+\frac{1}{2^9\times 3!}+\cdots$$

$$\exp\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}\right)+\frac{1}{3!}(\cdots)+\cdots$$

$$\exp\left(\frac{1}{8}\right)^4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^9}\right)+\frac{1}{3!}(\cdots)+\cdots$$

$$\exp\left(\frac{1}{8}\right)^8 = 1+1+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)+\cdots + \frac{1}{3!}(\cdots)+\cdots$$

$$\vdots$$

$\exp\left(\frac{1}{2}\right)$, $\exp\left(\frac{1}{4}\right)$, $\exp\left(\frac{1}{8}\right)$,… 이 빠른 속도로 e 에 수렴하고 있기 때문에 $\exp\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\exp\left(\frac{1}{4}\right)^4$, $\exp\left(\frac{1}{8}\right)^8$,…을 계산하는 것이 좋다. 일반적으로는

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{1}{2^N}\right)^{2^N}$$

여기서 N 은 연속적인 제곱수[5]이다.

6. 새로운 급수 전개를 이용한 계산법

우선, Maclaurin 급수에 의해 $\ln(1+x)$ 를 전개하여 보자. $-1<x\leq 1$에서 수렴한다.

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\cdots$$

---

5) 2의 제곱, 3의제곱, 4의제곱,…을 말함.

여기서 x 대신 $\frac{1}{x}$ 로 대치하고 x 를 곱하면

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$= 1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{5x^4}- \cdots \equiv P(x), \qquad x \geq 1$$

따라서

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{P(x)} = e\times e^{P(x)-1}$$

$$= e\left[1+(P(x)-1)+\frac{(P(x)-1)^2}{2!}+\frac{(P(x)-1)^3}{3!}+ \cdots\right]$$

또는

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}-\frac{7}{16x^3}+\frac{2447}{5760x^4}-\frac{959}{2304x^5}+ \cdots\right]$$

$$x\geq 1. \cdots(1)$$

이 급수는 고전적 접근 방법에는 오차가 있음을 보여준다. 그것은 단지 일차정확도 - 즉, 급수(1)이 $\frac{1}{x}$ 의 비가 되는 항을 가지고 있기 때문에 작은 값 x 에 대하여 접근이 아주 정확하지 않다. 이 항은 비교적 작은 값 x 보다는 크다. 고전적 접근에서의 급수는 그 취약점이 항의 정밀도에 있다는 사실을 이용하여 그 정밀도를 개선할 수 있는 새로운 대수적 표현을 만들 수 있다.

급수를 이용하여 e 에 접근하는 새롭고 좀더 정확한 접근을 얻기 위한 길은 반복되는 "부트스트랩핑(bootstrapping)"[6] 즉, 나은 방법을 얻기 위하여 두 개의 좋은 접근식을 조합하는 방법을 포함한다. 우선 이차접근 방법을 얻기 위해서는 하나의 e 의 접근 즉, $e\left(1+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ 를 얻는다.

$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 와 $\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$ 에 대하여 두 급수를 합하여 e 에 이차 접근을 얻어낼 수 있다.

6) 프로그램 자체에서 그 프로그램의 실행을 촉진하는 기능

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+\cdots\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{24x^3}-\cdots\right)$$
$$= 1+\frac{5}{24x^2}-\frac{5}{24x^3}+\cdots \equiv q(x)$$

따라서

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{2x}\right) = e\times e^{q(x)-1}$$

또는

ACM : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$$= e\left[1+\frac{5}{24x^2}-\frac{5}{24x^3}+\frac{1187}{5760x^4}-\frac{587}{2880x^5}+\frac{117209}{580608x^6}-\cdots\right],\quad x\geq 1 \cdots(2)$$

(2)를 "가속화 된 고전적 방법(Accelerated Classical Method)"이라고 부른다.

급수(2)는 처음 항이 x 의 멱이 크기 때문에 고전적 방법보다 좀 더 정확함을 보여준다. 그러므로 괄호 속의 항의 합은 급수(1)보다 $x\geq 1$인 모든 x 에 대하여 1에 더 가깝다.

또 다른 이차 접근은 $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$에 대하여 "거울 상(mirror image)"이라고 하는

$$-x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{5x^4}+\frac{1}{6x^5}+\frac{1}{7x^6}+\cdots$$

급수를 더하였을 때 얻는 결과이다. 이 합에서는 $\frac{1}{2x}$ 항이 소거되고 모든 x 의 소수멱 항들은 소거되어 전개된다. 그 합을 2 로 나누고 지수표현을 하면

MIN : $$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = e\left[1+\frac{1}{3x^2}+\frac{23}{90x^4}+\frac{1223}{5670x^6}+\cdots\right],\quad x>1 \cdots(3)$$

이 된다. 이 방법을 "거울 상 방법" 또는 "MIN" 이라고 한다.

이 두 개의 이차 접근을 적절히 조합하여 다음과 같은 삼차 접근방법을 만들

수 있다.

$$\text{ACMMIN}: \ (x+1)^{\frac{11x}{6}}(x-1)^{\frac{5x}{6}}\left(\frac{2x+1}{2x^{x+1}}\right)^{\frac{8}{5}}$$

$$= e\left[1-\frac{5}{9x^3}+\frac{19}{120x^4}-\frac{77}{180x^5}+\frac{137}{1008x^6}-\ \cdots\right],\ x>1 \quad \cdots(4)$$

이들 외에 공식을 구하는 것이 복잡하고 이해하기가 다소 어려운 pade 접근법, AGM에 기초한 접근법, 또는 e 를 계산하기 위한 프로그램 접근법 등이 있지만 컴퓨터를 사용하고 프로그래밍을 이해할 수 있다면 앞으로 연구해볼 만하다. 끝으로 지금까지 계산하여온 e 계산의 연보표를 참고로 실어둔다.

소수점이하 자리수	연 도	사 람	비 고
23	1748	Euler	정의를 이용
137	1853	Shanks	
205	1871	Shanks	
346	1884	Booman	
2010	1949	Neumann	1946년 ENIAC으로 계산 발표
100,265	1961	Shanks, Wrench	Euler공식 이용 컴퓨터로 2.5시간 만에 계산.
10,000,000	1994	Nemiroff, Bonnell	
18,199,978	1997	Demichel	
50,000,817	1997	Demichel	160Mhz 컴퓨터로 714시간 걸려 계산.
200,000,579	1999	Wedeniwski	이분법에 기초를 계산.
869,894,101	1999. 8	Wedeniwski	연분수 접근법을 사용하여 계산.
1,250,000,000	1999. 11	Gourdon	공식은 $e=\sum\frac{1}{n!}$ 를 사용하고 증명은 $e=1/\sum\frac{(-1)^{n}}{n!}$ 을 사용하여 계산하는 데는 이분법이 사용. PentiumII 350을 사용하여 40시간 걸려 계산.

<표 IV-2> e계산, 연보표

V. 상수 e의 Spreadsheet 상에서의 계산

Excel Spreadsheet 상에서 가장 간단히 e 의 값을 계산하는 방법은 지수함수 exp(1)을 소수30째 자리까지 구하는 것이다. 그러나 이 값은 Spreadsheet에서는

$$e = 2.718281828459050000000000000000$$

이 소수 14자리까지밖에 나타나지 않는다. 이렇게 되는 이유는 Excel 상의 버그나 한계가 아니고 Excel의 IEEE 754 Floating-point 표준을 준수하기 때문이다. 이를 기준으로 하여 IV. 장에 기술한 접근법을 직접 Spreadsheet 상에서 계산하는 방법과 그 결과 어느 정도 계산할 수 있는가를 살펴보자

1. 고전적 정의를 이용한 계산

Exel sheet 상에서 계산은 A셀에 수 n 의 값을 주고 C셀에 수식 함수 '=(1+1/An)^An '을 입력하면 주어진 n 의 값의 변화에 따라 수식 함수를 입력

C42 =(1+1/A42)^A42

25	2.665836331487420000000000000000	0.018673187116614700000000000000
26	2.667784966533750000000000000000	0.018928385367920800000000000000
27	2.669593977812570000000000000000	0.018237923463691000000000000000
28	2.671277853440840000000000000000	0.017596063605909400000000000000
29	2.672849143980810000000000000000	0.016997848374851900000000000000
30	2.674318775870300000000000000000	0.016438972416231900000000000000
40	2.685063838389970000000000000000	0.012371396759414200000000000000
50	2.691588029073600000000000000000	0.009917490751594660000000000000
100	2.704813829421530000000000000000	0.004979270251807510000000000000
1,000	2.716923932235520000000000000000	0.000499791770911687000000000000
10,000	2.718145926824360000000000000000	0.000049997917090375600000000000
100,000	2.718268237197530000000000000000	0.000004999970691151860000000000
10,000,000	2.718281693980370000000000000000	0.000000049471941388506300000000
11,000,000	2.718281705028330000000000000000	0.000000045406361317489300000000
40,000,000	2.718281802626450000000000000000	0.000000009503281257074910000000
40,000,001	2.718281798148480000000000000000	0.000000011150633246773100000000
###########	2.716110034087020000000000000000	0.000799597345014243000000000000
###########	3.035035208549260000000000000000	0.104365635497967000000000000000
###########	1.000000000000000000000000000000	1.718281828459050000000000000000

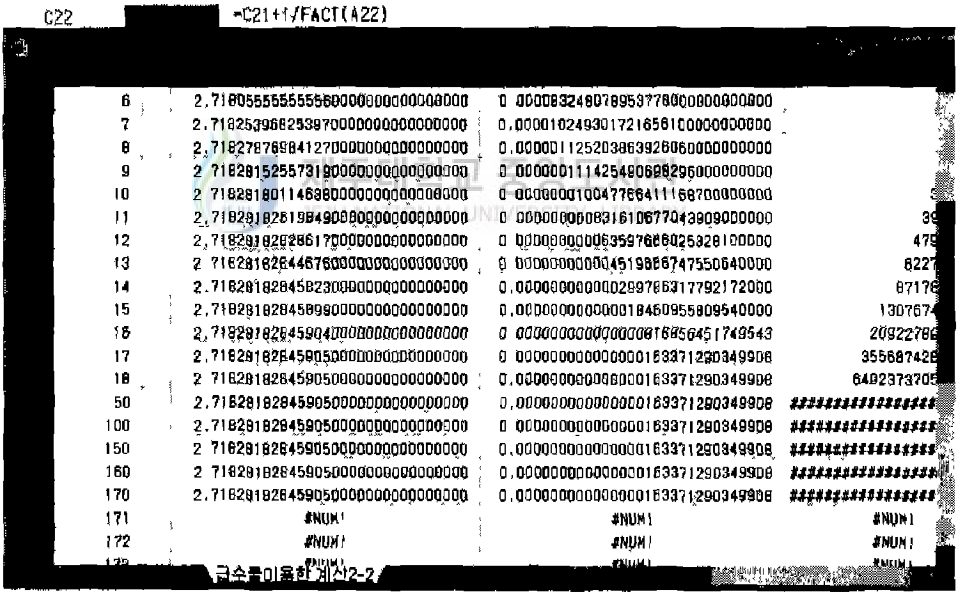
고전적정의2-1

<그림 V. 1-1> 고전적 정의를 이용한 계산의 실제

한 C셀에서 쉽게 그 값의 변화를 볼 수 있다. 그러나 주어진 e 의 값에 접근하는 것은 n 의 값이 아주 커야만 접근하고 있음을 알 수 있고, 수렴속도가 아주 느리다는 것을 알 수 있다.

