碩士學位論文

EUCLID 幾何에서의 平均의 理解

指導教授 玄 進 五

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

吳 昌 殷

1998年 8月

EUCLID 幾何에서의 平均의 理解

指導敎授 玄 進 五

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

1998年 6月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 吳 昌 殷

吳昌殷의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1998年 7月 日

審査委員長 ______________ 印

審 査 委 員 ______________ 印

審 査 委 員 ______________ 印

〈抄 錄〉

EUCLID 幾何에서의 平均의 理解

吳 昌 殷

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 玄 進 五

본 논문에서는 현재 고등학교 공통수학에서 다루는 여러 가지 평균 즉, 산술평균·기하평균·조화평균에 대하여 대수적 접근 방법 이외의 기하학적 방법으로 접근하고 이해하기 위하여, 평균에 대한 정의를 다른 방법으로 시도하여 보았으며 이들 평균을 여러 가지 도형 위에서 나타내어 서로 비교 관찰하였다.

또한 두 개의 양의 실수가 아닌 여러 개의 양의 실수에 대한 산술평균·기하평균·조화평균의 관계를 알아보았고 기하평균과 조화평균을 좀더 일반화하여 반점(Inverse points)과 조화열점(Harmonic points)에서 평균에 대하여 소개하였다.

차 례

Ⅰ. 서 론

우리는 무심코 '평균'이라는 단어를 익숙하게 사용하고 있다. 학력고사의 평균점수, 일인당 평균 국민소득, 평균 물가지수 등, 우리 주변에서 흔히 평균이라는 단어를 찾아볼 수 있다. 그러나 이 평균은 겉보기에는 모든 것을 매우 정확하게 설명해 주는 것처럼 보이지만 실제로는 터무니없는 내용을 담을 수도 있다.

예를 들어보면.

어느 농촌 마을의 1인당 한 달 평균소득이 100만 원이라고 하면 농촌치고는 상당히 고소득을 올리는 마을이라고 생각된다. 그런데 이 마을의 인구는 50명으로 대부분 소작농이거나 은퇴한 노인들로서 이 마을 사람들 50명의 한 달 소득은 대체로 10만원에서 20만 원 정도에 불과하다. 그런데 이 마을은 경치가 매우 좋고 공해가 없는 곳이라서 한 달 소득 1500만 원에서 2000만 원 가량인 부자 세 사람이 이곳에 집을 사서 주말에만 지내다 간다고 할 때 평균소득 100만 원이라는 엉뚱한 숫자는 나온다. 이 마을 사람들의 평균소득은 10만원에서 20만원 정도에 불과한 훨씬 낮은 금액이라는 것이 더 정확한 사실이다.

이 예는 다소 과장된 것으로 생각되지만, 우리 주변에서 평균의 허구를 보여주는 실례는 쉽게 발견된다.

현재 6차 교육과정에 의하여 개정된 중학교 2학년 교과서는 산술평균에 대해서만, 고등학교 교육과정 공통수학에서 다루어지고 있는 평균에 관한 내용은 산술평균・기하평균・조화평균에 관해서 대수학적인 정의를 내리고 대소 관계를 알아보는 접근 방법을 하고 있다. 그러나 평균에 대한 다양한 정의와 그 정의가 갖는 의미와 이들 평균의 갖는 대소관계를 유클리트 기하의 관점에서 관찰하고 표현하는 사고 훈련을 할 필요성이 있다. 그렇게 함으로서 평균에 대한 이해의 정도가 깊어지고 아울러 수학교육의 목적 중의 하나인 논리적이고 창의적인 사고력과 표현력을 배양시킬 수 있다고 본다.

따라서 중 고등학교 과정에서 평균에 관하여 기하학적 접근을 할 수 있도록 이론적 기초가 마련되어야 하며 그런 입장에서 본 연구는 여러 가지 평균의 기하학적 이해와 접근에 대한 기초를 바탕으로 평균의 개념을 일반화하여 정립하는데 목적이 있다.

Ⅱ. 본 론

2. 1 평균의 종류와 정의

오늘날 고등학교에서 사용되고 있는 평균에 대한 3가지 개념을 처음으로 발견한 사람은 피타고라스이다. 아리스토텔레스의 제자인 유데미안이 기원전 335년경에 피타고라스의 업적을 기록하면서 지금 우리가 다루고 있는 세 가지의 평균을 언급하고 있다.

기하학에서 사용되는 여러 가지 평균에 관한 용어의 뜻을 분명히 해 둘 필요가 있으며, 평균의 기하학적인 이해와 접근을 위하여 여기서 사용되는 수는 양의 실수로 한정한다.

(1) 산술평균

〔**정의** 1〕 두 개의 양수 a, b의 산술평균은 a에서 초과하는 양과 b에서 모자라는 양을 같은 수로 정의하여, 두 수의 중간에 있는 수 $\frac{a+b}{2}$으로 정의한다.

(2) 기하평균

〔**정의** 2〕 두 개의 양수 a, b의 기하평균은 $\sqrt{ab}$로 정의한다.

〔**예** 1〕 인플레가 심각한 나라의 물가의 예를 들면, 1997년에는 1996년보다 2배가 올랐고, 다음해인 1998년에는 1997년보다 무려 8배나 올랐다고 할 때, 이 나라의 물가의 한해에 평균 상승속도는?

(풀이) 2배와 8배의 산술평균 5배가 아니고 기하평균 $4=\sqrt{2\cdot 8}$이므로 4배이다. 1991년에 100원 짜리 물건이 그 다음해에 2배가 오르면 200원이 되고, 다시 1993년에는 8배가 오르니 1600원이다. 그런데 한 해에 평균 5배씩 물가가 상

승한다고 하면 100원 짜리 가 500원이 되고, 다시 2500원이다. 따라서 평균 4배씩 물가가 상승하였다.

(3) 조화평균

〔정의 3〕 조화평균은 두 수의 역수의 산술평균을 구하여 그 수의 역수로 정의한다.

즉, 두 개의 양수 a, b의 조화평균은 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 이다.

〔정의 4〕 서로 다른 두 개의 양의실수 a, c의 산술평균[1]은 $\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{a}$ 가 성립되는 양수 b로 정의한다.

