Tachyon에 관한 研究
- 일반적인 로렌츠 변환(GLT) 의 群-

玄 南 奎

A Study on Tachyon
- The Group of the Generalized (Subluminal and Superluminal) Lorentz Transformations-

Hyun Nam-gyu

Summary

It is discussed that the superluminal Lorentz transfromations alone do not forms a group, but subluminal Lorentz transformations alone and the subluminal Lorentz transformations togegher with superluminal Lorentz transformations do form a group.

序 論

Bradyon과 Tachyon의 결합 모형에 의한 양성자의 구조(현, 1987 a) 와 핵자의 구조(현, 1987 b) 에서 구체적인 논의없이 초광속 로렌츠 변환 관계식을 사용하여 양성자와 중성자의 spin을 계산하였다.

理工大學 專任講師

본 논문에서는 우선 로렌츠 변환 행렬들이 群을 이룸을 논하고 나서, 공간 1차원과 3차원의 경우에 초광속 로렌츠 변환 관계식들로부터 일반적인 로렌츠 변환들이 새로운 群을 이룸을 논함으로서, 초광속 입자의 존재는 물론 앞서 제시한 Bradyon-Tachyon의 결합 모형이 실재할 가능성을 보임에 있어 그 논리적인 보탬이 되고자 한다.

1. 로렌츠 변환과 로렌츠 群

1) 로렌츠 변환의 유도

x, y, z와 x', y', z'을 각각 기준계 S, S'의 Cartesian 공간 좌표들이라 하고, t, t'을 시간 좌표들이라 하자. S, S'이 등속력 v로 상대 운동하고 있다고 가정할 때, 다음의 두 가지 조건을 만족시키는 S에서 S'으로의 변환을 찾고자 한다.(Rohrlich, 1965) .

(1) 만약 어떤 입자가 S에 대하여 등속 운동중에 있으면, 모든 좌표값에 대하여 S'에 대해서도 역시 등속 운동중에 있어야 한다.

(2) S에 대하여 진공중에서 속력 c로 구면파로 퍼져 나가는 광파는 S'에 대해서 역시 속력 c로 구면파로 퍼져나가야 한다.

이 첫째 조건으로부터 변환이 선형적이어야 함을 알 수 있으며, 시-공의 등질성으로부터, t= 0에서 t'= 0이고 S와 S'의 원점이 일치하도록 할 수 있는 바 이는 $x= y= z= 0$는 $x'= y'= z'= 0$임을 의미한다. 공간의 등방성으로부터 t= 0에서 x와 x', y와 y'축들이 동일 선상에서 각각 같은 방향을 향하도록 할 수 있는 바 이는 속력 $v= 0$에 대하여 변환 S→S'은 항등 변환임을 말해준다. 또한 S가 본 S'의 항등 좌표 원점이 양의 x축 방향을 따라서 속력 v로써 움직이는 x축을 택할 수 있으므로, z= 0 평면내에 거리 y인 지점에 있으면서 S에 대하여 일정한 속력으로 y축에 평행하게 움직이는 한 점을 생각하면, 그 거리는 S에 대하여 상수일 것이며, 이러한 동일 점은 $z'= 0$의 평면 내에 거리 y'인 점에서 x'축에 평행하게 S'에 대하여 움질일 것이다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$y' = a\,y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

이 때 a는 속력의 함수이므로 a= a(v^2) 로 볼수 있다. 또한 $-x'$축을 따라서 속력 v로 움직이는 S→S″의 변환에 대하여 $y''= ay'$을 생각할 수 있으나, S″은 S와 동일해야 하므로 $a^2= 1$이 되어서 a= ±1이나 $v= 0$일 때 항등 변환이 되어야 하므로 a= −1은 제외시킬 수 있다. 이는 z축에 대해서도 성립하므로 다음 식이 성립한다.

$$y= y', \qquad z= z' \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

따라서 나머지 t', x'; t, x축에 대하여서는 일반적으로 다음 식과 같이 둘 수 있다.

$$ct'= \alpha x + \beta ct$$

$$x'= \gamma x + \delta ct \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

