3次積率의 市場均衡模型의 分析

安　勝　轍*

目　次

Ⅰ. 序 論
Ⅱ. 3次積率의 均衡分析의 展開
1. 期待效用
2. 포트폴리오의 3次積率
3. 3次積率의 分散投資의 效果
Ⅲ. 3次積率의 效率的 프론티어
Ⅳ. 3次積率의 市場均衡方程式의 導出
1. Jean의 3次積率 資本資産價格決定模型의 導出과 問題點
2. 3次積率 資本資産價格決定模型의 導出
Ⅴ. 結 論

Ⅰ. 序　論

資本市場理論은 Markowitz가 平均－分散의 1次 및 2次積率을 기준으로 포트폴리오선택의 規範的理論을 정립한 이래 Sharpe－Lintner－Mossin등이 이를 統計的으로 檢證가능한 實證的인 論理體系로 발전시키기 위한 노력이 있어 왔다. 그 결과 不確實性下의 資本市場에서의 個別株式과 포트폴리오의 危險과 期待收益사이의 均衡關係를 나타내는 資本資産價格決定模型(Capital Asset Pricing Model)을 정교한 수학적 과정을 통하여 導出하였다.

資本資産價格決定模型은 오늘날 資本市場에 있어서 實證論的인 의미에서 널리 적용되고 있다. 그러나, Friend와 Blume,[1] Black, Jensen 및 Scholes[2], Miller와 Scholes[3], Fama와

1) I. Friend, M. Blume, "Measurement of Portfolio Performance under Uncertainty", *American Economic Review*, Sep. 1970, pp.561－575.

2) F. Black, M. Jensen, M. Scholes, "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Result", *Studies in the Theory of Capital Markets*, M. Jensen ed. (New York: Praeger, 1972), pp.79－121.

3) M. Miller, M. Scholes, "Rate of Return in Relation to Risk: A Re-examination of Some Recent Findings", *Studies in the Theory of Capital Markets*, M. Jensen ed. (New York: Praeger, 1972), pp.47－48.

* 社會科學大學 專任講師

MacBeth[4] 등의 實證的 硏究에 의하면 그 結果는 Sharpe-Lintner의 傳統的인 模型과 불일치하는 결과를 나타내고 있다. 즉, 실제 實證的으로 도출된 證券市場線의 기울기는 理論的 證券市場線의 기울기보다 낮고 절편은 높다고 나타났다. 또한, 높은 危險을 가진 資產은 資本資產價格決定模型에서의 豫測値보다 낮은 收益을 획득하며 낮은 危險의 資產은 豫測値보다 높은 收益을 가진다는 결과를 나타내고 있다. 이러한 結果는 資本資產價格決定模型의 假定들 가운데서 收益率의 分布가 正規分布를 따르고 投資者는 2次效用函數를 가진다는 假定에 의해서 만이 平均-分散의 2次積率에 따른 포트폴리오의 선택 및 資本資產價格決定模型이 理論的 타당성을 가질 수 있는데, 이러한 假定의 비현실성으로 인한 理論的 模型과 實證結果와의 차이에서 기인한 것이라 할 수 있다.

따라서 收益率의 確率分布가 실질적으로 非對稱的이라면, 傳統的인 2次의 統計的 積率에 의한 分析은 그 타당성에 있어서 의문을 갖게 될 것이다. 그리하여 非對稱度의 필요성을 지지하는 實證的 硏究結果도[5]도 나타 났으며, 최근의 새로운 연구는 投資者가 最適投資를 형성하는데 있어서 2次積率을 이용한 2次元的인 接近法에 의한 展開로 부터, 收益率의 分布 및 效用函數를 測定하기 위해 3次積率인 收益率 分布의 非對稱度를 포함하는 새로운 3次元的인 資產評價模型을 展開하고 있다.

Tsiang은[6]은 2次效用函數는 적용가능한 범위가 제한되어 있고 그 범위안에서도 絶對的 危險回避가 富의 증가에 따라 증가하는 특성을 갖고 있다고 하면서 그 부적절성을 지적하고 있고 收益率의 正規分布의 假定을 비현실적으로 받아 들이고 있다. 또 Borch는[7] 감마密度函數를 이용하여 2次效用函數의 문제점을 제시하였다. 이러한 주장들은 投資者의 2次效用函數 및 收益率分布의 正規分布 假定의 비현실성을 뒷받침하고 있다고 할 수 있다. 이렇게 본다면 위에서 언급한 實證的 結果의 理論模型과의 차이점은 假定의 비현실성에 기인한다고 볼 수 있다.