〔정의 5〕 서로 다른 두 개의 양의실수 a, b의 기하평균[2]은 $\dfrac{c-a}{b-c}=\dfrac{a}{c}$ 가 성립되는 양수 c로 정의한다.

〔정의 6〕 서로 다른 두 개의 양의실수 a, b의 조화평균[3]은 $\dfrac{c-a}{b-c}=\dfrac{a}{b}$ 를 만족하는 양수 c로 정의한다.

〔정의 7〕 헤론의 평균(Heronian Mean) 두 개의 양의실수 a, b의 헤론의 평균은 $\dfrac{(a+\sqrt{ab}+b)}{3}$ 로 정의한다.

〔예 2〕 피라미드의 절두체의 부피는 절두체의 높이와 절두체의 밑면과 윗면의 넓이에 대한 헤론의 평균을 곱한 값이다.

1. 원리를 찾아라.(1993년 박영훈 지음) P. 72
2. 원리를 찾아라.(1993년 박영훈 지음) P. 72
3. 원리를 찾아라.(1993년 박영훈 지음) P. 72

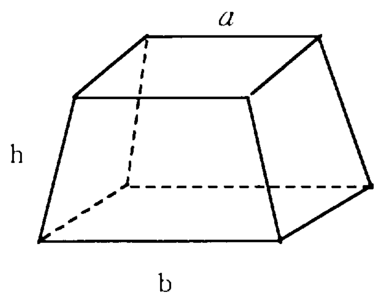

Fig - 1

윗면의 한 변의 길이가 a 이고, 밑면의 한 변의 길이가 b, 그리고 높이가 h 인 피라미드 (Fig - 1)의 부피는

$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)=h\cdot R$ 이다.

(단, $R=\frac{(x+\sqrt{xy}+y)}{3}$ 여기서 $x=a^2$, $y=b^2$ 이다.)

2. 2 평균에 관한 대수적 성질

(1) 조화평균 · 산술평균 · 헤론의 평균 · 기하평균의 성질

① 조화평균 $H=\frac{2ab}{a+b}$ 에 대하여 어떤 수 n이 존재하여

$a=H+\frac{a}{n}$ 이고, $H=b+\frac{b}{n}$ 이다.

(증명) $H=\frac{2ab}{a+b}$ 이므로 $a=H+\frac{a}{n}$, $H=b+\frac{b}{n}$ 에 대입하면

$a=\frac{2ab}{a+b}+\frac{a}{n}$ 이고, $\frac{2ab}{a+b}=b+\frac{b}{n}$ 이다.

$a-\frac{2ab}{a+b}=\frac{a}{n}$ 이고, $\frac{2ab}{a+b}-b=\frac{b}{n}$ 이므로

$\frac{a}{n} = a - \frac{2ab}{a+b} = \frac{a^2-ab}{a+b}$ 이고, $\frac{b}{n} = \frac{2ab}{a+b} - b = \frac{ab-b^2}{a+b}$ 이다.

따라서 이 두 식에서 모두 $n = \frac{a+b}{a-b}$ 이다.

② 조화평균 $H = \frac{2ab}{a+b}$ 에 대하여 $\frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 이다.

(증명) $H = \frac{2ab}{a+b}$ 을 $\frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 에 대입하면

$H - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \frac{2ab-a^2-ab}{a+b} = \frac{ab-a^2}{a+b}$ 이므로

$\frac{1}{H-a} = \frac{a+b}{ab-a^2}$ 마찬가지 방법으로 $\frac{1}{H-b} = \frac{a+b}{ab-b^2}$ 이다.

그러므로

$\frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-b} = \frac{a+b}{ab-b^2} + \frac{a+b}{ab-a^2} = \frac{(a+b)}{(a-b)}(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 이다.

③ 실수 a, b, c가 이 순서로 조화평균을 이루면,

$\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$ 도 조화평균을 이룬다.

(증명) 실수 a, b, c가 이 순서로 조화평균을 이루면

$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ 즉, $b = \frac{2ac}{a+c}$ 이다.

$\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ 가 조화평균을 이루려면

$\frac{2(c+a)}{b} = \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c}$ 이어야 한다. $b = \frac{2ac}{a+c}$ 이므로 $bc + ab = 2ac$ 이다.

그러므로 $\frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} = \frac{bc+c^2+a^2+ab}{ac}$

$$= \frac{a^2+2ac+c^2}{ac}$$

$$= \frac{(a+c)^2}{\frac{b(a+c)}{2}}$$

$$= \frac{2(a+c)}{b}$$

따라서, $\dfrac{2(c+a)}{b} = \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{a+b}{c}$ 이다.

〔**정리** 1〕 m, n이 양의 정수이고 $m \geq n$일 때 m과 n의 산술평균, 헤론의 평균, 기하평균 사이에는

$$\sqrt{mn} \leq \frac{(m+\sqrt{mn}+n)}{3} \leq \frac{(m+n)}{2} \text{ 이다.}$$

등식이 성립하기 위한 필요충분조건은 $m=n$이다.

(증명) $$\frac{m+n}{2} - \frac{m+\sqrt{mn}+n}{3} = \frac{3m+3n-2m-2\sqrt{mn}-2n}{6}$$

$$= \frac{m+n-\sqrt{mn}}{6}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{mn}-\sqrt{mn}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{mn}}{6} \geq 0$$

그러므로 $\dfrac{(m+\sqrt{mn}+n)}{3} \leq \dfrac{(m+n)}{2}$ 이다.

같은 방법으로 $\sqrt{mn} \leq \dfrac{(m+\sqrt{mn}+n)}{3}$ 이다.

따라서 $\sqrt{mn} \leq \dfrac{(m+\sqrt{mn}+n)}{3} \leq \dfrac{(m+n)}{2}$ 이다.