이 때 계수 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$들은 v의 함수들이다. $v= 0$일 때 항등변환이 되어야 하는 조건에 의해서

$$\beta(0) = \gamma(0) = 1$$

$$\alpha(0) = \delta(0) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

더구나 S의 좌표 원점($dx/dt= 0$) 은 S'에 대하여 속도 $dx'/dt'= -v$이 되므로, (3) 식으로부터

$$\frac{dx'}{at'} = \frac{\dfrac{dx'}{dt}}{\dfrac{dt'}{dt}} = \frac{c\delta}{\beta} = -v \qquad \cdots\cdots\cdots (5)$$

역으로, S'의 원점($dx'/dt'= 0$) 은 S에 대하여 속도 $dx/dt= v$이므로

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{-\dfrac{dx}{dt'}}{\dfrac{dt}{dt'}} = \frac{c\delta}{\gamma} = -v \qquad \cdots (6)$$

이다. 따라서 (5) 식과 (6) 식으로부터 $\beta= \gamma$임을 알 수 있다. 이로부터 (3) 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$ct'= \alpha x+ \gamma ct$$

$$x'= \gamma x+ \delta ct \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

그런데 조건 (2) 로부터 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$x^2+ y^2+ z^2- c^2t^2= 0= x'^2+y'^2+z'^2- c^2t'^2 \cdots (8)$$

따라서 조건 (3) 식은 다음 조건을 만족시켜야 한다.

$$x^2+ y^2+ z^2- c^2t^2= a(x'^2+ y'^2+ z'^2- c^2t'^2) \cdots (9)$$

그런데 (2) 식으로부터 a= 1임을 알 수 있으므로, 다음 식이 성립한다.

$$x^2- c^2t^2= x'^2- c^2t'^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

(7) 식을 (10) 식에 대입하면,

$$x^2- c^2t^2= (\gamma^2- \alpha^2) x^2+ 2(\gamma\delta- \alpha\gamma) xct+ (\delta^2 - \gamma^2) c^2t^2 \quad \cdots (11)$$ 이므로

$$\gamma^2-\alpha^2= 1= \gamma^2-\delta^2, \ \gamma\delta= \alpha\gamma \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

(4), (5) 식과 (12) 식으로부터

$$\beta=\gamma,\quad \gamma=\delta=-\frac{v}{c}\gamma,\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad\cdots(13)$$

(13) 식을 (3) 식에 대입하면,

$$t'=\gamma(t-vx/c^2)$$
$$x'=\gamma(x-vt) \quad\cdots\cdots(14)$$

그리고 이의 역변환은, (14) 식에 v대신 $-v$를 대입하면 되는 바, 다음 식과 같이 나타내진다.

$$t=\gamma(t'+vx'/c^2)$$
$$x=\gamma(x'+vt') \quad\cdots\cdots(15)$$

그런데, x축의 속도 $\mathbf{v}$의 방향이 아닌 일반적인 경우에 로렌츠 변환 공식은 위치 벡터 $\mathbf{r}$을 $\mathbf{r}_\parallel$ (기준계 S′의 S에 대한 속도 $\mathbf{v}$의 방향을 따라서) 성분과 $\mathbf{r}_\perp$ ($\mathbf{v}$에 수직인) 성분으로 나눔에 의하여 얻어진다. (Pauli, 1958).

(14) 식으로부터 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\mathbf{r}_\parallel'=\gamma(\mathbf{r}_\parallel-\mathbf{v}t),\quad \mathbf{r}_\perp'=\mathbf{r}_\perp$$
$$t'=\gamma(t-\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_\parallel/c^2) \quad\cdots\cdots(16)$$

그러나

$$\mathbf{r}_\parallel=\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2},\quad \mathbf{r}_\perp=\mathbf{r}-\mathbf{r}_\parallel=\mathbf{r}-\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2}$$

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}_\parallel'+\mathbf{r}_\perp' \quad\cdots\cdots(17)$$

이므로 (16) 식은 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\frac{1}{v^2}(\gamma-1)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}-\gamma\mathbf{v}t$$

$$t'=\gamma(t-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/c^2) \quad\cdots\cdots(18)$$