따라서 2次積率만을 도입한 2次元的인 資本資產價格決定模型은 타당성이 없어지기 때문에 高次의 積率의 도입이 필요해지는 것이다. 이러한 관점에서 본 硏究는 資本資產價格決定模型의 假定을 완화하여 非對稱度를 고려한 3次積率을 가진 새로운 資本資產價格決定模型에 관련된 理論을 展開함을 目的으로 한다.

---

4) E. Fama, J. MacBeth, "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests", *Journal of Political Economy*, May/June 1973, pp. 607-636.

5) R. W. McEnally, "A Note on the Return Behavior of High Risk Common Stocks", *Journal of Fnance*, Mar. 1974, pp. 199-202.
R. Reback, "Risk and Return in CBOE and AMEX Option Trading", *Financial Analysts Journal*, Jul./Aug. 1975, pp. 42~52.

6) S. C. Tsiang, "The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money", *American Econonic Review*, June 1972, pp. 354-355.

7) K. Borch, "The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis: Comment", *American Economic Review*, June 1974, pp. 211-237.

Ⅱ. 3次積率의 均衡分析의 展開

3次積率을 고려한 3次元의 評價模型은 Sharpe-Lintener의 傳統的 均衡模型에 收益의 分布나 效用函數의 3次積率을 포함시켜 一般化하려는 것이다. 이러한 3次元상의 포트폴리오理論을 전개하기 앞서 投資者의 期待效用, 포트폴리오의 3次積率, 3次元상의 分散效果를 살펴 보기로 한다.

1. 期待效用

Levy는[8] 일반적으로 포트폴리오收益의 1次~3次積率을 가지는 危險포트폴리오의 선호순서는 富에 대한 3次效用函數를 가지는 投資者의 投資決定行動에 의해 결정되어 진다고 하고 있다. 또한 Arditti는[9] 2次積率의 假定의 부적절성을 언급하면서, 投資者의 期待效用函數는 Taylor展開에 의해 n次積率函數로 나타낼 수 있으며, 現實的으로는 3次積率까지의 확율적 속성이 期待收益의 決定에 의미있는 정보를 포함하고 있다 하고 있다. 즉, 3次積率인 分布의 非對稱度는 投資成果의 평가와 관련있을 뿐만 아니라 投資選擇에도 깊은 관련성이 있다고 주장하였다.

投資者의 期待效用은 다음과 같이 일반화할 수 있다.

$$E[u(\tilde{r})]=\sum_{n=o}^{\infty}[u(\bar{r})/n!]E(\tilde{r}-\bar{r})^{n} \quad \cdots\cdots ①$$

여기서, u : 效用

r : 收益率

n : 積率의 次數

期待效用을 3次積率까지 고려한다면,

$$E[u(\tilde{r})]=u(\bar{r})+[u''(\bar{r})/2!]\sigma^2+[u'''(\bar{r})/3!]m^3 \quad \cdots\cdots ②$$

여기서, $\bar{r}=E(\tilde{r})$: 期待收益

$\sigma^2=E(\tilde{r}-\bar{r})^2$: 分散

$m^3=E(\tilde{r}-\bar{r})^3$: 非對稱度

3次積率 내지 3次元 期待效用函數는 전체의 富의 수준에 있어서 限界效用遞減의 法則을 반드시 따르지 않고 危險回避의 條件에 모순된다는 것을 유의하여야 한다. Arrow는 投資者의 3次效用函數에 대해 다음과 같은 속성을 제시하고 있다.[10] (a)富에 대한 正의 限界效用($u'>0$), (b)富에 대

8) H. Levy, "A Utility Function Depending On the First Three Moments", *Journal of Finance*, Sep. 1969, pp.889-897.
M. Richter, "Cardinal Utility, Portfolo Selection and Taxation", *Review of Economic Studies*, Apr. 1960, pp.225-247.

9) F. Arditti, "Risk and Required Return On Equity", *Journal of Finance*, Mar. 1971, pp.19-36.

10) K. J. Arrow, *Essay in the Theory of Risk-Bearing* (Chicago: Markham Publishing co., 1971) pp. 90-120.