(2) 여러 개의 양의실수에 대한 산술평균 · 기하평균

〔**정리** 2〕 3개의 양의실수 a, b, c에 대한 산술평균과 기하평균의 관계는

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \text{ 이다.}$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)

(증명) $3w=a+b+c$ 이라고 두면 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $c+w\geq 2\sqrt{cw}$ 이고,

$4w=a+b+c+w$ 이므로

$$w=\frac{a+b+c+w}{4}\geq\sqrt{\frac{ab+cw}{2}}\geq\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cw}}$$

4승하면 $w^4\geq abcw$ 가 되므로 $w^3\geq abc$ 따라서 $\frac{a+b+c}{3}=w\geq\sqrt[3]{abc}$

등호는 $a=b$, $c=w$, $ab=cw$ 일 때이므로 $a=b=c$ 일 때 성립된다.

한편, $f(x)=9(x^3+b^3+c^3)-(x+b+c)^3$ 로 놓으면

$$f'(x)=27x^2-3(x+b+c)^2=3(4x+b+c)\{2x-(b+c)\}$$

$$f''(x)=6\{8x-(b+c)\}$$

$x>0$ 에서 $f'(x)=0$ 이면 $x=\frac{b+c}{2}$ 이고, $f''\left(\frac{b+c}{2}\right)=18(b+c)>0$

이므로 $f(x)$ 는 $x=\frac{b+c}{2}$ 에서 최소값 을 갖는다. 즉,

$$f(x)\geq f\left(\frac{b+c}{2}\right)=9\left\{\left(\frac{b+c}{2}\right)^3+b^3+c^3\right\}-\left(\frac{b+c}{2}+b+c\right)^3$$

$$=\frac{27}{8}(b+c)(3b^2-2bc+3c^2)-\frac{27}{8}(b+c)^3$$

$$=\frac{27}{4}(b+c)(b-c)^2\geq 0$$

따라서, $9(x^3+b^3+c^3)\geq(x+b+c)^3$ 이다.

$x=a$ 를 대입하면, $9(a^3+b^3+c^3)\geq(a+b+c)^3$

그러므로 $\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$

등호는 $b=c$, $a=\frac{b+c}{2}$ 에서 즉, $a=b=c$ 일 때 성립한다

〔따름 정리 1〕 표면적이 일정한 직육면체 중 체적이 최대인 것은 정육면체이다.

(증명) 직육면체의 3개의 길이를 a, b, c 이라 하고, 그 표면적을 S, 체적을 V 라 하자. 그러면 $S=2(bc+ca+ab)$ 가 일정할 때 $V=abc$ 가 최대가 되는 것은 $a=b=c$ 일 때이다.

$\frac{bc+ca+ab}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ 이므로

이 관계를 L과 S로 고치면 $\frac{S}{6} \geq \sqrt[3]{V^2}$. 그러므로 $\sqrt{\frac{S^3}{216}} \geq V$

등호는 $a=b$, $c=w$, $ab=cw$ 일 때이므로 $a=b=c$일 때 성립하므로 정육면체일 때 체적은 최대가 된다.

〔정리 3〕 임의의 실수 a, b에 대하여 $\frac{f(a)+f(b)}{2} > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$를 만족하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고, $\frac{f(a)+f(b)}{2} < f\left(\frac{a+b}{2}\right)$인 연속함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

(증명) $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선에서 $x=\frac{a+b}{2}$ 일 때의 함수 값이 된다. 그리고 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$는 $y=f(x)$의 $\frac{a+b}{2}$ 일 때의 함수 값이다. 그러므로 $x=\frac{a+b}{2}$ 에서 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 이면 아래로 볼록인 함수가 된다.

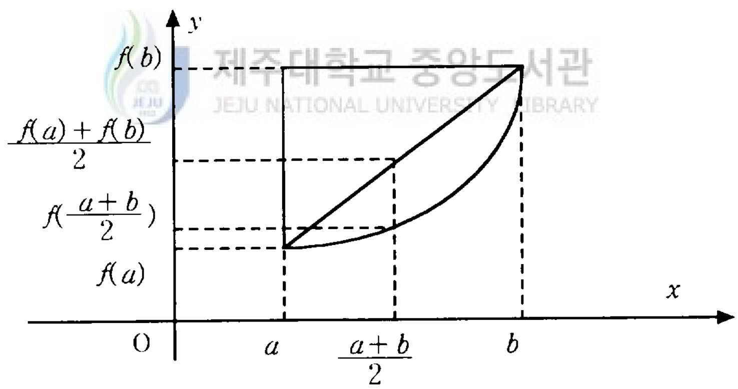

Fig - 2

〔정리 4〕 4개의 실수 a, b, c, d를 서로 다른 양수라 할 때, P, Q, R, S를

$P=\frac{a+b+c+d}{4}$, $R=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}}{6}$

$Q = \sqrt[4]{abcd}$, $S = \dfrac{\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{abd} + \sqrt[3]{acd} + \sqrt[3]{bcd}}{4}$

이라 하면 이때 P, Q, R, S의 대소 관계는 $P > R > S > Q$이다.

(증명) $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, $a+c \ge 2\sqrt{ac}$, $a+d \ge 2\sqrt{ad}$,

$b+c \ge 2\sqrt{bc}$, $b+d \ge 2\sqrt{bd}$, $c+d \ge 2\sqrt{cd}$ 에서 변 변끼리 더하면.

$3a+3b+3c+3d \ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd})$

양변을 12로 나누면,

$$\frac{a+b+c+d}{4} \ge \frac{(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd})}{6} \qquad \therefore P \ge R$$

a, b, c, d중의 3개. 즉 a, b, c 에 대하여

$$\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{bc}\sqrt{ca}\sqrt{ab}} = 3\sqrt[3]{abc}$$

같은 방법으로 하여 이러한 부등식 4개를 변 변끼리 더하면.

$$2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}) \ge 3(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd})$$

양변을 12로 나누면, $R \ge S$이다.