2) 로렌츠 群(LG)

1) 절에서 논의한 조건 (1) 은 힘의 작용이 없는 상태에서 질점의 궤적인 x_i계($x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=ict$)의 사차원 시-공 도표상의 모든 직선이 x'_i계($x_1'=x'$, $x_2'=y'$, $x_3'=z'$, $x_4'=ict'$)의 사차원 시-공 도표상의 직선으로 옮겨 진다고 기하학적으로 설명될 수 있다. 이로부터 Lorentz 변환이 다음 식과 같이 나타내어지는 선형 변환이 되어야 함을 알 수 있다.

$$x_i'=\sum_{k=1}^{4}L_{ik}x_k \quad\cdots\cdots(19)$$

따라서 모든 로렌츠 변환은 어떤 행렬 L에 의하여 유일하게 결정된다.

$$L=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14}\\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24}\\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34}\\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44}\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots(20)$$

또한 로렌츠 변환 L_1, L_2에 대하여 각 성분들이 x_i인 four-vector X는 다음과 같은 형으로 쓸 수 있다.

$$X'=L_1X \quad\cdots\cdots(21)$$

여기서 로렌츠 변환의 곱을 생각하자. 만약 $X''=L_2X'$으로 주어지는 변환 L_2를 통하여 X′기준계로부터 또 다른 X″ 기준계로 갈 수 있다면, (21) 식으로부터 다음과 같은 선형 변환을 얻는다.

$$X''=L_2X'=L_2L_1X \quad\cdots\cdots(22)$$

그러면 두 행렬 L_2와 L_1의 곱 L_2L_1의 i행 k열의 성분 $(L_2L_1)_{ik}$를 다음 식과 같이 얻는다.

$$(L_2L_1)_{ik}=\sum_l(L_2)_{il}(L_1)_{lk} \quad\cdots\cdots(23)$$

(23) 식을 변환 행렬들 L_1, L_2, L_3에 적용시키면 다음의 결합 법칙을 얻는다.

$$L_1(L_2\ L_3)=(L_1\ L_2)L_3 \quad\cdots\cdots(24)$$

또한 항등 변환 I 에 대하여 다음 식이 성립해야 하는 바,

$$X'=IX=X \quad\cdots\cdots(25)$$

이 때 행렬 I는 단위 행렬로써 그 성분들은 다음 관계식을 만족해야 한다.

$$(I)_{ik}=\delta_{ik}\ (단,\ \delta_{ii}\ 1,\ \delta_{ik}\neq0\ (i\neq k에\ 대하여)) \quad\cdots\cdots(26)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$IL=LI=L \quad\cdots\cdots(27)$$

임의의 두 four-vetctor **a**, **b**에 대하여 내적을 다음 식과 같이 정의하면,

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\sum_i a_ib_i=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) \quad\cdots\cdots(28)$$

(28) 식을 이용하면, 조건 (2) 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(X', X') = (X, X) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

따라서 (21) 식을 (29) 식에 대입하고, L_1의 전치 행렬을 $\tilde{L}_1$로 표기하면

$$(X', X') = (L_1 X, L_1 X) = (X, \tilde{L}_1 L_1 X) =$$
$$(X, X) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

임의의 four-vector X에 대하여 (30) 식이 성립하려면 다음 식이 만족되어야 한다.

$$\tilde{L}_1 L_1 = I \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (31)$$

이 행렬 L_1의 행렬식을 $|L_1|$로 나타내면, (31) 식으로부터

$$|\tilde{L}_1 L_1| = |\tilde{L}_1||L_1| = |L_1|^2 = |I| = 1 \quad \cdots (32)$$

(32) 식으로부터 $|L_1| = \pm 1 \neq 0$이어서 변환 행렬 L에 대한 역행렬 L_1가 존재하므로, (21) 식으로부터 다음 관계식을 얻는다.

$$X = L_1^{-1} X' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

(21) 식을 (33) 식에 대입하고, 역으로 (33) 식을 (21) 식에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$L_1^{-1} L_1 = L_1 L^{-1} = I \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34)$$

따라서 (34) 식에 $\tilde{L}_1$를 곱하면 $L_1^{-1} = \tilde{L}_1$가 됨을 알 수 있다.