2. 급수를 이용한 계산

Excel sheet 상에서 계산은 고전적인 방법과 비슷하다. 우선 F셀에 수식함수 '=fact(An)'을 입력하여 계산한 다음 C셀에 수식함수 '=C(n-1)+1/Fn'을 입력하면 C셀에 e 값의 계산되면서 나타난다. 수렴속도가 고전적인 방법보다는 매우 빠르지만 n 값이 170이 넘어 가면 엑셀에서는 계산이 안 된다.



C22 =C21+1/FACT(A22)

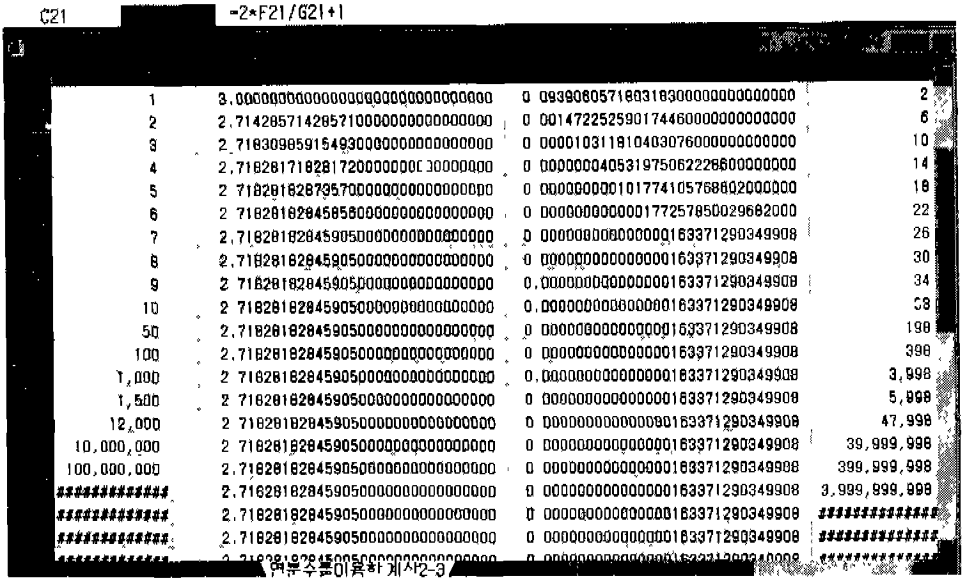
6	2,71805555555556000000000000000000	0 00008324807895377800000000000	
7	2,71825396825397000000000000000000	0,00001024930172165610000000000	
8	2,71827876984127000000000000000000	0,00000112520386392606000000000	
9	2 71828152557319000000000000000000	0 00000011142548062829600000000	
10	2 71828180114638000000000000000000	0 00000001004776641116870000000	3
11	2,71828182619849000000000000000000	0 00000000083161067704390900000	39
12	2,71828182828617000000000000000000	0 00000000006359766025328100000	479
13	2 71828182844676000000000000000000	0 00000000000451986674755064000	6227
14	2.71828182845823000000000000000000	0,00000000000029976631779217200	87178
15	2,71828182845899000000000000000000	0,00000000000001846095580954000	1307674
16	2,71828182845904000000000000000000	0 00000000000000081685645174954 3	20922789
17	2,71828182845905000000000000000000	0 00000000000000016337129034990 8	35568742
18	2 71828182845905000000000000000000	0,00000000000000016337129034990 8	6402373705
50	2,71828182845905000000000000000000	0,00000000000000016337129034990 8	#################
100	2.71828182845905000000000000000000	0 00000000000000016337129034990 8	#################
150	2 71828182845905000000000000000000	0,00000000000000016337129034990 8	#################
160	2 71828182845905000000000000000000	0,00000000000000016337129034990 8	#################
170	2,71828182845905000000000000000000	0,00000000000000016337129034990 8	#################
171	#NUM!	#NUM!	#NUM!
172	#NUM!	#NUM!	#NUM!

급수를이용한 계산2-2

< 그림 V. 2-1> 급수를 이용한 계산의 실제

3. 연분수를 이용한 계산

Excel sheet 상에서 계산은 다소 복잡하다. 우선 A셀에 k 값을 입력하고, E셀에는 a_k 를 계산하는 수식함수 '=4*(An-1)+2'를 입력하여 a_k 를 계산한 다



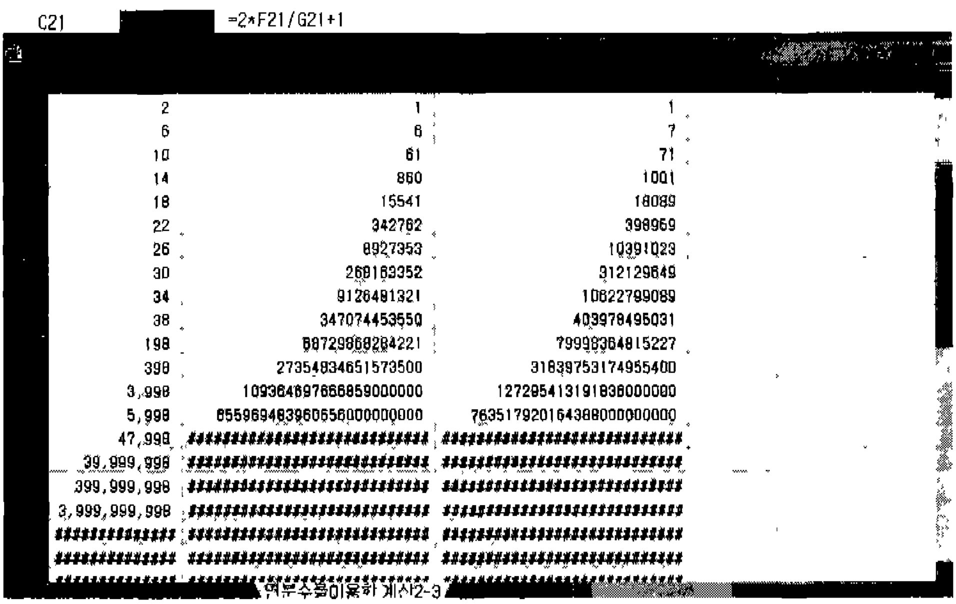
C21 =2*F21/G21+1

1	3,00000000000000000000000000000	0 0939060571803183000000000000000	2
2	2,71428571428571000000000000000	0 0014722525901744600000000000000	6
3	2_71830985915493000000000000000	0 0000103118104030760000000000000	10
4	2,71828171828172000000000000000	0 0000000405319750622286000000000	14
5	2 71828182873570000000000000000	0 0000000001017741057686020000000	18
6	2 71828182845858000000000000000	0 0000000000001772578500296820000	22
7	2,71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	26
8	2,71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	30
9	2 71828182845905000000000000000	0,000000000000000163371290349908	34
10	2 71828182845905000000000000000	0,000000000000000163371290349908	38
50	2,71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	198
100	2,71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	398
1,000	2 71828182845905000000000000000	0,000000000000000163371290349908	3,998
1,500	2 71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	5,998
12,000	2 71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	47,998
10,000,000	2 71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	39,999,998
100,000,000	2,71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	399,999,998
##############	2,71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	3,999,999,998
##############	2,71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	###############
##############	2,71828182845905000000000000000	0 000000000000000163371290349908	###############

연분수를이용한 계산2-3

<그림 V. 3-1> 연분수를 이용한 계산의 실제

음, F셀에는 p_k 를 계산하는 수식함수 '=En*F(n-1)+F(n-2)'를 입력하여 계산하고, G셀에는 q_k 를 계산하는 수식함수 '=En*G(n-1)+G(n-2)'를 입력하여 계산을



C21 =2*F21/G21+1

2	1	1
6	6	7
10	61	71
14	860	1001
18	15541	18089
22	342762	398959
26	8927353	10391023
30	268163352	312129649
34	9126481321	10622799089
38	347074453550	403978495031
198	687298682084221	7999836481 5227
398	27354834651573500	31839753174955400
3,998	109364697666859000000	127295413191836000000
5,998	655969483960656000000000	763517920164388000000000
47,998	############################	############################
39,999,998	############################	############################
399,999,998	############################	############################
3,999,999,998	############################	############################
##############	############################	############################
##############	############################	############################

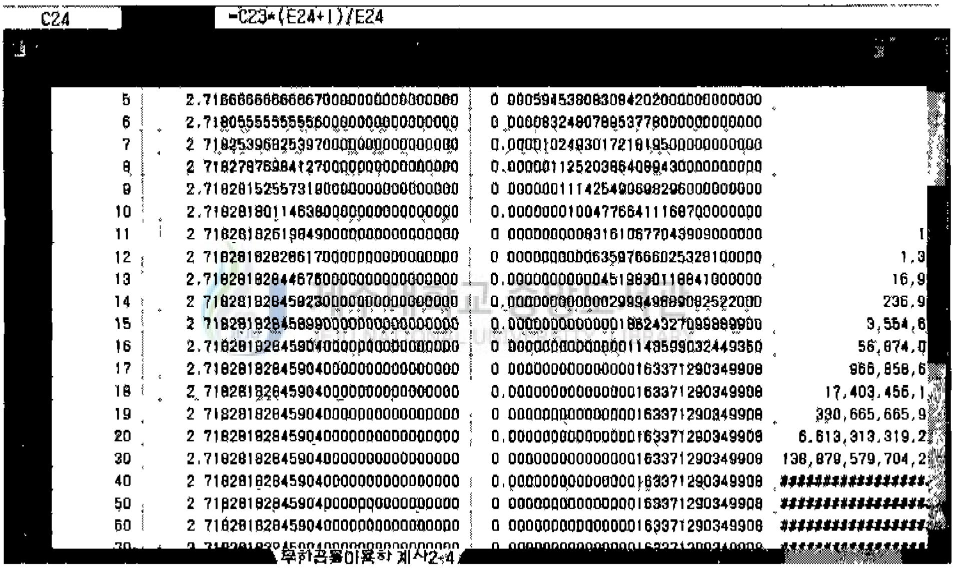
연분수를이용한 계산2-3

<그림 V. 3-2> 연분수를 이용한 계산의 실제

끝내고 나서 마지막으로 C셀에 e 값을 구하는 수식함수 '=2*Fn/Gn+1'을 입력하면 e 의 접근 값들이 C셀에 나타난다. 수렴속도가 아주 빠르다.