또, $\dfrac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}}{2} \ge \sqrt{\sqrt[3]{abc}\,\sqrt[3]{abd}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{2} \ge \sqrt{\sqrt[3]{acd}\,\sqrt[3]{bcd}}$ 이므로

$$\frac{\dfrac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}}{2}+\dfrac{\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{2}}{2} \ge \sqrt{\frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}}{2}\;\frac{\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{2}}$$

$$\ge \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{abc}\,\sqrt[3]{abd}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{acd}\,\sqrt[3]{bcd}}}$$

$$= \sqrt[4]{\sqrt[3]{abc}\,\sqrt[3]{abd}\,\sqrt[3]{acd}\,\sqrt[3]{bcd}}$$

$$= \sqrt[4]{abcd}$$

따라서 $\dfrac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4} \ge \sqrt[4]{\sqrt[3]{abc}\,\sqrt[3]{abd}\,\sqrt[3]{acd}\,\sqrt[3]{bcd}}$

$= \sqrt[4]{abcd}$ $\therefore$ $S \ge Q$이다.

a, b, c, d는 서로 다른 양수이므로. $P > R > S > Q$이다.

2. 3 기하학적인 관점에서의 평균

유클리트 평면 위에 임의의 두 선분이 주어질 때 이들 두 선분에 대하여 여러 가지 도형 위에서 산술평균 ·기하평균·조화평균을 나타낼 수 있다.

(1) 원과 사다리꼴에 나타나는 산술평균·기하평균·조화평균

〔**정리 5**〕 원 (O)의 지름 AC 위에 중점 O이 아닌 점 B를 정하고 지름 AC에 수직선을 그었을 때 원주와 만나는 점을 D라하고 OD에 수선을 그어 그 발을 F라 한다. 이때 선분 OD, BD, FD는 각각 선분 AB와 BC의 산술평균· 기하평균· 조화평균을 나타내고

산술평균 > 기하평균 > 조화평균 이다.

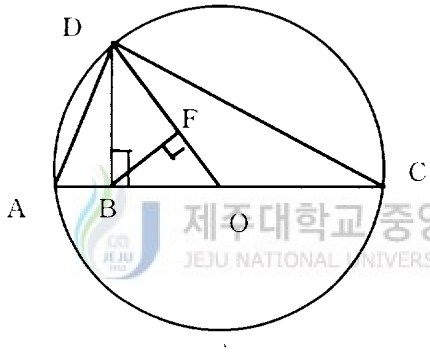

Fig - 3

(증명) 위의 도형(Fig- 3)에서 OD = 반지름 = $\frac{1}{2}(AB+BC)$ 이고

이것은 산술평균이다.

$\triangle ABD$와 $\triangle DBC$는 $\angle DAB = \angle CDB$ 이므로 서로 닮은 삼각형이다.

따라서 $AB : DB = DB : BC$ 이므로 $BD^2 = AB \cdot BC$

그러므로 $BD = \sqrt{AB \cdot BC}$ 이고 이것은 기하평균이다.

$\triangle DFB$ 와 $\triangle DBO$ 는 서로 닮은 삼각형이다.

따라서 $FD : DB = DB : OD$ 이므로

$FD = \dfrac{DB^2}{OD} = \dfrac{AB \cdot BC}{\frac{1}{2}(AB+BC)} = \dfrac{2AB \cdot BC}{AB+BC}$ 이고 이것은 조화평균이다.

〔정리 6〕 밑변의 길이가 a 이고 윗변의 길이가 b 인 사다리꼴 $ABCD$ 에서 밑변 BC 에 적당한 평행선이 선분 AB, CD 와 만나는 점을 각각 E, F 라할 때 산술평균은 선분 AB 와 CD 의 중점을 이은 선분 EF 이고, 기하평균은 사다리꼴 $AEFD$ 와 $EBCF$ 가 서로 닮음일 때 선분 EF 이며, 조화평균은 두 대각선의 교점을 지나는 선분 EF 의 길이이다.

(증명)

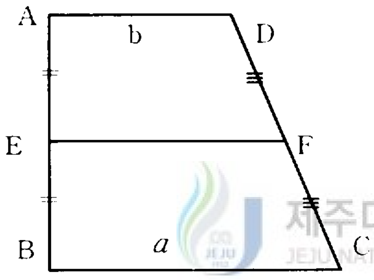

Fig-4-1

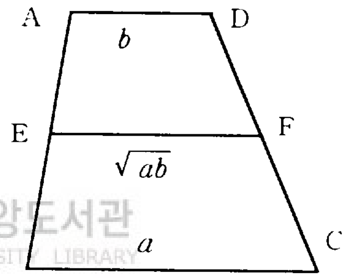

Fig-4-2

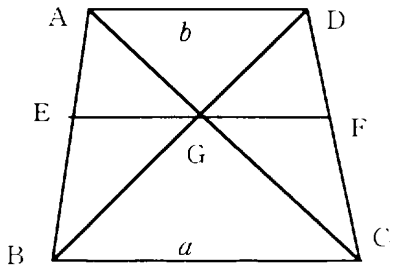

Fig-4-3

첫 사다리꼴(Fig-4-1)에서 $EF=\frac{(a+b)}{2}$ 이것은 산술평균이다.

두 번째 사다리꼴(Fig-4-2)에서 $AD:EF=EF:BC$ 이므로

$EF=\sqrt{AD\cdot BC}=\sqrt{ab}$ 이것은 기하평균이다.

세 번째 사다리꼴(Fig-4-3)에서 $\triangle ABD \backsim \triangle EBG$ 이다.

$AD:EG=BD:BG$ 에서 $EG=\frac{AD\cdot BG}{BD}$

$\triangle BCD \backsim \triangle GFD$ 에서 $BC:GF=BD:GD$ 이므로 $GF=\frac{BC\cdot GD}{BD}$

따라서 $EF=EG+GF=\frac{AD\cdot BG+BC\cdot GD}{BD}=\frac{2ab}{(a+b)}$ 이것은 조화평균이다.

(2) 조화평균의 작도

〔**정리 7**〕 선분 OB 의 점 B 에서 수직선을 그어 BD 와 BE 의 길이가 같게 되도록 선분 OB 위의 점 A 에서 수직선을 그어 OD 와 의 교점을 F 라하고 선분 FE 와 선분 OB 와 의 교점을 점 C 라 하면 선분 OC 의 길이는 선분 OA 와 선분 OB 의 조화평균이다.