이들로부터 로렌츠 변환 L_1, L_2, L_3에 대하여 다음 식이 성립하므로

(1) L_1 L_2는 로렌츠 변환

(2) $L_1(L_2 L_3) = (L_1 L_2) L_3$

(3) 항등변환 I가 존재하여 $I L_1 = L_1 I = L_1$

(4) 역변환 L_1^{-1}가 존재하여

$L_1^{-1} L_1 = L_1 L_1^{-1} = I$

따라서 이러한 모든 로렌츠 변환들은 로렌츠 群을 이룸을 알 수 있다(Becker, 1964) 그런데 (31) 식에 의하여 L은 직교하므로 다음 식이 성립한다.

$$L_{4i}^2 + L_{4j} L_{4j} = 1 (j = 1, 2, 3) \quad \cdots\cdots\cdots (35)$$

그런데, L_{4j} 는 순허수인 4번째 시간 좌표를 실수 공간 좌표와 연결시켜야 하므로 $L_{4j}(L_{j4})$ 는 순허수가 되어야 한다.

따라서 $L_{4j} L_{4j} < 0$ 임을 알 수 있어서, (35) 식에 의하여 다음 식이 성립함을 알 수 있다(Goldstein, 1980)

$$L_{44}^2 \geq 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

여기서 $|L| = +1$인 경우를 proper Lorentz Transformation이라 하고 $|L| = -1$인 경우를 improper Lorentz Transformation이라고 하며, $L_{44}^2 \geq 1$인 경우를 orthochronous, $L_{44}^2 \leq -1$ 인 경우를 nonorthochronous라고 하며, $|L| = +1$이고 또한 $L_{44} \geq 1$인 경우를 $L_+^\uparrow$라고 표기하자. 그 때 $|L|$과 L_{44} 값의 가능한 4가지 경우를 요약하면 다음과 같다.

$L_+^\uparrow$: $|L| = +1$, sgn $L_{44} = +1$;I를 포함한다.

$L_-^\uparrow$: $|L| = -1$, sgn $L_{44} = +1$;Is를 포함한다.

$L_+^\downarrow$: $|L| = +1$, sgn $L_{44} = -1$;Ist를 포함한다.

$L_-^\downarrow$: $|L| = -1$, sgn $L_{44} = -1$;It를 포함한다.

여기서 I는 항등 변환, It는 시간 반전 변환, Ist는 시간 반전 및 공간 반전 변환이고 Is는 공간 반전 변환을 의미하며 구체적으로 다음 식과 같이 변환함을 나타낸다.

$$(I_s x)_4 = x_4$$
$$(I_t x)_4 = -x_4$$
$$(I_{st} x) = -x (= I_s I_t x)$$
$$(I_s x)_j = -x_j (j = 1, 2, 3)$$
$$(I_t x)_j = x_j (j = 1, 2, 3) \quad \cdots\cdots (38)$$

그런데 Λ_2를 (14) 식의 경우와 같은 pure Loeentz Transformation (즉, boost) 라 하고, Λ_1, Λ_3를 각각 Spatial rotation이라고 할 때 $\Lambda \in L_+^\uparrow$인 Λ는 일반적으로 다음과 같이 쓸 수 있다 (Streater and Wightman, 1964)

$$\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (39)$$

이 때 $L_+^\uparrow$는 모든 orthochronous proper Lorentz Trnasformation을 모아 놓은 것을 말하며 이는 로렌츠 群의 Subgroup을 이룬다. 또 다른 Subgroup들을 열거하면 다음과 같다. (Streater and Wightman, 1964; Carmeli, 1977)

$L^{\uparrow} = L^{\uparrow}_{+} \cup L^{\uparrow}_{-}$ orthochronous LG

$L_{+} = L^{\uparrow}_{+} \cup L^{\downarrow}_{+}$ proper LG

$L_{0} = L^{\uparrow}_{+} \cup L^{\downarrow}_{-}$ orthochrous. LG······(40)

2. 초광속 로렌츠 변환(SLT)과 새로운 群

1) 공간 1차원의 경우

공간이 1차원 뿐인 어떤 세계를 생각하자. 공간과 시간 좌표가 x, t로 나타내어 지는 빛보다 느린 속도의 관성기준계 ↓S에서 공간과 시간이 좌표 x', t'으로 나타내어 지는 또 다른 초광속 기준계 ↑S에로의 변환을 생각하자.