4. 무한 곱을 이용한 계산

Excel sheet상에서 계산은 연분수를 이용한 계산보다는 비교적 쉽다 A셀에 수 n 의 값을 넣고, E셀에 u_n 을 계산할 수 있는 수식함수 '=(An+1)*(En+1)' 을 넣어 계산한 다음 C셀에 무한 곱을 계산할 수 있는 수식함수 '=(En+1)/En'을


C24 =C23*(E24+1)/E24

5	2.716666666666670000000000000000	0.000594538083094202000000000000	
6	2.718055555555560000000000000000	0.000083248078953778000000000000	
7	2.718253968253970000000000000000	0.000010249301721819500000000000	
8	2.718278769841270000000000000000	0.000001125203864089430000000000	
9	2.718281525573190000000000000000	0.000000111425490698296000000000	
10	2.718281801146380000000000000000	0.000000010047766411168700000000	
11	2.718281826198490000000000000000	0.000000000831610677043909000000	1
12	2.718281828286170000000000000000	0.000000000063597666025328100000	1,3
13	2.718281828446760000000000000000	0.000000000004519830118841000000	16,9
14	2.718281828458230000000000000000	0.000000000000299949689082522000	236,9
15	2.718281828458990000000000000000	0.000000000000018824327099889900	3,554,6
16	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000001149599032449350	56,874,0
17	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908	966,858,6
18	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908	17,403,456,1
19	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908	330,665,665,9
20	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908	6,613,313,319,2
30	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908	138,879,579,704,2
40	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908	#################
50	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908	#################
60	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908	#################

무한곱을이용한 계산2-4

<그림 V. 4-1> 무한 곱을 이용한 계산의 실제

입력하면 C셀에 e 의 접근값이 나타난다. 비교적 빠른 편이나 연분수 이용 방법보다는 느리고 급수를 이용한 방법과 비슷하다.

5. 지수함수를 이용한 계산

Excel sheet상에서 계산은 A셀에 수 n 을 넣고 E셀에 2^n 을 계산할 수 있는 수식 함수 '=2^An '을 입력하여 계산한 다음 C셀에 수식 함수 '=EXP(1/En)^En'

의 값을 입력하면 e의 접근값이 나타나는데 n이 50부터 근접한 값이 나타나다가 n이 53부터 근접하던 값이 1.00000…으로 계산되다가 n이 1024부터는 계산되지 않는다

C32 =EXP(1/E32)^E32

16	2 71828182847231000000000000000000	0 000000000004878430101114820000	
17	2 71828182843277000000000000000000	0 000000000009667496106549290000	
18	2 71828182843277000000000000000000	0 000000000009667496106549290000	
19	2 71828182843277000000000000000000	0 000000000009667496106549290000	
20	2 71828182843277000000000000000000	0 000000000009667496106549290000	
21	2 71828182843277000000000000000000	0 000000000009667496106549290000	
22	2 71828182843277000000000000000000	0 000000000009667496106549290000	
23	2 71828182843277000000000000000000	0 000000000009667496106549290000	
24	2 71828182843277000000000000000000	0 000000000009667496106549290000	
25	2 71828182843277000000000000000000	0,000000000009667496106549290000	
26	2 71828180818247000000000000000000	0,000000007459334023415550000000	
27	2 71828180818247000000000000000000	0 000000007459334023415550000000	1
28	2 71828180818247000000000000000000	0 000000007459334023415550000000	2
29	2 71828180818247000000000000000000	0 000000007459334023415550000000	5
30	2 71828180818247000000000000000000	0 000000007459334023415550000000	10
50	2 71828182845904000000000000000000	0 000000000000000326742580699817	11258999
51	2 71828182845904000000000000000000	0 000000000000000163371290349908	22517998
52	2 71828182845905000000000000000000	0 000000000000000000000000000000	45035996
53	1 00000000000000000000000000000000	1 71828182845905000000000000000	90071992
55	1 00000000000000000000000000000000	1 71828182845905000000000000000	360287970
100	1 [illegible]	1 [illegible]	##############

지수함수를이용한 계산2-5

<그림 V. 5-1> 지수함수를 이용한 계산의 실제

6. 새로운 급수를 이용한 계산

C24 =E24*F24

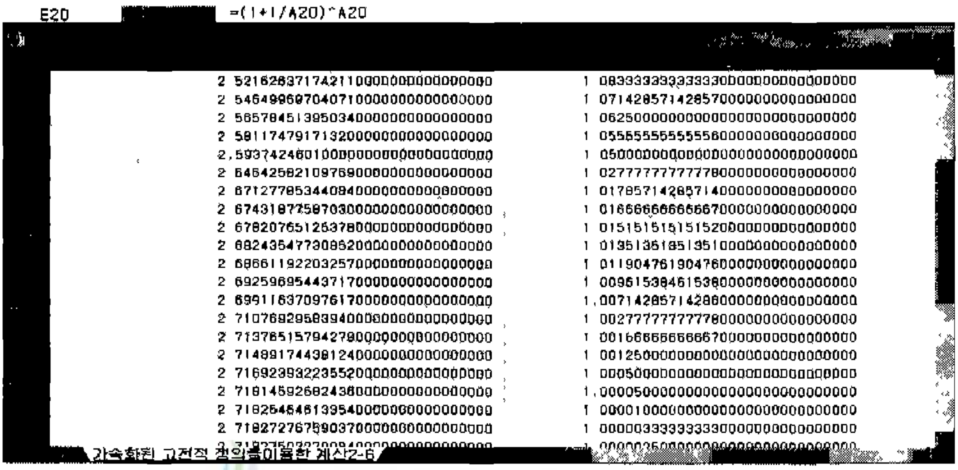
6	2,73176190272062000000000000000000	2 52102637174211000
7	2 72839259254362000000000000000000	2 54649969704071000
8	2 72614604607224000000000000000000	2 56578451306034000
9	2 72457339125262000000000000000000	2 58117479171320000
10	2 72342958310500000000000000000000	2 59374246010000000
18	2 71993764946151000000000000000000	2 64642582109789000
28	2 71897924368096000000000000000000	2 67127785344084000
30	2,71889075548814000000000000000000	2 67431877587030000
33	2 71878655506065000000000000000000	2 67820766125378000
37	2 71868460538026000000000000000000	2,68243547730852000
42	2 71859539728487000000000000000000	2,68661192203257000
52	2,71848730976830000000000000000000	2 69258605443717000
70	2,71839577362500000000000000000000	2 69911637097617000
180	2 71829921055007000000000000000000	2,71076929583940000
300	2,71828809987270000000000000000000	2,71376515794279000
400	2,71828535906171000000000000000000	2 71489174438124000
1 000	2 71828239420164000000000000000000	2 71692393223552000
10 000	2 71828183412070000000000000000000	2 71814592682436000
50,000	2 71828182868000000000000000000000	2 71825464613354000
150 000	2,71828182849959000000000000000000	2 71827276759037000

가속화된 고전적 정의를이용한 계산2-6

<그림 V. 6-1)-1> 가속화된 고전적 정의를 이용한 계산의 실제

1) 가속화된 고전적 계산 방법(ACM)

Excel sheet 상에서 A셀에 수 x 의 값을 주고 E셀에 고전적 방법의 수식 함수 '=(1+1/x)^x '을 입력하여 계산하고, F셀에 수식 함수 '=(1+1/(2*x)) '을 입력한 다음 C셀에 수식 함수 '=En*Fn '입력하면 e 의 접근값을 계산할 수 있다.



E20 =(1+1/A20)^A20

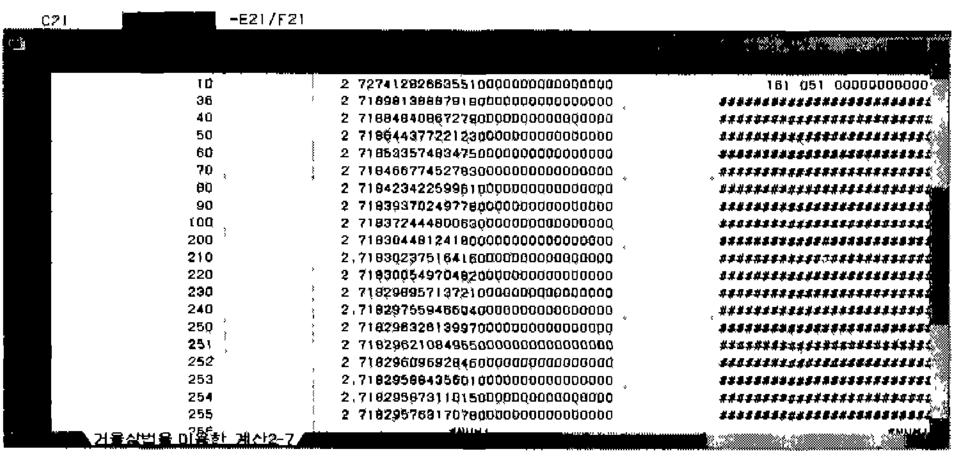
2 5216263717421100000000000000000	1 0833333333333300000000000000000
2 5464996970407100000000000000000	1 0714285714285700000000000000000
2 5657845139503400000000000000000	1 0625000000000000000000000000000
2 5811747917132000000000000000000	1 0555555555555600000000000000000
2,5937424601000000000000000000000	1 0500000000000000000000000000000
2 6464258210976900000000000000000	1 0277777777777800000000000000000
2 6712778534408400000000000000000	1 0178571428571400000000000000000
2 6743187758703000000000000000000	1 0166666666666700000000000000000
2 6782076512637800000000000000000	1 0151515151515200000000000000000
2 6824354773085200000000000000000	1 0135135135135100000000000000000
2 6866119220325700000000000000000	1 0119047619047600000000000000000
2 6925969544371700000000000000000	1 0096153846153800000000000000000
2 6991163709761700000000000000000	1,0071428571428600000000000000000
2 7107692958394000000000000000000	1 0027777777777800000000000000000
2 7137651579427900000000000000000	1 0016666666666700000000000000000
2 7148917443812400000000000000000	1 0012500000000000000000000000000
2 7169239322355200000000000000000	1 0005000000000000000000000000000
2 7181459268243800000000000000000	1,0000500000000000000000000000000
2 7182546461395400000000000000000	1 0000100000000000000000000000000
2 7182727675903700000000000000000	1 0000033333333300000000000000000