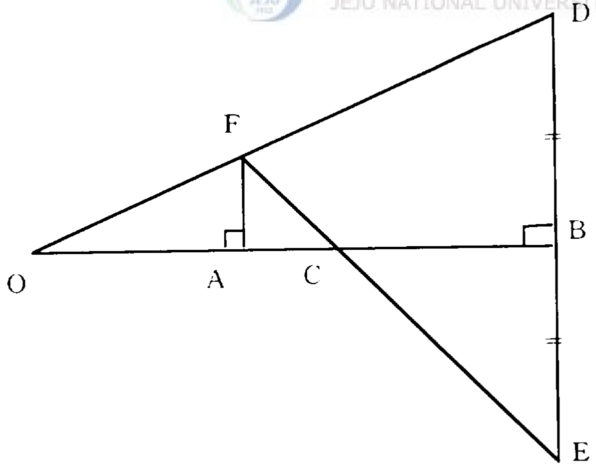

Fig - 5

(증명) (Fig - 5)에서 삼각형 $\triangle OAF \backsim \triangle OBD$ 에서 $\triangle ACF \backsim \triangle BCE$ 으므로

$OA : OB = AF : BD = AF : BE = AC : CB = (OC - OA) : (OB - OC)$

$OA \cdot (OB - OC) = OB \cdot (OC - OA)$

$OA \cdot OB - OA \cdot OC = OB \cdot OC - OB \cdot OA$

$OA \cdot OB + OB \cdot OA = OB \cdot OC + OA \cdot OC$

$2OA \cdot OB = (OB + OA) \cdot OC$

$$OC = \frac{2OA \cdot OB}{(OB + OA)}$$

따라서 선분 OC 는 선분 OA 와 OB 의 조화평균이다.

(3) 황금분할과 세원의 공통외접선의 기하평균

[정리 8] 정오각형 $ABCDE$ 의 대각선 AD 와 BE 의 교점을 P 라 하면 선분 BP 는 선분 BE 와 선분 PE 의 기하평균이다.

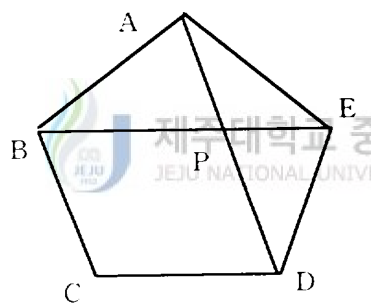

Fig - 6

(증명) 사변형 $BCDP$ 는 평행사변형이므로 $CD = BP$ 이고 $BA = BP$ 이 된다.

한편, 이등변삼각형 ABE 와 이등변삼각형 EAD 는 합동이므로

$\angle ABE = \angle AEB = \angle EAD$ 이다. 따라서, $\triangle ABE \backsim \triangle PEA$ 이 되고

$\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{AE}{PE}$ 이다. 여기에 $AB = BP$, $AE = BP$ 를 대입하면,

$\frac{BE}{BP} = \frac{BP}{PE}$ 가 된다.

따라서, $BP = \sqrt{BE \cdot PE}$ 는 선분 BE 와 선분 PE 의 기하평균이다.

〔**따름 정리**〕 선분 BE 위에 한 점 $P(a)$ 를 잡았을 때, $\frac{BE}{BP} = \frac{BP}{PE}$ 이 관계가 성립하면 점 P 는 선분 BE 를 황금 분할하는 황금분할 점이다.

(증명)

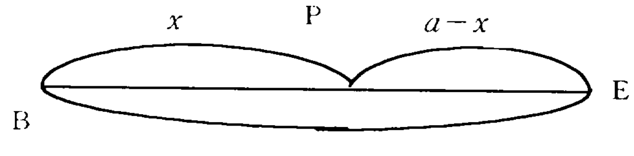

Fig - 7

위의 그림(Fig - 8)에서 $BE = a$, $BP = x$ 라고 두면 위의 황금분할 식에서

$BE = a$, $BP = x$, $PE = a - x$ 이므로 $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ 이다.

즉, $x^2 + ax - a^2 = 0$ 이다. 따라서, 근의 공식에서 $x = \frac{\sqrt{5}a}{2} - \frac{a}{2}$ 이다.

〔**정리 9**〕 반지름의 길이가 a, b, c 인 세원 $(A)_a$, $(B)_b$, $(C)_c$ 가 두 직선 l, m 을 공통 접선으로 하여 서로 접하고 있을 때 가운데 원의 반지름 b 는 a, c 의 기하평균이다.

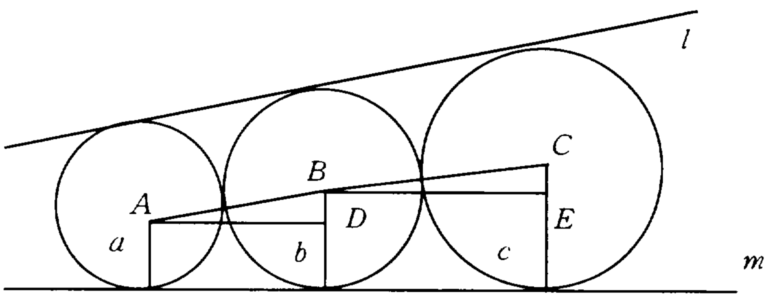

Fig - 8

(증명) $\triangle ABD \backsim \triangle BCE$ 이므로.

$AB : BD = BC : CE$ 이다.

$(a+b) : (b-a) = (b+c) : (c-b)$

$(a+b)(c-b) = (b-a)(b+c)$ 에서

$b^2 = ac$ 이다.

그러므로 $b = \sqrt{ac}$

(4) 반점(Inverse points)과 기하평균

〔정의 8〕 원 $(O)_r$를 중심이 O이고 반경이 r인 원 이라고 하자. 임의의 점 $P \neq O$에 대하여 $(O)_r$에 관한 P의 반점(inverse points) P'는 $OP \cdot OP' = r^2$인 반 직선 OP위의 유일한 점 P'이다.