↑S의 좌표 원점 $x'=0$은 ↓S에 대하여 속력 v($|v|>$ c) 로써 $x=vt$인 경로를 따라서 움직였다고 할 때, 광속은 ↑S나 ↓S 두 기준계에서 상수 c 이며, 두 기준계 사이의 변환은 선형적이라고 하자. 앞절에서의 논의와 유사하게 이러한 두 가정과 공간이 등방적이라는 가정으로부터 다음 식이 만족된다고 볼 수 있다.

$$x^2-c^2t^2=\pm(x'^2-c^2t'^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

여기서 "+"부호는 $|v|>$c 경우에는 허용되지 않으므로, "-"부호의 경우만을 생각하자.

$$x^2-c^2t^2=-(x'^2-c^2t'^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

(42) 식은 $x\pm ct$가 0일 때 $x'\pm ct'$이 0임을 의미하며, 선형 변환의 가정으로부터 다음 두 가지 경우 중에 하나를 취할 것이 요구된다.

$$x-ct=-B(v)(x'-ct'),$$
$$x+ct=B^{-1}(v)(x'+ct') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

또는

$$x-ct=-B(v)(x'+ct'),$$
$$x+ct=B^{-1}(v)(x'-ct') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (44)$$

(43) 식이나 (44) 식에서 $x-ct$를 $x+ct$로 나누고 ↑S 기준계의 공간 좌표 원점에 대하여 $x=vt$, $x'=0$을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$B(v)=\pm\left(\frac{v-c}{v+c}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

여기서 $|v|>$c이므로 $B(v)$가 실수임에 주목할 필요가 있다. (45) 식에서 각 부호"±"는 서로 다른 결과를 내지 않으므로 $B(v)$에 대하여 + 의 경우만 택하기로 하자.

$$B(v)=\left(\frac{v-c}{v+c}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

이 때 ↓S 기준계에서 ↑S 기준계로 상대속도 v($|v|>$c) 로 움직이는 변환을 초광속 변환이라고 부르기로 한다(Parker, 1969).

따라서 (43) 식과 (46) 식으로부터 다음의 변환 관계식을 얻는다.

$$x'=-\frac{x-vt}{\sqrt{\beta^2-1}}, \quad t'=-\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{\beta^2-1}}$$

$$(\text{단, } \beta^2=\frac{v^2}{c^2}>1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (47)$$

여기서 $|v|>$ c에 대하여 $B(v)$를 다음 식과 같이 두기로 하자.

$$B(v)=e^{-\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (48)$$

그러면 다음 식들이 성립한다.

$$\sinh\alpha=\frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})=\frac{1}{2}(B^{-1}(v)-B(v))$$
$$=\left(\frac{v}{|v|}\right)\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cosh\alpha=\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})=\left(\frac{|v|}{c}\right)\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tanh\alpha=\frac{c}{v} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (49)$$

여기서 v가 - c에서 - ∞로 갈 때 α는 - ∞에서 0으로 연속적으로 변하고, v가 + ∞에서 + c까지 갈 때 α는 0에서 + ∞까지 연속적으로 변함에 주목하자. 그리고 다음과 같이 변수를 치환하고 행렬 Q, Q', M(α) 를 이들 변수로 부터 정의하자.

$$\eta=x-ct, \quad \eta'=x'-ct'$$
$$\xi=x+ct, \quad \xi'=x'+ct' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (50)$$

$$Q=\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix}, \quad Q'=\begin{pmatrix}\eta'\\ \xi'\end{pmatrix}, \quad M(\alpha)=\begin{pmatrix}-e^{-\alpha} & 0\\ 0 & e^{\alpha}\end{pmatrix} \cdots\cdots (51)$$