한 限界效用의 遞減($u''<0$),(c) 絶對的 危險回避의 減少($d(-u''/u')d\omega \leq 0$) 즉, 危險資產은 劣等財가 아님을 나타내고 있다. 여기서 條件(b) $u''<0$는 分散에 대한 회피 즉, 危險의 回避를 의미한다. 또한, (c)의 條件은 Arditti, Levy, Tsiang 등에 의하면[11] $u'''>0$때문에 充分한 條件이 되며 投資者는 正의 非對稱度를 선호함을 뜻한다. 즉, 이것은 $d(-u''/u')d\omega=[-u'u'''+(u'')^2]/(u')^2 \leq 0$에 대해 必要 條件이기 때문에 $u''' \geq (u'')^2/u'>0$를 따른다. 또한, Scott와 Horvath도[12] $u'''>0$라는 사실을 증명하여 投資者들은 正의 非對稱度를 선호한다고 주장하였고 따라서 投資者들은 보다 큰 非對稱度를 나타내는 포트폴리오를 상대적으로 낮은 期待收益을 감수하면서 채택하게 된다.[13]

이상에서 본바와 같이 投資者는 3次元의 投資決定行動에 직면할 때는 위의 諸條件을 만족시키는 一般的인 效用函數를 갖게 된다. 즉, 分散을 회피하고 正의 非對稱度를 선호한다는 것은 絶對的 危險回避의 遞減과 富의 限界效用의 遞減을 나타내는 效用函數를 가진 모든 投資者의 一般的 特性이라 할 수 있다.

2. 포트폴리오의 3次積率

3次積率을 고려한 3次元의 市場均衡 分析은 $E(r_p)$, σ_p^2, m_p^3 의 3가지 母數를 가지고 다음과 같은 기본적인 假定을 前提로 한다.

i) 投資者는 3개의 母數에 의해 投資意思決定을 한다($\phi(E, \sigma, m^3)$)

ii) 投資者는 표준편차와 3次積率을 豫測할 수 있다.

iii) 投資者는 표준편차내지 분산을 회피하고 正의 非對稱度를 선호하는 行動을 한다.

이들 假定을 前提로 無危險資產과 i危險資產이 결합한 포트폴리오 p의 1次, 2次, 3次積率은 다음과 같이 나타낼 수 있다. x_i를 危險資產의 投資比率이라 할때,

$$E(r_p) = r_f(1-x_i) + E(r_i)x_i \quad \cdots\cdots ③$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= x_i^2\sigma_i^2 + (1-x_i)^2\sigma_j^2 + 2(1-x_i)x_i\sigma_{ij} \\ &= x_i^2\sigma_i^2 + (1-x_i)^2\sigma_j^2 + 2(1-x_i)x_i\sigma_{ij} \\ &= x_i^2\sigma_i^2 \quad \cdots\cdots ④\end{aligned}$$

($\because$ j가 無危險資產일때 $\sigma_j = \sigma_{ij} = 0$)

11) F. Arditti, op. cit, pp. 19-36.
H. Levy, op. cit, pp. 889-897.
S. Tsiang, op. cit, pp. 354-355.

12) R. Scott, P. Horvath,"On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance", *Journal of Finance*, Sep. 1980, pp.915-919.

13) W. H. Jean, "The Extension of Portfolio Analysis to Three or More Parameters", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jan. 1971, pp. 507-509.

$$m_p^3 = \{x_i^3 m_{r_i}^3 + 3x_i^2(1-x_i)\,E[\{r_i - E(r_i)\}^2\{r_f - E(r_f)\}] + 3x_i(1-x_i)^2 \\ E[\{r_i - E(r_i)\}\{r_f - E(r_f)\}^2 + (1-x_i)^3 m^3_{r_f}\} \\ = [x_i^3 m_{r_i}^3] \quad \cdots\cdots ⑤$$

(∵無危險資產 r_f에 대해 $m^3_{r_f} = E[\{r_f - E(r_f)\}^2] = E[\{r_f - E(r_f)\}] = 0$)

3. 3次積率의 分散投資의 效果

2次積率을 이용한 2次元의 分析에서는 다음과 같은 市場模型을 사용하였다.

$$r_{it} = a_i + b_i\,r_{mt} + e_{it} \quad \cdots\cdots ⑥$$

여기서, r_{it} : t期의 資產 i의 收益率

a_i : 常數

b_i : β係數

r_{mt} : t期의 市場포트폴리오의 收益率

e_{it} : 誤差項

또한 다음과 같은 假定으로 a_i, b_i가 不偏推定量이며 最少分散推定量임을 假定하고 있다. 즉, $E(e_i)=0$, $Var(e_i)=$一定, $Cov(e_i,\ Rm)=0$, $Cov(e_i,\ e_j)=0$, $E(e_i,\ e_j)=0$.