가속화된 고전적 정의를이용한 계산2-6

<그림 V. 6-1) 2> 가속화된 고전적 정의를 이용한 계산의 실제

2) 거울상 방법의 계산(MIM)

Excel sheet 상에서 A셀에 수 x 값을 입력하고 E셀에 수식 함수



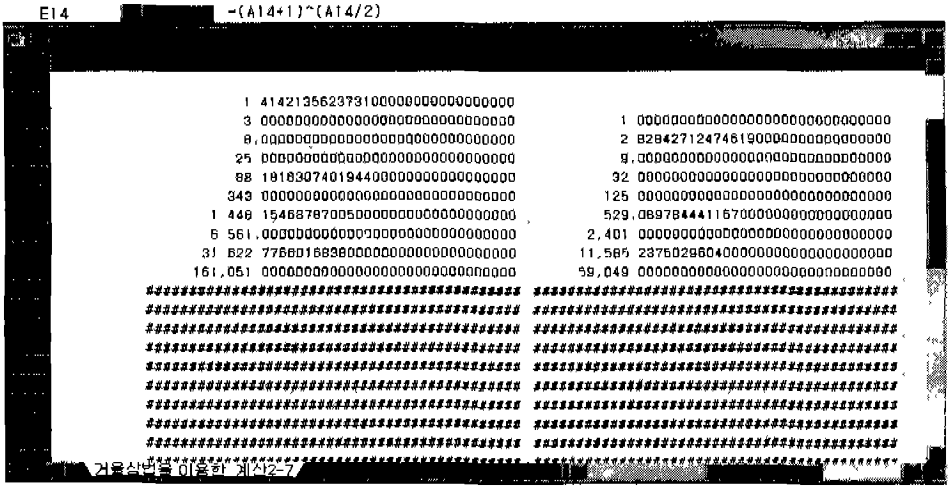
C21 =E21/F21

10	2 7274128266355100000000000000000	161 051 00000000000
36	2 7189813888791800000000000000000	##########################
40	2 7188484086727900000000000000000	##########################
50	2 7186443772212300000000000000000	##########################
60	2 7185335748347500000000000000000	##########################
70	2 7184667745278300000000000000000	##########################
80	2 7184234225996100000000000000000	##########################
90	2 7183937024977800000000000000000	##########################
100	2 7183724448006300000000000000000	##########################
200	2 7183044812418000000000000000000	##########################
210	2,7183023751641600000000000000000	##########################
220	2 7183005497048200000000000000000	##########################
230	2 7182989571372100000000000000000	##########################
240	2,7182975594660400000000000000000	##########################
250	2 7182963281399700000000000000000	##########################
251	2 7182962108496500000000000000000	##########################
252	2 7182960969284600000000000000000	##########################
253	2,7182958843560100000000000000000	##########################
254	2,7182958731101500000000000000000	##########################
255	2 7182957681707800000000000000000	##########################

거울상법을 이용한 계산2-7

<그림 V. 6-2)-1> 거울상을 이용한 계산의 실제

'=(An+1)^(An/2)' 을 입력하고, F셀에 수식 함수 '=(An 1)^(An/2)' 을 입력한 다음 C셀에 수식 함수 '=En/Fn'을 입력하면 e 의 접근값이 계산된다

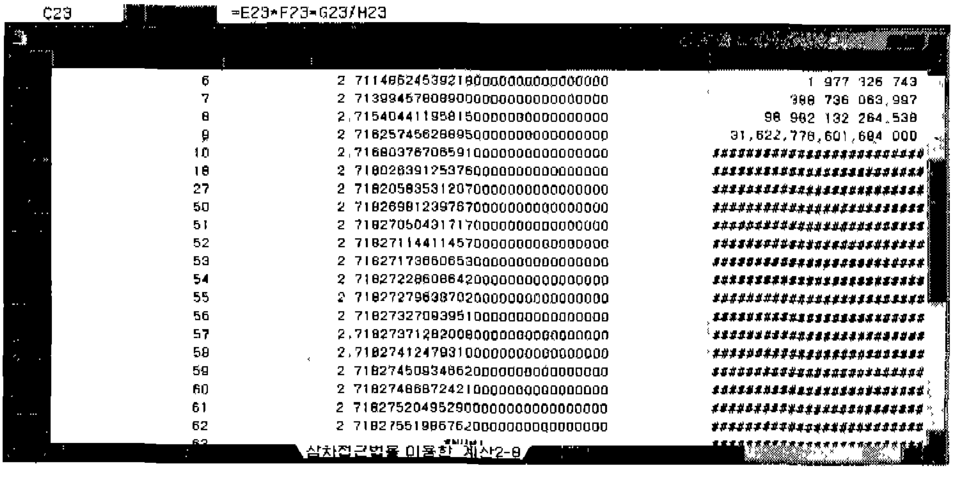

E14 -(A14+1)^(A14/2)

1 41421356237310000000009000000000	
3 00000000000000000000000000000000	1 00000000000000000000000000000000
8,00000000000000000000000000000000	2 82842712474619000000000000000000
25 00000000000000000000000000000000	9,00000000000000000000000000000000
88 18183074019440000000000000000000	32 00000000000000000000000000000000
343 00000000000000000000000000000000	125 00000000000000000000000000000000
1 448 15468787005000000000000000000000	529,08978444116700000000000000000000
6 561,00000000000000000000000000000000	2,401 00000000000000000000000000000000
31 622 77660168380000000000000000000000	11,585 23750296040000000000000000000000
161,051 00000000000000000000000000000000	59,049 00000000000000000000000000000000
##	##
##	##
##	##
##	##
##	##
##	##
##	##
##	##
##	##

<그림 V. 6-2)-2> 거울상을 이용한 계산의 실제

3) 삼차 접근 계산법(ACMMIM)

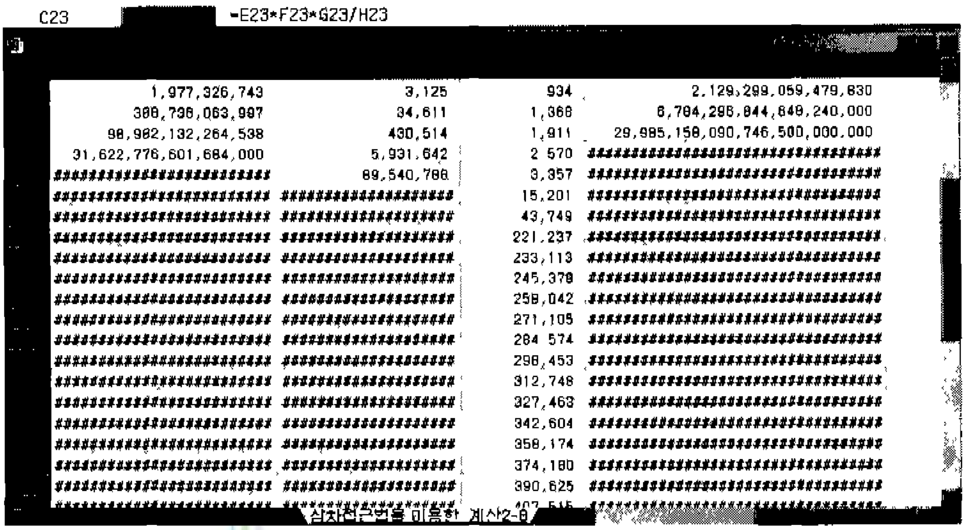
Excel Sheet 상에서는 A셀에 수 x 의 값을 입력하고 E셀에 수식 함수 '=(An+1)^(11*An/6)'을, F셀에는 수식 함수 '=(An-1)^(5*An/6)'을, G셀에는 수식


C23 =E23*F23*G23/H23

6	2 71148624539218000000000000000000	1 977 326 743
7	2 71399457808900000000000000000000	388 736 063,997
8	2,71540441195815000000000000000000	98 962 132 264.538
9	2 71625745628895000000000000000000	31,622,776,601,684 000
10	2,71680378706591000000000000000000	##########################
18	2 71802639125376000000000000000000	##########################
27	2 71820583531207000000000000000000	##########################
50	2 71826981239767000000000000000000	##########################
51	2 71827050431717000000000000000000	##########################
52	2 71827114411457000000000000000000	##########################
53	2 71827173660653000000000000000000	##########################
54	2 71827228608642000000000000000000	##########################
55	2 71827279638702000000000000000000	##########################
56	2 71827327093951000000000000000000	##########################
57	2,71827371282008000000000000000000	##########################
58	2,71827412479310000000000000000000	##########################
59	2 71827450934662000000000000000000	##########################
60	2 71827486872421000000000000000000	##########################
61	2 71827520495290000000000000000000	##########################
62	2 71827551986762000000000000000000	##########################

<그림 V. 6-3)-1> 삼차 접근 계산법의 실제

함수 '=(2*An+1)^(8/3)'을, H셀에는 수식 함수 '=(2*An^(An+1))^(8/3)'을 입력하고 계산하고 난 다음 C셀에 수식 함수 '=En*Fn*Gn/Hn'을 하면 e 의 접근값이 계산된다.