그러면 (43) 식은 (48) 식을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q = M(\alpha)\, Q' \qquad \cdots\cdots\cdots (52)$$

이와 유사하게 공간 1차원에서의 orthochronous proper Lorentz Transformation도 나타낼 수 있다. 즉, 좌표 x', t'으로 나타내지는 S' 기준계가 좌표 x,t로 나타내지는 S 기준계에 대하여 속력 v($|v|$<c) 로 움직인다고 하자. 그 때 L(β) 를 다음 식과 같이 두자.

$$L(\beta) = \begin{pmatrix} e^{-\beta} & 0 \\ 0 & e^{\beta} \end{pmatrix} \quad (\text{단}, \tanh\beta = \frac{v}{c}) \qquad (53)$$

여기서 또한 v가 $-$c에서 0으로 갈 때, β는 $-\infty$에서 0으로 연속적으로 변하며, v가 0에서 $+$c까지 갈 때 β는 0에서 ∞까지 연속적으로 변함에 주목하자. 그러면 (15) 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q = L(\beta)\, Q' \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (54)$$

여기서 변환 행렬들의 곱을 생각하자.

$$M(\alpha)M(\beta) = \begin{pmatrix} -e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-\beta} & 0 \\ 0 & e^{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(\alpha+\beta)} & 0 \\ 0 & e^{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = L(\alpha+\beta)$$

$$M(\alpha)L(\beta) = \begin{pmatrix} -e^{-(\alpha+\beta)} & 0 \\ 0 & e^{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = M(\alpha+\beta)$$

$$L(\alpha)L(\beta) = \begin{pmatrix} e^{-(\alpha+\beta)} & 0 \\ 0 & e^{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = L(\alpha+\beta)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (55)$$

따라서 (55) 식은 변환 행렬 M과 L이 로렌츠 변환 (LT) 과 초광속 로렌츠 변환 (SLT) 에 있어서 곱의 연산에 대하여 closed됨을 말해준다.

그리고 M(α), M(β), M(γ) 에 대하여

$$[M(\alpha)M(\beta)]\,M(\gamma) = \begin{pmatrix} -e^{-[(\alpha+\beta)+\gamma]} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha+\beta)+\gamma} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{-[\alpha+(\beta+\gamma)]} & 0 \\ 0 & e^{\alpha+(\beta+\gamma)]} \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha)\,(M(\beta)\,M(\gamma)) \quad \cdots (56)$$

가 성립하므로, (56) 식과 (24) 식으로부터 결합 법칙이 성립함을 알 수 있다.

또한 (53) 식에서 $\beta=0$인 경우 (즉, $v=0$인 경우) 에 L(0) 에 대하여

$$M(\alpha)L(0) = M(\alpha+0) = M(0+\alpha)$$
$$= L(0)M(\alpha) = M(\alpha)$$
$$L(\beta)L(0) = L(\beta+0) = L(0+\beta)$$
$$= L(0)M(\beta) = M(\beta) \cdots\cdots (57)$$

가 성립하므로 L(0) 은 항등 변환 행렬이다.

M($-\alpha$), L($-\beta$) 에 대하여

$$M(-\alpha)M(\alpha) = M(\alpha)M(-\alpha) = L(0)$$
$$L(-\beta)L(\beta) = L(\beta)L(-\beta) = L(0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots (58)$$

이 성립하므로, $M(-\alpha) = M^{-1}(\alpha)$, $L(-\beta) = L^{-1}(\beta)$ 이어서 역변환 행렬이 존재한다. 따라서 (55), (56), (57) 과 (58) 식으로부터, 초광속 변환만으로는 群을 이루지 못하나, 로렌츠 변환(LT) 과 초광속 로렌츠 변환(SLT) 을 함께 하면 group을 이룬다. 이를 공간 1차원에서의 extecded Lorentz Group이라 부른다 (Parker, 1969).