그러나, 여기서는 個別資產의 收益이 體系的 要因과 非體系的 要因으로 區分되는 것을 고려하여 다음과 같은 超過收益型 分析模型을 편의상 사용하여 포트폴리오의 非對稱度를 고찰하고자 한다.[14]

$$r_i - r_f = a_i + s_i + e_i \quad \cdots\cdots ⑦$$

여기서, a_i : 固有의 收益

s_i : 體系的 收益

e_i : 非體系的 收益

$E(e_i)=0$, $E(e_i,\ e_j)=0$, $E(s_i,\ e_i)=0$

個別資產收益의 非對稱度는 式⑨와 같다.

$$m_{r_i}^3 = E(r_i - \bar{r}_i)^3 \\ = m_{s_i}^3 + m_{e_i}^3 + 3\{E[(s_i - \bar{s}_i)^2 e_i] + E[(s_i - \bar{s}_i)e_i^2]\} \quad \cdots\cdots ⑧ \\ = m_{s_i}^3 + m_{e_i}^3 \quad \cdots\cdots ⑨$$

14) M. A. Simkowitz, W. L. Beedles, "Diversification in a Three-Moment World", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Dec. 1978, pp. 927-941.

式⑧에서 $m^3_{s_i}$와 $m^3_{e_i}$는 각각 體系的 非對稱度, 非體系的 非對稱度를 나타낸다. 여기서 誤差項 e_i가 $(s_i-\bar{s}_i)$에 대하여 一定일때는 相互結合(cross product)의 期待値 第3項과 4項은 0가 된다. 式⑨를 포트폴리오에 적용하면,

$$m^3_{r_p}=m^3_{s_p}+m^3_{e_p} \quad \cdots\cdots ⑩$$

여기서 포트폴리오의 非對稱度는 體系的 非對稱度와 非體系的 非對稱度로 이루어지기 때문에 $m^3_{e_p}$가(+), 0, (−)의 값을 취함에 따라 포트폴리오의 非對稱度도 增加, 不變, 減少함을 알 수 있다.[15]

포트폴리오의 非對稱度는 分散投資에 의한 非體系的 非對稱度의 減少에 의해 分散效果가 나타나는데 이를 검토하여 보기로 하자. 포트폴리오의 非體系的 非對稱度의 誤差項은 E(e)=0라고 보고 투자조합비율을 $x_i(=\frac{1}{n})$로 둔다.

$e=\Sigma_i \frac{1}{n} e_i$ 에서

$$\begin{aligned} m^3_{e_p} &= E(e-\bar{e})^3 \\ &= E(e^3) \\ &= \sum_i\sum_j\sum_k \frac{1}{n^3}\ E(e_i e_j e_k) \quad \cdots\cdots ⑪ \end{aligned}$$

式⑪을 $i=j=k$ 인때와 $i\neq j\neq k\,(\sum\sum\sum_{i\neq j\neq k})$인때로 나누어 보면,

$$\begin{aligned} m^3_{e_p} &= \Sigma_i \frac{1}{n^3}\ E(e_i^3)+\sum\sum\sum_{i\neq j\neq k} \frac{1}{n^3}\ E(e_i e_j e_k) \\ &= \frac{1}{n^2}\ \overline{m^3_{e_i}}+\frac{n^3-n}{n^3}\ \overline{m_{e_i e_j e_k}} \quad \cdots\cdots ⑫ \end{aligned}$$

단, $\overline{m^3_{e_i}}=\Sigma_i E(e_i^3)/n$

$$\overline{m_{e_i e_j e_k}}=\sum\sum\sum_{i\neq j\neq k} E(e_i e_j e_k)/n^3-n$$ [16]

分散投資에 의한 非對稱度의 감소효과를 보기위해 式⑫를 n으로 微分하고 (−)로 두면은,

$$\begin{aligned} \partial m^3_{e_p}/\partial n &= -\frac{2}{n^3}\ \overline{m^3_{e_i}}+\frac{2}{n^3}\overline{m_{e_i e_j e_k}} \\ &= -\frac{2}{n^3}\left(\overline{m^3_{e_i}}-\overline{m_{e_i e_j e_k}}\right) \end{aligned}$$

15) Ibid., p.930.
16) Ibid., pp. 930−931.

$\partial m^3_{e_p} / \partial n < 0$에서

$\overline{m^3_{e_i}} > \overline{m_{e_ie_je_k}}$, $\overline{m^3_{e_i}} > 0$가 되야 한다.

e_i, e_j, e_k간의 움직임을 살펴보면, 資產간에 서로 獨立일 때는 $\overline{m_{e_ie_je_k}} = 0$가 되며 完全相關關係에 있을 때는 $\overline{m^3_{e_i}} = \overline{m_{e_ie_je_k}}$가 된다. 요컨데 資產간이 完全相關이 아니고 正의 非體系的 非對稱度가 나타날 때는 포트폴리오의 非對稱度는 分散投資에 의해 減少되는 效果를 나타내고 있다.