1,977,326,743	3,125	934	2,129,299,059,479,830
388,736,063,987	34,611	1,368	6,784,296,844,849,240,000
98,982,132,264,538	430,514	1,911	29,985,158,090,746,500,000,000
31,622,776,601,684,000	5,931,642	2 570	########
########	89,540,788	3,357	########
########	########	15,201	########
########	########	43,749	########
########	########	221,237	########
########	########	233,113	########
########	########	245,378	########
########	########	258,042	########
########	########	271,105	########
########	########	284 574	########
########	########	298,453	########
########	########	312,748	########
########	########	327,463	########
########	########	342,604	########
########	########	358,174	########
########	########	374,180	########
########	########	390,625	########

<그림 V. 6-3)-2> 심차 접근 계산의 실재

7. 결과와 그래프

위의 방법들을 Spreadsheet 상에서 기술한 방식대로 직접 계산한 결과와 그 결과의 그래프를 차례로 보면 다음과 같다

1) 고전적 정의를 이용한 계산

n	(1+1/n)^n	상대오차1
1	2.000000000000000000000000000	0.359140914229523000000000000
2	2.250000000000000000000000000	0.208125257092909000000000000
3	2.370370370370370000000000000	0.146775146381160000000000000
4	2.441406250000000000000000000	0.113408236936825000000000000
5	2.488320000000000000000000000	0.092416501277587000000000000
6	2.521626371742110000000000000	0.077987547608437900000000000
7	2.546499697040710000000000000	0.067458139350246600000000000
8	2.565784513950340000000000000	0.059434965672120500000000000
9	2.581174791713200000000000000	0.053118075221416900000000000
10	2.593742460100000000000000000	0.048015317740621600000000000
11	2.604199011897530000000000000	0.043807257448574100000000000
12	2.613035290224680000000000000	0.040277503571457500000000000
13	2.620600887885730000000000000	0.037274253025275300000000000
14	2.627151556300870000000000000	0.034687862578622000000000000
15	2.632878717727920000000000000	0.032437160950894900000000000
16	2.637928497366600000000000000	0.030460769187891400000000000
17	2.642414375183110000000000000	0.028711414072092900000000000
18	2.646425821097690000000000000	0.027152095777071200000000000
19	2.650034326640440000000000000	0.025753440675284900000000000
20	2.653297705144420000000000000	0.024491832631004000000000000
21	2.656263213926110000000000000	0.023348068146180200000000000
22	2.658969858537780000000000000	0.022306371669018600000000000
23	2.661450118638780000000000000	0.021353663336486500000000000
24	2.663731258068600000000000000	0.020479006741092600000000000
25	2.665836331487420000000000000	0.019673187116614700000000000
26	2.667784966533750000000000000	0.018928385367920600000000000
27	2.669593977812570000000000000	0.018237923463691000000000000
28	2.671277853440840000000000000	0.017596063605909400000000000
29	2.672849143980810000000000000	0.016997848374851900000000000
30	2.674318775870300000000000000	0.016438972416231900000000000
40	2.685063838389970000000000000	0.012371396759414200000000000
50	2.691588029073600000000000000	0.009917490751594660000000000
100	2.704813829421530000000000000	0.004979270251807510000000000
1,000	2.716923932235520000000000000	0.000499791770911687000000000
10,000	2.718145926824360000000000000	0.000049997917090375600000000
100,000	2.718268237197530000000000000	0.000004999970691151860000000
10,000,000	2.718281693980370000000000000	0.000000049471941388506300000
11,000,000	2.718281705026330000000000000	0.000000045408361317489300000
40,000,000	2.718281802626450000000000000	0.000000009503281257074910000
40,000,001	2.718281798148480000000000000	0.000000011150633246773100000
###########	2.716110034087020000000000000	0.000799597345014243000000000
###########	3.035035206549260000000000000	0.104365635497967000000000000

<표 V. 7-1> 고전적 정의를 이용한 계산 결과

2) 급수를 이용한 계산

n		1+1/1!+1/2!+1/3!+	상대오차2
1		2.00000000000000000000000000000	0 35914091422952300000000000000
2		2 50000000000000000000000000000	0 08731273138361800000000000000
3		2 66666666666666700000000000000	0 01935568567214200000000000000
4		2 70833333333333000000000000000	0 00367329050795522000000000000
5		2 71666666666666700000000000000	0 00059453808308420200000000000
6		2 71805555555555600000000000000	0 00008324807895377800000000000
7		2 71825396825397000000000000000	0 00001024930172165610000000000
8		2 71827876984127000000000000000	0 00000112520386392606000000000
9		2 71828152557319000000000000000	0 00000011142549069829600000000
10		2 71828180114638000000000000000	0.00000001004776641116870000000
11		2 71828182619849000000000000000	0 00000000083161067704390900000
12		2 71828182828617000000000000000	0 00000000006359766602532810000
13		2 71828182844676000000000000000	0 00000000000451966674755064000
14		2 71828182845823000000000000000	0 00000000000029978631779217200
15		2 71828182845899000000000000000	0 00000000000001846095580954000
16		2 71828182845904000000000000000	0 00000000000000081685645174954 3
17		2 71828182845905000000000000000	0 00000000000000016337129034990 8
18		2 71828182845905000000000000000	0 00000000000000016337129034990 8
50		2 71828182845905000000000000000	0 00000000000000016337129034990 8
100		2 71828182845905000000000000000	0 00000000000000016337129034990 8
150		2 71828182845905000000000000000	0 00000000000000016337129034990 8
160		2 71828182845905000000000000000	0 00000000000000016337129034990 8
170		2 71828182845905000000000000000	0 00000000000000016337129034990 8
171		#NUM!	#NUM!
172		#NUM!	#NUM!
173		#NUM!	#NUM!
174		#NUM!	#NUM!
175		#NUM!	#NUM!
176		#NUM!	#NUM!
177		#NUM!	#NUM!
178		#NUM!	#NUM!
179		#NUM!	#NUM!
180		#NUM!	#NUM!
181		#NUM!	#NUM!
182		#NUM!	#NUM!
183		#NUM!	#NUM!
184		#NUM!	#NUM!
185		#NUM!	#NUM!
186		#NUM!	#NUM!
187		#NUM!	#NUM!
200			#DIV/0!

<표 V. 7-2> 급수를 이용한 계산 결과

3) 연분수를 이용한 계산

k		2*pk/qk+1	상대오차3
1		3.000000000000000000000000000000	0.093906057180318300000000000000
2		2.714285714285710000000000000000	0.001472252590174460000000000000
3		2.718309859154930000000000000000	0.000010311810403076000000000000
4		2.718281718281720000000000000000	0.000000040531975062228600000000
5		2.718281828735700000000000000000	0.000000000101774105768602000000
6		2.718281828458560000000000000000	0.000000000000177257850029682000
7		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
8		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
9		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
10		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
50		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
100		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
1,000		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
1,500		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
12,000		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
10,000,000		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
100,000,000		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##############		#NUM!	#NUM!
##############		#NUM!	#NUM!
##############		#NUM!	#NUM!
##############		#NUM!	#NUM!

<표 V. 7-3> 연분수를 이용한 계산 결과

4) 무한 곱을 이용한 계산

n	(n+1)*((u1+)/u1)*((u2+1)/u2)* .	상대오차4
1	2.000000000000000000000000000000	0 359140914229523000000000000000
2	2 500000000000000000000000000000	0 087312731383618000000000000000
3	2.666666666666670000000000000000	0 019355685672142000000000000000
4	2.708333333333330000000000000000	0 003673290507955220000000000000
5	2 716666666666670000000000000000	0 000594538083084202000000000000
6	2 718055555555560000000000000000	0 000083248078953778000000000000
7	2 718253968253970000000000000000	0.000010249301721819500000000000
8	2 718278769841270000000000000000	0 000001125203864089430000000000
9	2 718281525573190000000000000000	0.000000111425490698296000000000
10	2.718281801146380000000000000000	0.000000010047766411168700000000
11	2.718281826198490000000000000000	0.000000000831610677043909000000
12	2.718281828286170000000000000000	0.000000000063597666025328100000
13	2.718281828446760000000000000000	0.000000000004519830118841000000
14	2.718281828458230000000000000000	0 000000000000299949689082522000
15	2.718281828458990000000000000000	0.000000000000018624327099889900
16	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000001143599032449360
17	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
18	2.718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
19	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
20	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
30	2.718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
40	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
50	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
60	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
70	2.718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
80	2.718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
90	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
100	2.718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
1,000	2 718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
##########	2.718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
##########	2.718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
##########	2.718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
##########	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
##########	2.718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
##########	2 718281828459040000000000000000	0 000000000000000163371290349908
##########	#NUM!	#NUM!
##########	#NUM!	#NUM!
##########	#NUM!	#NUM!

<표 V. 7-4> 무한 곱을 이용한 계산 결과

5) 지수함수를 이용한 계산

n		exp(1/2^n)^(2^n)	상대오차5
1		2.71828182845905000000000000000	0.00000000000000163371290349908
2		2.71828182845904000000000000000	0.00000000000000163371290349908
3		2.71828182845904000000000000000	0.00000000000000163371290349908
4		2.71828182845904000000000000000	0.00000000000000147034161314918
5		2.71828182845905000000000000000	0.00000000000000179708419384899
6		2.71828182845903000000000000000	0.00000000000000441102483944755
7		2.71828182845907000000000000000	0.00000000000000816856451749536
8		2.71828182845899000000000000000	0.00000000000001895106968058970
9		2.71828182845899000000000000000	0.00000000000001895106968058970
10		2.71828182845870000000000000000	0.00000000000012808309163434500
11		2.71828182845870000000000000000	0.00000000000012808309163434500
12		2.71828182845744000000000000000	0.00000000000058944361558281700
13		2.71828182845744000000000000000	0.00000000000058944361558281700
14		2.71828182846234000000000000000	0.00000000000121384868729835000
15		2.71828182845246000000000000000	0.00000000000242197937944326000
16		2.71828182847231000000000000000	0.00000000000487843010111482000
17		2.71828182843277000000000000000	0.00000000000966749610654929000
18		2.71828182843277000000000000000	0.00000000000966749610654929000
19		2.71828182843277000000000000000	0.00000000000966749610654929000
20		2.71828182843277000000000000000	0.00000000000966749610654929000
21		2.71828182843277000000000000000	0.00000000000966749610654929000
22		2.71828182843277000000000000000	0.00000000000966749610654929000
23		2.71828182843277000000000000000	0.00000000000966749610654929000
24		2.71828182843277000000000000000	0.00000000000966749610654929000
25		2.71828182843277000000000000000	0.00000000000966749610654929000
26		2.71828180818247000000000000000	0.00000000745933402341555000000
27		2.71828180818247000000000000000	0.00000000745933402341555000000
28		2.71828180818247000000000000000	0.00000000745933402341555000000
29		2.71828180818247000000000000000	0.00000000745933402341555000000
30		2.71828180818247000000000000000	0.00000000745933402341555000000
50		2.71828182845904000000000000000	0.00000000000000326742580699817
51		2.71828182845904000000000000000	0.00000000000000163371290349908
52		2.71828182845905000000000000000	0.00000000000000000000000000000
53		1.00000000000000000000000000000	1.71828182845905000000000000000
55		1.00000000000000000000000000000	1.71828182845905000000000000000
100		1.00000000000000000000000000000	1.71828182845905000000000000000
1,000		1.00000000000000000000000000000	1.71828182845905000000000000000
1,001		1.00000000000000000000000000000	1.71828182845905000000000000000
1,010		1.00000000000000000000000000000	1.71828182845905000000000000000
1,020		1.00000000000000000000000000000	1.71828182845905000000000000000
1,023		1.00000000000000000000000000000	1.71828182845905000000000000000
1,024		#NUM!	#NUM!
1,025		#NUM!	#NUM!