(14) 식과 (47) 식으로부터 추론할 수 있듯이 S 기준계의 x축을 따라서 등속력으로 움직이는 S' 기준계에 관한 로렌츠 변환에 대하여, $-\infty < \beta < \infty$ 의 경우에는 다음과 같은 변환 관계식을 얻는다. (Recami and Mignani, 1974; Recami, 1978, 1986)

$$x' = \pm\frac{x - vt}{\sqrt{|1-\beta^2|}}$$

$$t' = \pm\frac{t - vx/c^2}{\sqrt{|1-\beta^2|}} \quad (-\infty < \beta < \infty) \cdots \quad (59)$$

2) 공간 3차원의 경우

four-momentum, four-velocity, 또는 four-current 등과 같은 4차원 벡터와 마찬가지로 4-position vector $x = (\mathbf{x}, ict)$ 에 대하여 두 관성 기준계들 사이의 변환 L은 항상 다음 관계식을 만족시켜야 한다.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \pm(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots (60)$$

여기서 또한 변환 L이 선형적이라고 가정하자. (60) 식에서의 "+" 기호는 빛보다 느린 상대속력의 경

우이고 "−"기호는 빛보다 빠른 경우에 해당된다. (2) 식에서 보았듯이 y와 z는 서로 독립적으로 변환하므로, (60) 식에 의하면

$$y'^2 = -y^2,\quad z'^2 = -z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (61)$$

이므로 $\sqrt{-1} = \pm i$임을 고려하면 다음 식과 같이 y와 z는 변환된다고 볼 수 있다.

$$y' = \pm iy, \qquad z' = \pm iz \qquad \cdots\cdots\cdots (62)$$

따라서 x축 방향으로 등속 상대 운동하는 두 기준계의 경우에 ($-\infty < \beta < \infty$에 대하여) (2), (14), (47) 식과 (62) 식을 이용하여 일반화 로렌츠 변환(GLT)을 다음과 같이 나타낼 수 있다(Recami and Maccarrone, 1980; Maccarrone, et al, 1983).

$$x' = \pm \frac{x - vt}{\sqrt{|1-\beta^2|}},\quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{|1-\beta^2|}}$$

$$y' = \pm y\sqrt{\frac{1-\beta^2}{|1-\beta^2|}},\quad z' = \pm z\sqrt{\frac{1-\beta^2}{|1-\beta^2|}}$$

$$(-\infty < \beta < \infty) \quad \cdots\cdots\cdots (63)$$

orthochronous proper Lorentz Trans-formation $L_+^\uparrow$를 다음과 같이 나타내면,

$$\Lambda_< = L_+^\uparrow (\beta^2 < 1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (64)$$

초광속 로렌츠 변환(SLT)은 (64) 식으로부터 다음과 같은 형으로 나타낼 수 있다.

$$SLT = \pm i\Lambda_> \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (65)$$

여기서

$$\Lambda_> \equiv L_+^\uparrow (\beta^2 > 1)$$

은 형식적으로 $\Lambda_<$와 똑같으나 β 값이 $|\beta| > 1$인 것만이 다르며, 다음 식들이 성립한다.

$$[\Lambda_<(\beta)]^{-1} = \Lambda_<^{-1}(\beta) = \Lambda_<(-\beta)$$
$$[i\Lambda_>(\beta)]^{-1} = -i\Lambda_>^{-1}(\beta) = -i\Lambda_>(-\beta) \quad (66)$$

따라서

$$[i\Lambda_>(\beta)][-i\Lambda_>^{-1}(\beta)] = 1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (67)$$

이 성립하나

$$[i\Lambda_>(\beta)][i\Lambda_>^{-1}(\beta)] = -1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (68)$$

이므로 generlized group G는 공간과 시간반전 operator Ist= −1을 포함한다. 따라서 (63) 식에 의해서 변환되는 일반적인 로렌츠 변환(GLT)은 4차원 시-공간에서 새로운 群을 이룬다(Recami and Mignani, Maccarrone and Recami, 1982; Recami, 1986).