現實的으로 投資者는 正의 非對稱度를 선호하는 危險回避型의 행동을 취한다고 보기 때문에, 正의 非對稱度를 갖는 收益의 分布는 投資者에 있어서 바람직한 특징을 갖는다고 할 수 있다.

Ⅲ. 3次積率의 效率的 프론티어

3次積率의 市場均衡模型을 展開하기 전에 3次積率 내지 3次元의 效率的 프론티어(frontier)의 導出에 촛점을 두고 資本市場線과 관련된 문제를 검토하기로 한다.

Jean은[17] 1次~3次의 統計的 積率이 株價와 期待收益을 여하히 決定하는 가를 제시하면서 市場狀況을 圖示的으로 나태내기 위해 2次元[σ, E(r)]의 分析을 3次元[σ, E(r), m(r)]의 공간으로 확장시켰다. 또 여기서 m(r)은 收益의 3次統計的 積率의 立方根 $[m^3(r)]^{1/3}$을 나타낸다. 本章에서는 Ingersoll의 多次元의 幾何學的 分析[18]과 Schweser의 論點을[19]보충하면서 3次元상의 效率的프론티어를 논의하고자 한다.

效率的프론티어를 구함에 앞서 이들의 평가모형에 공통적인 前提條件들을 살펴보면,

i) 投資者는 無危險利子率로 借入과 貸出을 한다.

ii) 投資者는 3次元空間[E(r), σ, m(r)]간의 이미 알고 있는 組合에 기초한 限界代替率을 가진다.

iii) 投資者는 각기 고유의 市場포트폴리오를 가진다.

iv) 效率的프론티어는 Jean의 回轉拋物線(rotated parabola) 또는 Ingersoll의 回轉双曲線(hyperbola of revolution)에 의해 묘사된다.[20]

이상에서 보면 포트폴리오의 實行可能한 集合은 投資者의 주관적인 收益의 確率分布에서 획득되는 것으로 3개의 母數[E(r), σ, m(r)]에 의해 組合된다고 할 수 있다. 〈圖1〉에서 보면, Jean

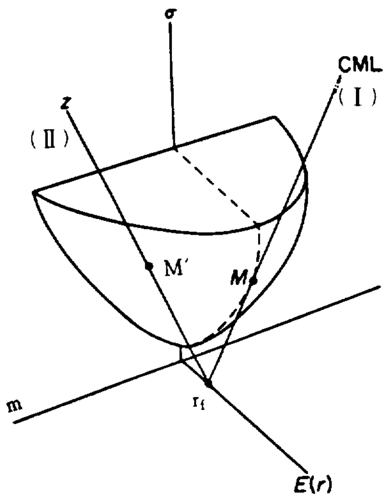
17) W. H. Jean, "More on Multidimensional Portfolio Analysis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jun. 1973, pp. 475−490.

18) J. Ingersoll, "Multidimensional Security Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Dec. 1975, pp. 785−798.

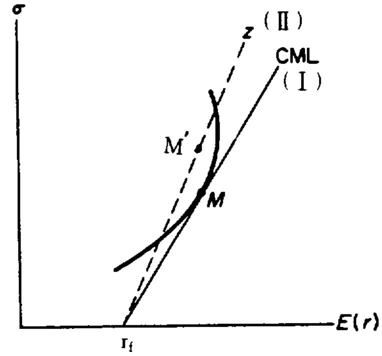
19) C. Schweser, "Multidimensional Security Pricing: A Correction", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Mar. 1978, pp. 177−183.

20) Ibid., p. 178.

은 3次元의 危險投資機會의 集合은 E−σ面의 效率的프론티어를 正의 σ축 주위에 回轉하여 도출되는 回轉雙曲面이라 하고 있다.[21]