<표 V. 7-5> 지수함수를 이용한 계산 결과

6) 새로운 급수를 이용한 계산

(1) 가속화된 고전적 정의를 이용한 계산

x		((1+1/x)^x)*(1+1/(2*x))
1		3 00000000000000000000000000000
2		2.81250000000000000000000000000
3		2 76543209876543000000000000000
4		2 74658203125000000000000000000
5		2 73715200000000000000000000000
6		2 73176190272062000000000000000
7		2 72839253254362000000000000000
8		2 72614604607224000000000000000
9		2 72457339125282000000000000000
10		2.72342958310500000000000000000
18		2.71993764946151000000000000000
28		2 71897924368086000000000000000
30		2 71889075546814000000000000000
33		2.71878655506065000000000000000
37		2 71868460538026000000000000000
42		2 71859539729487000000000000000
52		2 71848730976830000000000000000
70		2 71839577362600000000000000000
180		2 71829921055007000000000000000
300		2 71828809987270000000000000000
400		2 71828535906171000000000000000
1,000		2 71828239420164000000000000000
10,000		2 71828183412070000000000000000
50,000		2 71828182868000000000000000000
150,000		2.71828182849959000000000000000
200,000		2 71828182848742000000000000000
250,000		2 71828182843693000000000000000
300,000		2 71828182849358000000000000000
400,000		2 71828182826885000000000000000
500,000		2 71828182849898000000000000000
600,000		2 71828182846765000000000000000
700,000		2 71828182827282000000000000000
800,000		2 71828182843277000000000000000
900,000		2 71828182847202000000000000000
1,000,000		2 71828182829666000000000000000
1,500,000		2 71828182897929000000000000000
2,000,000		2 71828182897295000000000000000
3,000,000		2 71828182860096000000000000000
4,000,000		2 71828182840747000000000000000
5,000,000		2 71828182698772000000000000000
10,000,000		2 71828182989446000000000000000
20,000,000		2 71828182228890000000000000000
100,000,000		2 71828179998721000000000000000

<표 V. 7-6> 가속화된 고전적 정의를 이용한 계산 결과

(2) 거울상법을 이용한 계산

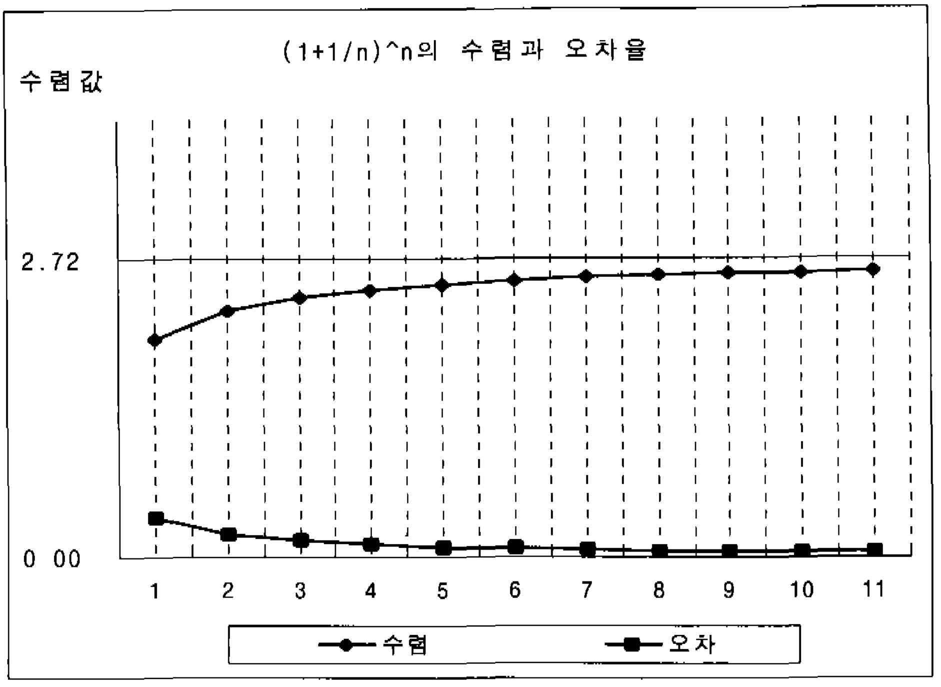
x		((x+1)/(x-1))^(x/2)
1		
2		3 00000000000000000000000000000
3		2 82842712474619000000000000000
4		2 77777777777778000000000000000
5		2 75567596063107000000000000000
6		2 74400000000000000000000000000
7		2 73706794282489000000000000000
8		2 73261141191170000000000000000
9		2 72957516784643000000000000000
10		2 72741282663551000000000000000
36		2 71898138887919000000000000000
40		2 71884840867279000000000000000
50		2 71864437722123000000000000000
60		2 71853357483475000000000000000
70		2 71846677452783000000000000000
80		2 71842342259961000000000000000
90		2 71839370249778000000000000000
100		2 71837244480063000000000000000
200		2 71830448124180000000000000000
210		2 71830237516416000000000000000
220		2 71830054970482000000000000000
230		2 71829895713721000000000000000
240		2 71829755946604000000000000000
250		2 71829632613997000000000000000
251		2 71829621084955000000000000000
252		2 71829609692846000000000000000
253		2 71829598435601000000000000000
254		2 71829587311015000000000000000
255		2 71829576317078000000000000000
256		#NUM!
257		#NUM!
258		#NUM!
259		#NUM!
260		#NUM!
300		#NUM!
400		#NUM!
500		#NUM!
600		#NUM!
1,000		#NUM!
10,000		#NUM!
100,000		#NUM!
1,000,000		#NUM!
10,000,000		#NUM!

<표 V. 7-7> 거울상법을 이용한 계산 결과

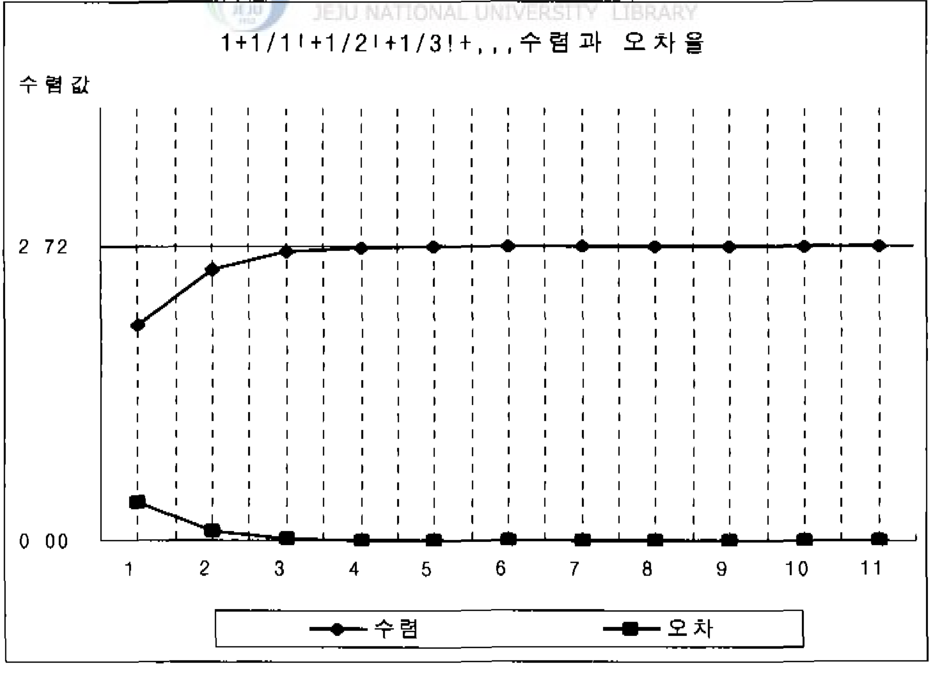
(3) 삼차 접근법을 이용한 계산

x		((x+1)^(11*x/6))*((2*x+1)^(5*x/6))*(
1		0 00000000000000000000000000000
2		2 52567806086742000000000000000
3		2 66354277716251000000000000000
4		2 69536571525755000000000000000
5		2 70655503008821000000000000000
6		2 71148624539218000000000000000
7		2 71399457808900000000000000000
8		2 71540441195815000000000000000
9		2 71625745628895000000000000000
10		2 71680376706591000000000000000
18		2 71802639125376000000000000000
27		2 71820583531207000000000000000
50		2 71826981239767000000000000000
51		2 71827050431717000000000000000
52		2 71827114411457000000000000000
53		2 71827173660653000000000000000
54		2 71827228608642000000000000000
55		2 71827279638702000000000000000
56		2 71827327093951000000000000000
57		2 71827371282008000000000000000
58		2 71827412479310000000000000000
59		2 71827450934662000000000000000
60		2 71827486872421000000000000000
61		2 71827520495290000000000000000
62		2 71827551986762000000000000000
63		#NUM!
64		#NUM!
65		#NUM!
66		#NUM!
67		#NUM!
68		#NUM!
69		#NUM!
70		#NUM!
71		#NUM!
72		#NUM!
73		#NUM!
74		#NUM!
75		#NUM!
76		#NUM!
77		#NUM!
78		#NUM!
79		#NUM!
80		#NUM!