또한 $\Lambda_>$와 $i\Lambda_>$ 등의 변환을 연속적으로 시행하면 GLT의 group G가 4개의 Subset로 이루어 졌음을 알 수 있다(Recami and Mignari, 1974)

$$G = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \qquad \cdots\cdots\cdots (69)$$

여기서 $L_1 \equiv \{\Lambda_<\}$, $L_2 \equiv \{-\Lambda_<\}$, $L_3 \equiv \{i\Lambda_>\}$, $L_4 \equiv \{-i\Lambda_>\}$인데, G의 유일한 Subgroup은 L_1이다.

結 論

기준계 S와 S′이 등속력 v로 상대 운동하고 있다고 가정할 때, 만약 어떤 입자가 S에 대하여 등속 운동 중에 있다면 모든 좌표값에 대하여 S′에 대해서도 역시 등속 운동 중에 있어야 한다는 조건은 물론, 기준계에 무관하게 광속은 일정해야 한다는 두 가지 조건하에서 로렌츠 변환 관계식을 유도함은 물론, 모든 로렌츠 변환들이 群을 이룸을 보였다.

또한 이와 같은 조건하에서 공간 1차원이나 3차원의 경우에, 초광속 변환만으로는 群을 이루지 못하나, 로렌츠 변환과 초광속 로렌츠 변환을 함께 하면 새로운 群을 이룸을 論하였다.

摘 要

이 논문에서는 빛보다 느린 속력으로 상대 운동하는 두 기준계 사이의 로렌츠 변환은 群을 이루는 것을 논함은 물론, 초광속 로렌츠 변환만으로는 群을 이루지 못하나 이와 로렌츠 변환을 함께 하여서는 새로운 群을 이룸을 論하였다.

引 用 文 獻

Becker, R., 1964, Electromagnetic Fields and Interaction. Vol. (I), pp. 333-338, Blaisdell Pub. Comp., New York.

Carmeli, M., 1977, Group Theory and General Relaivity. pp. 21-22, McGraw-Hill, New York.

Goldstein. H., 1980, Classical Mechanics (2/e), pp. 278-228, Addison-Wesley, Reading Massachusetts.

현남규, 1987 a, Tachyon에 관한 硏究-Bradyon-Tachyon 결합 모형과 양성자의 구조-제주대학교 논문집 (자연과학), 24: 67-74.

현남규, 1987 b, Tachyon에 관한 硏究-Bradyon-Tachyon 결합 모형과 核子의 구조-제주대학교 논문집 (자연과학), 25: 57-63.

Maccarrone, G. D., M, Pavsic and E. Recami, 1983, Formal and Physical Problems of the Generalized (Subluminal and Super-lumimal) Lorentz Trans-formation, *Nuovo Cimento*, 73: 91-111.

Maccarrone, G, D. and E. Recami, 1982, Revisiting the Superluminal Lorentz Transformations and Their Group-Theoretical Properties. *Lett. Nuovo Cimento*, 34: 251-256.

Parker, L.. 1969, Faster than Light Inertial Frames and Tachyons *Phys. Rev.*, 188: 2287-2292.

Pauli, W., 1958, Theory of Relativity (translated by G. F.ield), pp. 10-11, Pergamon Rress., New York.

Recami, E., 1978, Tachyon Manopoles and Related Topics E. Recami (ed.) pp. 3-25, North Holland, Amsterdam.

Recami, E. 1986, Classical Tachyons and Possible Applications *Riv. Nuovo Cimento*, 9: 1-178.

Recami, E., and G. D. Maccarrone, 1980, Solving the ⟨⟨Imaginary Quantities⟩⟩ Problem in Superluminal Lorentz Transformations, *Lett. Nuovo Cimento*, 28: 151-157.

Recami, E.,and R. Mignani, 1974, Classical Theory of Tachyons (Special Relativity and Extecded to Superluminal Frames and Objects). *Riv, Nuovo Cimento*, 4: 209-290.

Rohulich, F., 1965, Classical Charged Particles, pp. 267-275, Addison-Wesley, Reading Massachusetts.

Streater, R. F and A. S. Wightman, 1964, PCT and Statistics, and All That, pp. 9-14, Benjamin, New York.