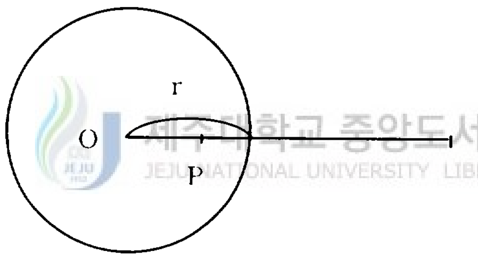

Fig - 9

〔정리 10〕 원 $(O)_r$의 내부에 있는 점 P에서 OP에 수선을 그어 $(O)_r$와 만나는 점을 T, U라하고 T와 U에서 $(O)_r$의 접선을 그었을 때 만나는 점을 P'이라 하면 선분 OT는 선분 OP와 선분 OP'의 기하평균이다.

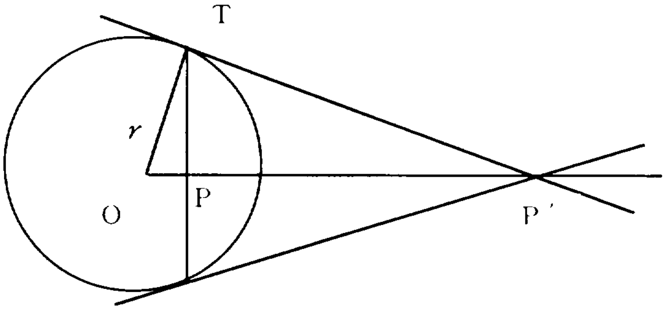

Fig - 10

(증명) 직선 OP는 T와 U에서의 접선의 교점 P'을 지나므로

$\triangle OPT \backsim \triangle OTP'$ 이다.

$\dfrac{OP}{OT} = \dfrac{OT}{OP'}$ 에서 $OT^2 = OP \cdot OP'$ 이다. 이는 P'가 P의 반점이고

$OT = \sqrt{OP \cdot OP'}$ 이다.

〔**정리** 11〕 한 원의 중심 C를 지나는 선분 PP'의 연장선과 선분 PP'의 연장선 위의 점 O에서 이 원에 그은 접선의 접점을 T라 하면 선분 OT는 선분 OP와 OP'의 기하평균이다.

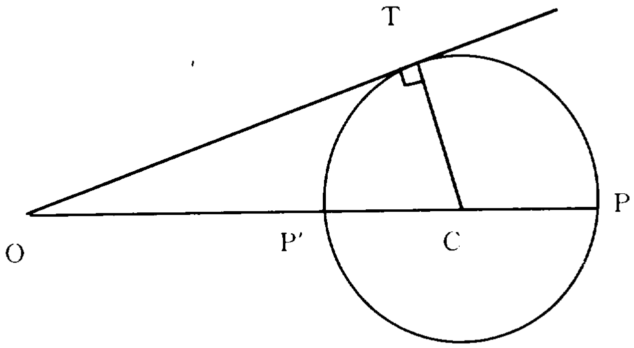

Fig - 11

(증명) Pythagoras 정리에 의하여,

$$\begin{aligned} OT^2 &= OC^2 - CT^2 \\ &= (OC - CT)(OC + CT) \\ &= (OC - CP')(OC + CP) \\ &= OP \cdot OP' \end{aligned}$$

그러므로 $OT^2 = OP \cdot OP'$ 이고 $OT = \sqrt{OP \cdot OP'}$ 이다.
따라서, 선분 OT는 선분 OP와 OP'의 기하평균이다.

(5) 조화열점 (Harmonic points)

〔정의 9〕 한 직선 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대해서

$\dfrac{AC}{CB} = -\dfrac{AD}{DB}$ 가 성립하면 네 점 A, B, C, D는 조화열점을 이룬다고 하고

$H(AB, CD)$로 나타낸다.

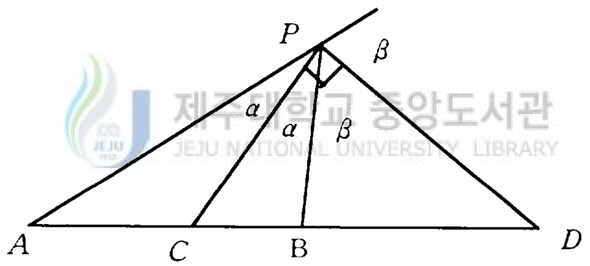

Fig - 12

〔정리 12〕 Euclid 공간에서 네 점 A, B, C, D가 조화열점을 이룰 필요충분조건은 선분

AC, AB, AD 사이에

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \text{ 이다.}$$

(증명) $H(AB, CD)$ 의 정의에 의하여

$$\frac{CB}{AB \cdot AC} = \frac{BD}{AB \cdot AD}$$

$CB = AB - AC$, $BD = AD - AB$ 이므로

$$\frac{AB - AC}{AB \cdot AC} = \frac{AD - AB}{AB \cdot AD}$$

이 양변을 약분하여 이항하면.

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

이 증명 과정의 역도 그대로 성립함을 알 수 있다.

〔정리 13〕 (Menelaus정리) 점 P, Q, R 이 각각 $\triangle ABC$ 의 세 변 BC, CA, AB 위에 있는 세 점이라 하자. P, Q, R 가 동일 직선 위에 있을 필요충분 조건은

$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$ 이다.

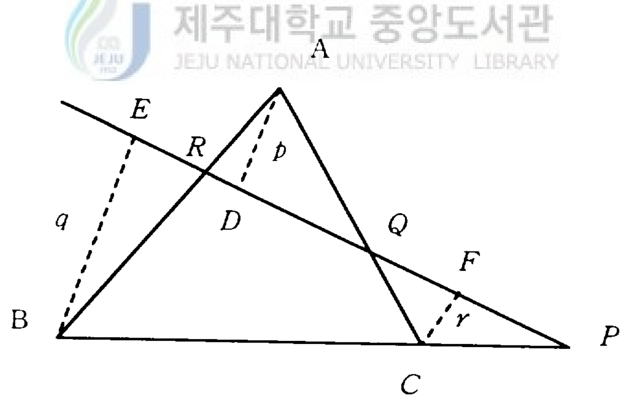

Fig - 13

(증명) (충분조건) (Fig - 13)에서 p, q, r을 꼭지점 A, B, C에서 직선 PQR에 이르는 수선 AD, BE, CF의 길이라 하면,

$\triangle ADR \backsim \triangle BER$이고 $\triangle CFP \backsim \triangle BEP$, $\triangle CFQ \backsim \triangle ADQ$이다.