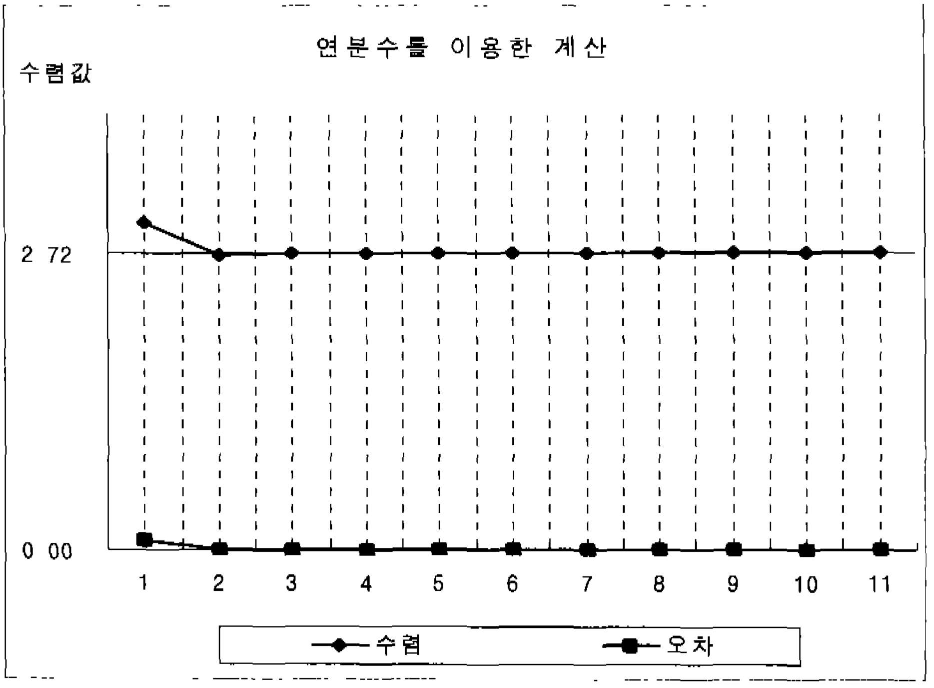
<표 V. 7-8> 삼차 접근법을 이용한 계산 결과



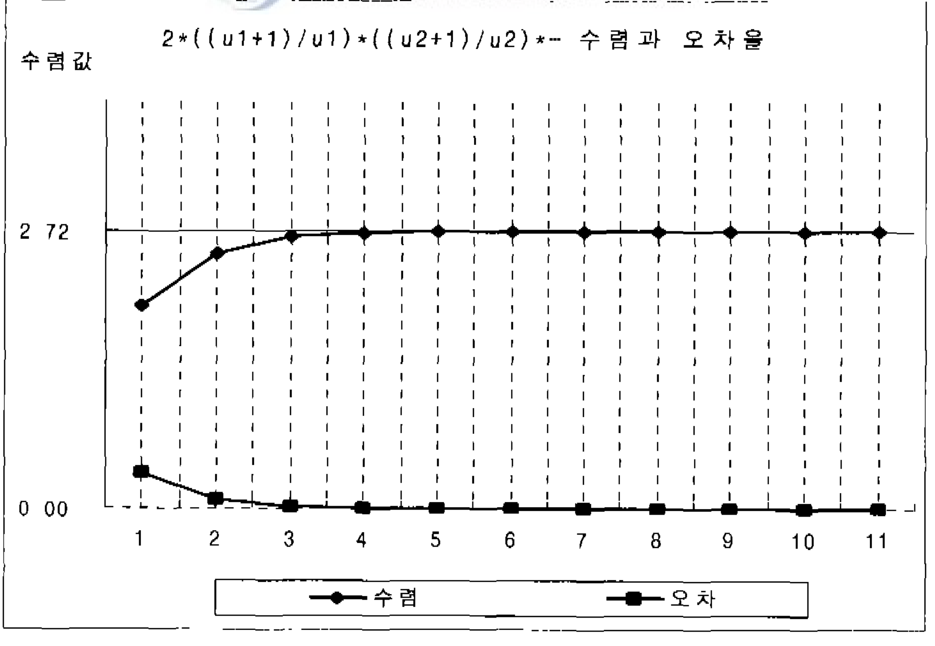
<그림 V. 7-1> 고전적 정의를 이용한 계산의 수렴과 오차율



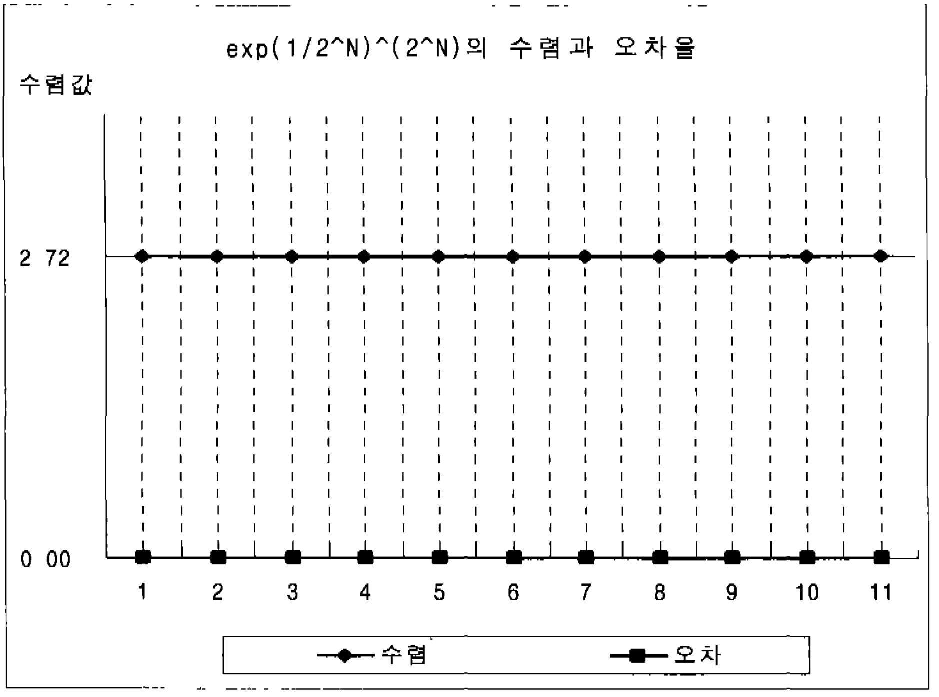
<그림 V. 7-2> 급수를 이용한 계산의 수렴과 오차율



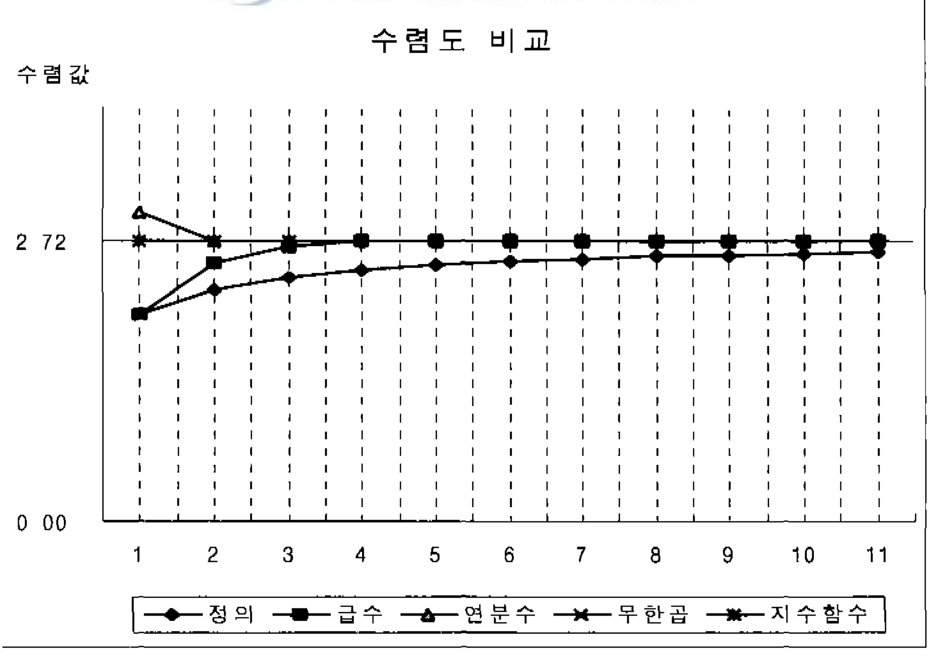
<그림 V. 7-3> 연분수를 이용한 계산의 수렴과 오차율



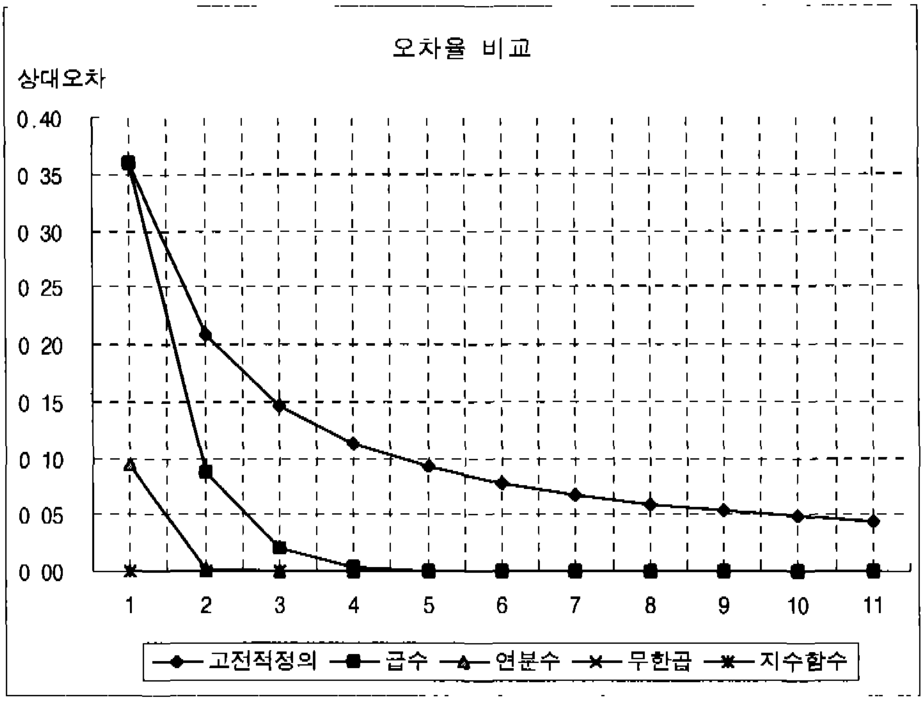
<그림 V. 7-4> 무한 곱을 이용한 계산의 수렴과 오차율



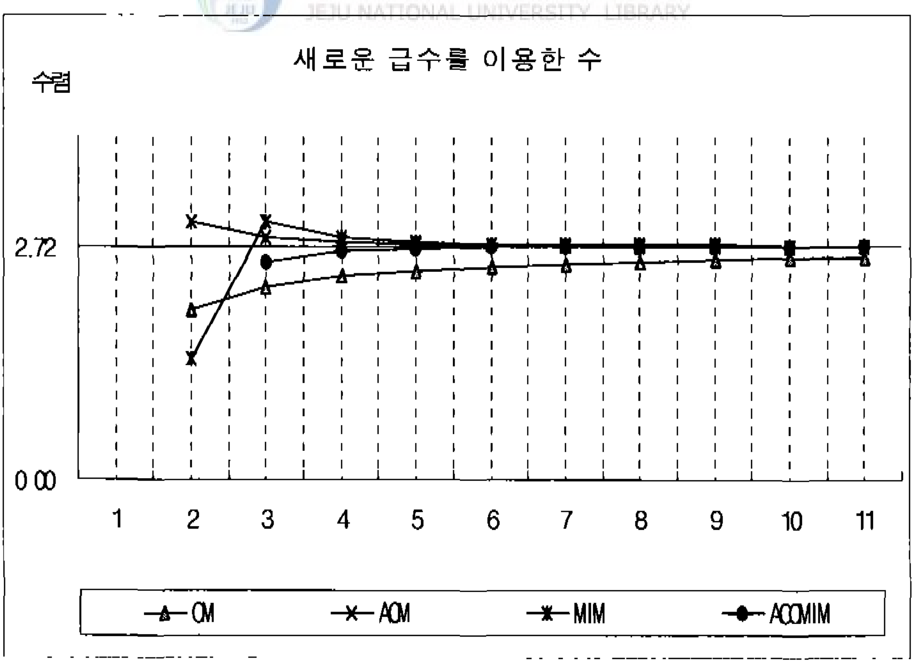
<그림 V. 7-5> 지수함수를 이용한 계산의 수렴과 오차율



<그림 V. 7-6> 수렴도 비교



<그림 V. 7-7> 오차율 비교



<그림 V. 7-8> 새로운 급수를 이용한 계산의 수렴

Ⅵ. 상수 e의 Sheet상의 계산 결과 비교

학교 현장에도 컴퓨터 바람이 불어 정보화니 정보시대니 하는 말을 누구나 하고 있고 또한 교육 자체도 컴퓨터를 이용하여 많이 하고 있다. 하지만 현재 고동학교에서는 전문적인 수학문제를 다루는 프로그램은 다루지 않고 있으며 고작해야 손쉽게 접할 수 있는 한글 또는 MS Office 정도의 프로그램이 전부이다. 이들을 활용하여 계산할 수 있는 방법이 Excel Spreadsheet를 이용하는 방법인데, 앞장에서 계산한 결과를 간단히 비교 기술하고 학교 현장에서 효율적으로 지도할 수 있는 방법을 찾아보기로 하자