〈圖1〉 [E(r), σ, m) 공간에서의 投資機會



〈圖2〉 [E(r), σ] 공간에서 CML에 의해 지배되는 RM'Z의 投資機會

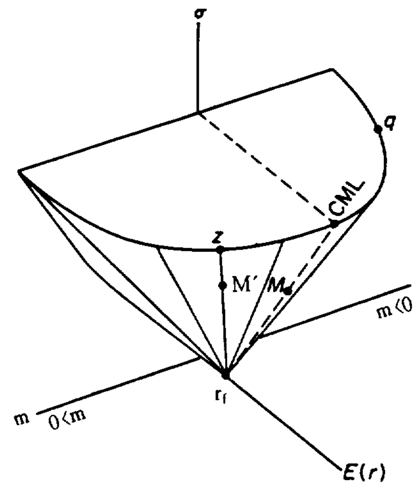
2次元상의 CML(Capital Market Line)은 E(r)축상의 r_f에서 雙曲線과의 접점 M을 통과하는 직선 I 이다. 〈圖1〉에서 點線은 〈圖2〉의 效率的프론티어를 나타낸다. 직선 I 의 경우에 m=0라고 假定했으나 직선 II 처럼 m≠0인 값을 수반하는 投資機會도 존재하게 된다. 〈圖1〉의 직선 II 는 〈圖2〉의 직선 II 와 같은데 이는 CML에 의해 지배되는 非效率的 投資機會이다. 그러나 3次元공간에서는 實行可能한 投資機會라고 할 수 있다. 그리하여, r_f에서 雙曲線과 接하는 직선은 무수히 많기 때문에 投資者에게 무수한 投資機會를 제공한다고 할 수 있다. 따라서 3次元의 實行可能한 새로운 投資機會는 點 r_f로 부터 시작하여 圓錐(cone)의 형태를 이룬다. 이때 무한한 借入의 可能性을 假定하면 직선은 上方으로 무한히 뻗어 나간다.[22]

이런 實行可能한 무수한 投資機會는 〈圖3〉과 같이 묘사할 수 있다. 그림에서 圓錐의 표면은 線型投資機會軌跡의 무수한 市場機會線으로 이루어져 있는데 이들은 [E(r), σ, m] 공간의 CML 類似群(analogues)이다.[23]

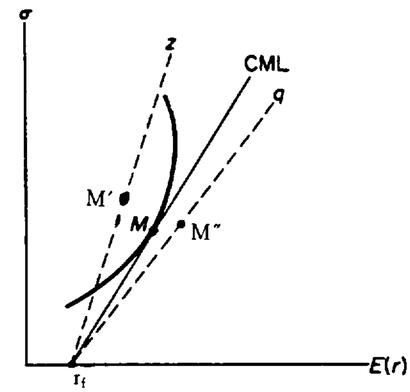
21) J. C. Francis, S. H. Archer, *Portfolio Analysis*, 2nd. ed. (New Jersey: Prentice-Hall, 1976), pp. 370−373.

22) W. H. Jean, op. cit., p.479.

23) Ibid., p. 483.



〈圖3〉 r_f로 借入, 貸出할 때의 [E(r), σ, m] 공간상의 投資機會의 圓錐



〈圖4〉 RM′z는 CML에 지배당하고 RM″q는 CML을 지배

그런데 3次元에 있어서 效率的 포트폴리오는 〈圖3〉에서 다음의 條件을 가진 圓錐의 일부분이 된다.

i) E와 σ에 대한 m의 最大值

ii) E와 m에 대한 σ의 最小值

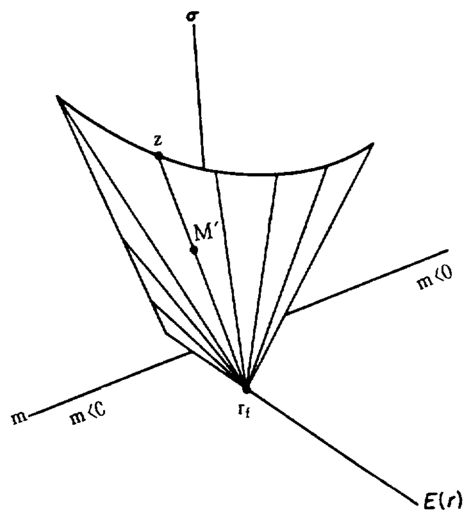
iii) σ와 m에 대한 E의 最大值

이러한 原則은 암묵적으로 危險回避型 및 正의 非對稱度를 선호하는 投資者의 合理的 行動을 假定할 것이며, 명시적으로 다음의 條件과 부합한다.

$$\frac{\partial m(r)}{\partial E(r)} \leq 0, \frac{\partial m(r)}{\partial \sigma} \geq 0, \frac{\partial E(r)}{\partial \sigma} \geq 0$$

〈圖3〉과 〈圖4〉에서 볼 수 있듯이, CML類似群은 CML에 의해 지배당하는 것도 있고 지배하는 것도 있다. RM′z는 CML에 의해 지배되지만, 正이지만 체감하는 限界效用(즉, 危險回避)을 가진 投資者는 만일 RM′z에서 投資機會가 陽의 非對稱度를 가진다면 CML보다 RM′z상의 投資機會를 選好하게 된다. 왜냐하면 RM′z상의 投資機會에 대한 3次積率의 陽의 立方根은 보다 낮은 收益에 대해 CML보다 보상적이기 때문에 CML상의 投資機會로 부터 벗어나도록 投資者를 유인한다. 반면에, RM″q는 CML을 지배하지만 3次積率의 立方根은 負이다. 따라서 效率的인 投資機會는 〈圖5〉와 같이 무수한 市場機會線을 가진 圓錐의 표면의 일부에서만 달성된다.[24] 이 경우 投資者는 同質的 期待를 하여도 각각 3개의 母數의 선호를 다르게 하기 때문에 市場機會線을 임의로 선택하게 된다고 할 수 있다.