그러므로 $\dfrac{AR}{RB} = \dfrac{p}{q}$, $\dfrac{CQ}{QA} = \dfrac{r}{p}$, $\dfrac{BP}{PC} = -\dfrac{q}{r}$

따라서, $\dfrac{AR}{RB} \cdot \dfrac{BP}{PC} \cdot \dfrac{CQ}{QA} = -\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{q}{r} \cdot \dfrac{r}{p} = -1$

(필요조건) 가령 두 점 R, Q를 지나는 직선이 BC와 만난 점을 P'라 하면 앞 증명에 의하여

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$$

이 식으로서 원식을 변변 나누면

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BP'}{P'C}$$

따라서, $\dfrac{BP+PC}{PC} = \dfrac{BP'+P'C}{P'C}$ 즉, $\dfrac{BC}{PC} = \dfrac{BC}{P'C}$

따라서, $P'C = PC$에서 $P = P'$이다.

[정리 14] (Ceva정리) 세 점 L, M, N이 각각 $\triangle ABC$의 세 변 BC, CA, AB위에 있는 세 점이라 하자. 세 직선 AL, BM, CN가 한 점에서 만날 필요충분 조건은

$\dfrac{AM}{MC} \cdot \dfrac{CL}{LB} \cdot \dfrac{BN}{NA} = 1$ 이다.

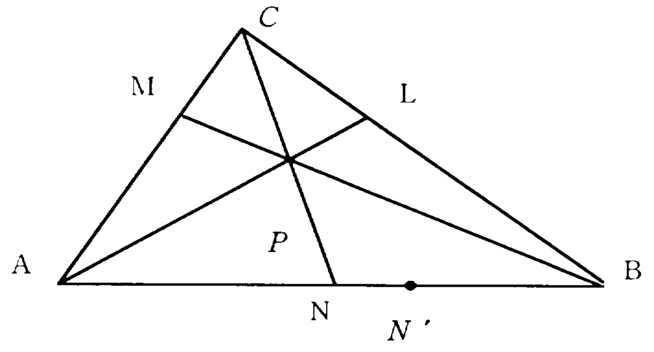

Fig - 14

(증명) (충분조건) (Fig - 14)에서 한 점 P에서 세 직선 AL, BM, CN만났다고 가정하면, $\triangle BNC$를 직선 AL이 절단하므로 Menelaus의 정리에 의하여,

$$\frac{BA}{AN} \cdot \frac{NP}{PC} \cdot \frac{CL}{LB} = -1$$

같은 방법으로 $\triangle ACN$에 있어서 직선 BM이 절단하므로

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CP}{PN} \cdot \frac{NB}{BA} = -1$$

이 두 식을 변변 곱하여 간단히 하면

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$$

(필요조건) 가령 AL과 BM이 한 점 P에서 만나고 CP의 연장과 AB와의 교점을 N'라 하면

$\dfrac{AM}{MC} \cdot \dfrac{CL}{LB} \cdot \dfrac{BN'}{N'A} = 1$ 여기서 $\dfrac{AM}{MC} \cdot \dfrac{CL}{LB} \cdot \dfrac{BN}{NA} = 1$ 으로 나누면

$\dfrac{BN'}{N'A} = \dfrac{BN}{NA}$ 따라서 $N = N'$ 이다.

〔**정리 15**〕 $\triangle ABC$의 각 꼭지점에서 대변에 향해 그은 세 직선이 공 점이면 이 세 직선과 대변과의 교점을 각각 L, M, N로 할 때, 직선 MN이 BC와 만날 때, 그 교점을 L'라 하면 4점 B, C, L, L'는 조화열점 $H(BC, LL')$를 이룬다.

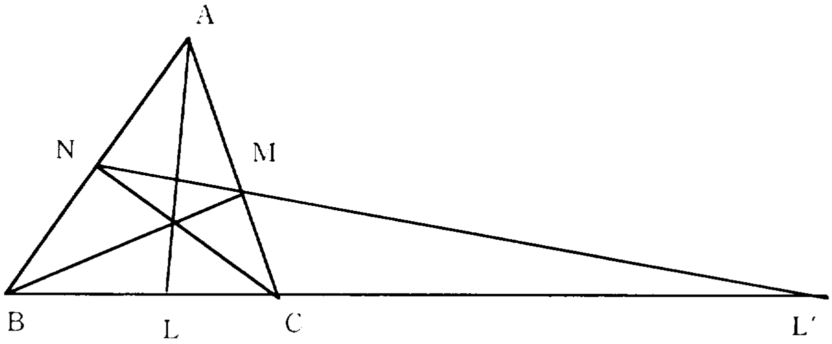

Fig - 15

(**증명**) 위에 있는 그림(**Fig - 15**)이 조건을 만족한다고 하자. 〔정리 14〕를 쓰면 AL, BM, CN로써

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

또 L', M, N가 공선이므로 〔정리 13〕에 의하여

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

위 두 식을 변변 나누어서 변형하면

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{BL'}{L'C}$$

따라서, 4점 B, C, L, L'는 조화열점 $H(BC, LL')$를 이룬다.

〔**정리 16**〕 조화열점 $H(AB, CD)$에서 AB의 중점을 O라 하면,

$OA^2 = OB^2 = OC \cdot OD$ 이고 또 이 역도 성립한다.

(증명) $AC = OC - OA$, $AD = OD - OA$, $CB = OB - OC$,

$DB = OB - OD$, $OA = -OB$ 이고

조화열점 $H(AB, CD)$ 에서 $\dfrac{AC}{CB} = -\dfrac{AD}{DB}$ 이다.

그러므로 $\dfrac{OC - OA}{OB - OC} = \dfrac{OD - OA}{OD - OB}$ 또는

$$2(OD \cdot OC + OA \cdot OB) = (OA + OB)(OD + OC) = 0 \text{ 이다.}$$

따라서 $OC \cdot OD = OA^2 = OB^2$

이 증명 과정의 역도 그대로 성립함을 알 수 있다

〔따름 정리〕 조화열점 $H(AB, CD)$ 에서 AB 의 중점을 O 라 하면, OA 와 OB 는 OC 와 OD 의 기하평균이고 또 이 역도 성립한다.