1. 고전적 정의를 이용한 계산법(CM)

sheet 상에서 e 의 계산을 지도하는데 계산 작업이 수월한 반면 수렴 속도가 아주 느리고, 상대오차의 변화가 완만하여 계산의 정확도가 떨어진다. n 값이 10,000,000이 되어서야 소수 넷째 자리까지 정확한 값을 알 수 있다. 또한 1E+15 자리부터는 값이 부정확하다. 이는 엑셀의 한계로 여겨진다. 그러나 어느 정도 수열의 극한을 이해하고, 극한값으로 나타나는 무리수 e 를 이해할 수 있다.(<표 v. 7-1>, <그림 v. 7-1>, <그림 v. 7-6>, <그림 v. 7-7> 참고)

2. 급수를 이용한 계산법

e 의 급수 전개를 사용하여 계산하면 sheet 상의 계산 작업은 고전적인 방법만큼이나 쉽고 수렴속도도 고전적인 방법보다 훨씬 빠르고 상대오차의 변화도 크다 n 값이 17부터 Excel이 지원하는 소수 열 넷째 자리까지 정확하게 계산하여 보여준다. 그러나 n 값이 171부터는 계산이 되지 않는다. 이 또한 엑셀 프로그램이 가지고 있는 한계로 여겨진다. 비교적 무한급수의 합을 이해하는데 도움이 되고 무한급수의 합으로 무리수 e 의 값을 이해할 수 있어 매우 효과적이라

할 수 있다.(<표 v. 7-2>, <그림 v. 7-2>, <그림 v. 7-6>, <그림 v. 7-7> 참고)

3. 연분수를 이용한 계산법

sheet 상의 계산 작업이 다소 복잡하나 수렴속도가 아주 빠르다. 상대오차의 변화도 처음부터 변화가 크지 않아 정확도가 아주 좋다고 할 수 있다. k 값이 7 부터 1E+35 까지 Excel이 지원하는 소수 열 넷째 자리까지 정확한 값을 나타내며 k 값이 1E+36 부터는 계산되지 않는다 계속하여 간단한 수열들의 관계를 살펴 볼 수 있으나 연분수에 대한 지도가 부족한 것이 흠이다.(<표 v. 7-3>, <그림 v. 7-3>, <그림 v. 7-6>, <그림 v. 7-7> 참고)

4. 무한 곱을 이용한 계산법

sheet 상의 계산 작업은 그렇게 복잡하지 않다. 수렴속도도 비교적 빠르다. n 값이 16부터 1E+100까지 정확한 값이 나타나지만 n 값이 1E+101부터 계산되지 않는다. e 의 급수 전개를 무한 곱으로 표현할 수 있는 방법을 유도하는 것이 그다지 쉽지 않아 효율적이지는 못하다.(<표 v. 7-4>, <그림 v 7-4>, <그림 v. 7-6>, <그림 v 7-7> 참고)

5. 지수함수를 이용한 계산법

sheet 상의 계산 작업은 아주 쉽고, 수렴 값은 n 값이 1일 때는 소수 열 넷째 자리까지, n 값이 2부터 4까지는 소수 열 셋째 자리까지 정확한 값을 나타내고, n 값이 5일 때 다시 소수 열 넷째 자리까지 정확한 값을 나타내며, n 값이 6, 7일 때는 소수 열 셋째 자리까지, n 값이 8부터 13까지는 소수 열 한 번째 자리까지, n 값이 14부터 25까지는 소수 열 자리까지, n 값이 26부터 30까지는 소수 아홉째 자리까지, n 값이 30부터 51까지는 소수 열 셋째 자리까지 정확한 값을 계산하고 나서 n 값이 52일 때 소수 열 넷째 자리까지 계산하고 나서는 n 값이 53부터 1,023까지는 1.00000…이 되다가 n 값이 1,024부터는 계산되지 않는

다. 비교적 부정확하고, 단순히 e 의 값을 어느 정도라고 하는 선에서 수를 이해할 수 있을 뿐이다.(<표 v. 7-5>, <그림 v. 7-5>, <그림 v. 7-6>, <그림 v. 7-7> 참고)

6. 새로운 급수를 이용한 접근 방법

이 방법은 가장 최근에 발견된 방법으로 자연 로그함수의 매크로린 급수 전개에 착안하여 고전적 정의를 이용한 방법에서 출발하여 오차를 빼는 방법으로 급수를 만들어 접근하는 방법으로<표 v. 7-6>, <표 v. 7-7>, <표 v. 7-8> <그림 v. 7-8>올 참고하여 보면 sheet 상의 계산 작업이 다소 복잡하고 수렴 값들이 정확하지 못하고, 특히 학교 현장에서는 급수전개를 설명하기가 쉽지 않아서 비효율적이라고 하겠다

이상에서 학교 현장에서 실험수학의 방편으로 직접 탐구하고 관찰하기에는 고전적 정의를 이용한 접근방법 (수렴 속도가 아주 느리고, 수렴 값이 소수 열넷째 자리까지 나타나지는 않지만 수열의 극한을 이해하고 그 극한값으로 무리수 e 를 취할 수 있다)과 급수를 이용한 접근방법(무한 급수를 이해하고 무한급수의 합으로 무리수 e 를 취할 수 있다.)이 Excel sheet 상에서 계산 작업이 쉽고 수렴정도와 오차율을 비교하기가 수월하고, 짧은 시간에 e 의 값을 소수열 넷째 자리까지 정확하게 확인할 수 있어서 지도하는 데는 효과적이라고 할 수 있다. 여기에 덧붙인다면 정확도나 수렴속도가 좋은 연분수를 이용한 계산법으로 지도하는 것도 흥미를 유발하는 데는 효율적인 도구가 될 수 있으나, 시간이 많이 소요된다는 점을 고려하여야 할 것이다.

VII. 결 론

e 라는 수는 단순히 극한값으로 지수함수나 자연로그함수의 밑 이상의 중요한 의미를 갖고 있는 수임에도 불구하고 학생들에게 그러한 중요성을 인식하도록 하는 데에 있어서는 현행 교과서 내용만으로는 그 설명이 턱없이 부족한 것이 사실이다. 따라서 상수 e 의 극한에 의한 정의 이외에 수를 구체적으로 이해하기 위하여 이 논문에서는 상수 e 의 해석적 접근에서 벗어나 e 값을 구하기 위한 여러 형태의 접근 방법을 Excel Spreadsheet 상에서 직접 계산하고 그래프로 그리는 실험을 하였다. 그 결과를 비교, 관찰하여 효율적인 방법을 골라 지도함으로써 무리수 e 의 이해와 더불어 무리수 e 로 표현되는 지수함수, 자연로그함수 뿐만 아니라 무리수 e 를 사용하는 모든 표현을 이해하는데 좀 더 가까이 접근하고자 하였다.

하루가 다르게 정보화사회로 접어들면서 새로운 정보공학적인 도구들이 교육현장에 나타남으로써 수학교육에서도 실험과 탐구, 관찰이라는 활동을 통해 수학활동을 즐거운 교과활동으로 변화시켜야 한다. 뿐만 아니라 첨단기술을 수학교육에 도입하여 창의적이고 실용적인 지식을 전달하고 변화하는 사회 속에서 과학기술의 기초로서 수학이 중요한 역할을 계속 담당하도록 하기 위한 개혁이 요구된다. 아울러 학교 내에서도 실험수학 등의 새로운 수학 교육방법을 조속히 도입하여, 수학의 중요성을 재차 강조하고 또 학생들에게도 수학이 어려운 교과목이 아니라 자연현상을 설명할 수 있는 재미있고 즐거운 교과목임을 강조할 필요가 있다.

참고문헌

[1] 양영오(1996), 「해석학」, 청문각

[2] 김현숙(1989), "무리수의 지도 방법에 대한 연구" 충북대학교 석사학위 논문

[3] 안봉숙(1989), "초월수 개념의 지도" 충북대학교 석사학위 논문

[4] 양창길(1996), "극한과 도함수에 대한 실험수학적 접근" 제주대학교 석사학위 논문

[5] 최혜란(1998), "자연로그의 밑 e에 관한 小考" 홍익대학교 석사학위 논문

[6] Eli, Maor(1994), *e : The Story of a Number*, Princeton University Press.

[7] Johnson, R & Pfaffenberger, W.E(1981), *Foundation of Mathematical Analysis*, marcel dekker, inc.

[8] Misner, C. & Coony, P(1991), *Spread sheet Physics*, Addison-Wesley Publishing Co.

[9] Rudin, W(1982), *Principle of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Kogakusha, Inc.

[10] Sheran, K. Stein(1982), *Calculus and Analysis*, McGraw-Hill, Kogakusha, Inc

[11] John Knox. & Harlan, Brothers(1999), Novel series-based Approximations to e, collage mathematics Journal vol 30, No4, 269-273

[12] 기타

http://xavier. gourdon. free. fr/Constants/E/e. html

http://forum. swarthmore. edu/library/topics/about_e/

http://duck. usask. ca/~fowlerr/e.html

http://www. cs. arizon. edu/icon/oddsends/e. html

http://www. mathsoft. com/asolve/constant/e/e. html

http://members. aol. com/jeff570/constants. html

http://mathworld. wolfram. com/e. html

<Abstract>

The Key to calculation constant e
through the practical use for Spreadsheet.

Yang, Young - Gun

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea
Supervised by Kim, Chul - Soo

This thesis arrange an important constant e in mathematics which deal with contents negligently and instruct it using computer in High School Classroom. Furthermore, In the educational spot this thesis find the most effective way to instruct High School students and help students to understand and approach constant e easily.*

* A thesis submitted to Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Education in August, 2000