24) Ibid., p. 483.



<圖5> [E(r), σ, m] 공간에 있어서 投資의 效率的프론티어

이상과 같은 Jean의 硏究는 3次元의 投資機會集合을 정확히 발견할 수 없었지만 볼록한 형태를 취하리라 假定하여 r_f를 중심으로 하는 圓錐의 표면의 일부에서 성립된다고 한것이다. 그런데 모든 投資者는 서로 다른 效用函數를 假定하고 있기 때문에 3次元 [E(r), σ, m]에서 서로 다른 投資選好를 하게 되므로 市場포트폴리오와 같은 唯一한 最適 危險資產의 組合은 존재하지 않는다. 따라서 3次元의 分析은 2次元과는 달리 全體 投資者가 同質的인 期待를 갖는다고 假定을 해도 一般的인 分離定理가 성립되지 않는다. 또한 效率的인 프론티어를 실제로 구하는 것도 거의 不可能하다.

Schweser는[25] 이러한 3次元 CML의 중요한 문제점을 지적하고, 規範的인 3次元 評價模型은 個別 投資者의 입장에서 展開된 것에 불과하다고 주장하면서, 이러한 CML을 따라 展開한 3次元의 評價模型은 一般的인 均型模型이라 하기 어렵다고 하고 있다.

그러나 Jean이나 Ingersoll의 3次元 評價模型의 意義는 Sharpe-Lintner模型과 比較해서 이들의 몇가지 問題點들을 시사하고 보완하려고 노력한 것에서 찾을 수 있다고 본다.

Ⅳ. 3次積率의 市場均型方程式의 導出

本章에서는 3次元 均衡狀態에 있어서 證券市場線의 導出 및 收益과 危險의 均衡關係를 명확히 하기 위해, Jean의 理論과 問題點을 論議하고, 分離定理가 成立되는 效用函數를 이용하여 危險資產의 評價模型을 도출한 Kraus와 Litzenberger의 새로운 觀點에서의 市場均衡理論을 展開하려 한다.

25) C. Schweser, op. cit., p. 177.

1. Jean의 3次積率 資本資産價格決定模型의 導出과 問題點

Jean의 3次積率 내지 3次元의 模型은 Sharpe-Lintner의 2次元 市場模型의 연장으로서의 一般化에 대한 硏究라고 볼 수 있다. Jean은 Sharpe가 期待收益과 危險간의 均衡式을 도출한 方法으로 다음과 같이 期待收益과 非對稱度와의 均衡關係를 도출하였다.[26]

$$r_i = x_i E(r_m) + (1-x_i)\cdot r_f \qquad ⑬$$
$$m^3 = x_i \cdot m^3(r_m) \qquad ⑭$$

式 ⑬, ⑭에서 (E, m)面에서의 效率的 프론티어는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E = r_f + \frac{E(r_m)-r_f}{m^3(r_m)}\cdot m \qquad ⑮$$

m>0의 假定하에서는 $E(r_m)-r_f/m^3(r_m)$은 (+)가 되어 效率的 프론티어는 正의 기울기를 갖는 직선이 된다. 각 株式의 均衡狀態에서의 期待收益率은,

$$E(R_i) = r_f + \frac{E(r_m)-r_f}{m^3(r_m)}\cdot M_{imm} \qquad ⑯$$

$$M_{imm} = E\{(r_i - E(r_i))(r_m - E(r_m))^2\}$$

여기서 M_{imm}은 市場포트폴리오와 관련된 資產 i의 體系的 非對稱度라 할 수 있고 따라서 式⑯은 2次元의 SML과 유사한 형태를 갖게 된다. 즉, 式⑯은 3次元의 均衡關係를 나타내는 評價模型이라 할 수 있다. 그런데 個別資產의 期待收益은 $E(r_m)-r_f/m^3(r_m)$이 一定하기 때문에 M_{imm}에 의존하게 된다. 요컨데, 3次元의 期待收益과 危險의 기본적 구조는 2次元과 변함이 없다고 해석이 된다.