〔정리 17〕 두 원이 직교할 때, 한 원의 지름 AB 가 다른 원의 둘레와 만나는 점을 각각 C, D 라 하면, 이들 4점은 조화열점 $H(AB, CD)$ 을 이룬다.

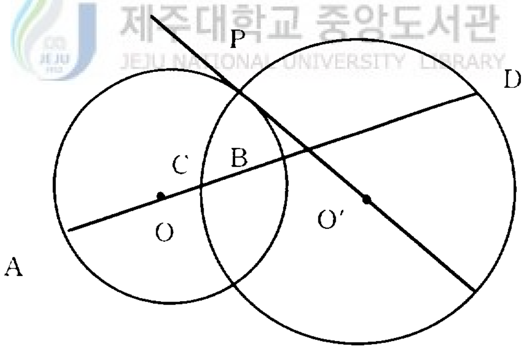

Fig - 15

(증명) 중심이 O, O' 인 두 원이 한 점 P 에서 만난다고 하자.
그러면 $OP^2 = OC \cdot OD$ 또는 $OA = OP$ 이므로 $OA^2 = OC \cdot OD$ 이다.

따라서 〔정리 16〕 에 의해서 이들 4점 A, B, C, D은 조화열점 $H(AB, CD)$를 이룬다.

〔정리 18〕 두 원 **(O), (O′)**이 직교할 때, 한 원의 지름 AB가 다른 원과 만나는 점을 각각 C, D라 하면, 이들 4점은 조화열점 $H(AB, CD)$를 이루고

$\mathrm{O}A = \mathrm{O}B = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{OC \cdot OD}$ 이다.

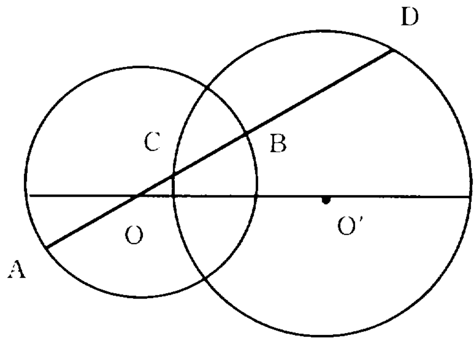

Fig - 16

(증명) 〔정리 17〕에 의해서 이들 4점 A, B, C, D은 조화열점 $H(AB, CD)$를 이루며, 〔정리 16〕에 의해서 $\mathrm{O}A^2 = \mathrm{O}B^2 = OC \cdot OD$ 이므로

$\mathrm{O}A = \mathrm{O}B = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{OC \cdot OD}$ 이다.

Ⅲ. 결 론

인간이 숫자를 사용하기 시작한 이후 피타고라스에 의하여 처음으로 평균의 개념이 만들어져 사용되어지면서 점차 다양한 모습으로 발전되어 사용되어졌다. 중학교 교육과정에서는 통계단원에서 산술평균이 나타나고, 고등학교 교육과정 공통수학에서 소개되는 평균의 개념은 대수학적 접근 방법으로서의 산술평균 $\frac{a+b}{2}$ · 기하평균 $\sqrt{ab}$ · 조화평균 $\frac{2ab}{a+b}$ 이며 이들의 대소관계는 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ 이다. 그러나 이러한 여러 가지의 평균이 기하학의 여러 곳에서 사용된 흔적이 있으며, 이들의 대소관계도 대수적 방법이외에도 여러 가지 방법으로 기하학적으로 시각화하여 지도하는 것이 학생들에게 쉽게 이해시키고 흥미를 유도하는 할 수 있으며 논리적이고 창의적인 사고력과 표현력을 키우는데 도움이 된다.

본 연구에서는 여러 종류의 평균의 기하학적 사용 흔적을 알아보고 평균에 대한 정의를 새로운 방법으로 시도하여 보았다. 또한 산술평균 · 기하평균 · 조화평균을 원과 사다리꼴 위에서 나타내어 비교하였으며 조화평균을 작도하였다. 뿐만 아니라 평균의 개념을 일반화하여 2개의 양의 실수가 아닌 3개와 4개의 양의 실수에서의 산술평균 · 기하평균 · 조화평균의 관계를 나타내었고, 기하평균과 반점(Inverse points)의 관계와 조화평균의 일반화로서의 조화열점(Harmonic points)에서 평균의 성질을 다루고 있다.

이와 같이 하여 평균에 대한 기하학적 이해를 마련함으로써 중 고등학교에서 산술평균 · 기하평균 · 조화평균을 지도하는 교사와 학생에게 도움을 주고자 하였다.

◑ 참 고 문 헌 ◐

〔1〕 신용태(1989)著, 기하학개론 I

〔2〕 M. J. Greenberg著, 이우영 譯 (1997년), EUCLID幾何學과 비 EUCLID幾何學

〔3〕 다무라 사부로오 지음, 황산국 옮김, 재미있는 수학이야기

〔4〕 Claire Fisher Adler, Ph. D. , Modern geometry

〔5〕 이홍천, 강옥기, 박재석 지음 (1997), 공통수학(교학사)

〔6〕 박영훈 지음 (1993), 원리를 찾아라

〔7〕 Howard Eves (1996)지음, 이우영, 신항균 옮김, 수학사

〈Abstract〉

The Understanding of Means in the Euclidean Geometry *

Oh, Chang-Eun

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju Nation University
Cheju, Korea

Supervised by professor Hyun, Chin Oh

This study approaches geometrically to different means such means such as arithmetic, the geometric, and the harmonic mean which are handled in the present curriculum of highschool mathematics and tries to give different definitions to these means and to find out another mean. It compares these means with each other on figures through Euclidean geometry.

It makes a special study of the properties of each mean and the relations among these means about positive real numbers. It also introduces Inverse points and Harmonic points by generalizing more the geometric and the harmonic means.

* A thesis submitted to the committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1998.