그러나 이러한 硏究는 Arditti와 Levy에 의하면[27] 다음과 같은 問題點을 포함하고 있다고 한다.

먼저, 期待收益과 非對稱度의 均衡關係는 Sharpe의 接近法에 의거하여 展開가 된 것이지만, 投資의 最適組合의 比率 dm/dE가 效率的 프론티어의 方向的기울기(directional slope)와 같아야 한다는 經濟的으로 인정할 수 없는 假定이 설정되었다는 것이다.[28] 이때 $dm/dE = dm/dx_i \cdot dx_i/dE$

26) W. H. Jean, "The Extension of Portfolio Analysis to Three or More Parameters", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jan. 1971, pp. 505-515.

27) F. D. Arditti, H. Levy, "Distribution Moments and Equilibrium: A Comment", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jan. 1972, pp. 1429-1433.

28) W. H. Jean(1971), op. cit., p. 512.

인데 여기서 dm/dx_i는 m의 變化率이고 dE/dx_i는 E의 變化率이다. 또한 E와 m은,

$$E = x_i E(r_i) + (1 - x_i) \cdot E(r_m)$$

$$m = [x_i^3 m^3(r_i) + 3x_i^2(1 - x_i)E\{(r_i - E(r_i))^2(r_m - E(r_m))\} + 3x_i(1 - x_i)^2 E\{(r_i - E(r_i))(r_m - E(r_m))^2\} + (1 - x_i)^3 m^3(r_m)]^{\frac{1}{3}}$$

따라서 이 比率이 效率的 프론티어의 方向的 기울기와 동등하다는 假定이 성립되기 위해서는 經濟的 의미에서 E－m面의 接線의 方向的기울기를 표시하는 것이어야 한다. 따라서 이러한 假定은 經濟的 모순을 갖는다고 할 수 있다. 즉, 3次元에 있어서 經濟的 意味는 E－m面의 接線의 기울기는 각 母數의 限界代替率에 의해 표시되어야 한다는 것이다. 이러한 관점에서 Jean의 模型은 分散을 무시한 展開가 아닌가 하는 의문이 발생되는 것이다.[29]

그러나 Jean은 $E\{r_i - E(r_i))(r_m - E_m))^2\} = cov(r_i, r_m^2) - 2E(r_m) \cdot cov(r_i, r_m)$의 관계식을 提示하면서, 分散을 무시한것이 아니고 一定이라고 反論을 하고 危險프레미엄은 非對稱度뿐만 아니라 分散에 의해서도 決定된다고 주장을 하며 $E\{(r_i - E(r_i))(r_m - E(r_m))^2\}$이 변하면 $cov(r_i, r_m)$도 변한다고 하고 있다.[30]

또 하나의 問題點은 實行可能한 危險資産의 組合이 3次元에 있어서 볼록한 集合(convex set)을 形成한다고 하는 假定이다. 이는 r_f의 導入에 의해서도 지지를 받고 있고, 또 유일한 接點으로 그 필요성을 인정받고 있지만, 하나의 接點을 구하는 展開과정에서 實行可能한 危險포트폴리오의 集合이 반드시 볼록형이 아닌 오목형의 集合(concave set)의 상황에서 유일한 最適포트폴리오가 도출되지 않는 경우도 고려할 필요가 있다.[31] 따라서, 볼록형의 實行可能한 集合은 유일한 接點을 획득하기 위한 充分條件은 되나 必要條件은 아니라고 할 수 있다.[32]

살펴본바와 같이 Jean의 3次元 模型은 模型의 導出을 위한 條件들이 一般化되지 않고, 一般均衡狀態를 充足시키는 것이 아니라고 할 수 있다.

다음 節에서는 이러한 理論的 限界를 인식하면서 一般的인 3次元의 評價模型을 展開하고자 한다.

2. 3次積率의 資本資産價格決定模型의 導出

언급한 바와 같이, Jean과 Ingersoll의 理論은 一般的인 分離定理가 성립되지 않았다. 그러나 Kraus와 Litzenberger는[33] 分離定理가 성립될 수 있는 一般的인 效用函數를 채택하여 危險資産

29) F. D. Arditti, H. Levy, op. cit., p. 1431.
30) W. H. Jean, "Distribution Moments and Equilibrium: A Reply", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jan. 1972, p. 1436.
31) F. D. Arditti, H. Levy, op. cit., p. 1432.
J. Ingersoll, op. cit., p. 788.
32) J. Ingersoll, Ibid., p. 788.
33) A. Kraus, R. Litzenberger, "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets", *Journal of Finance*, Sep. 1976, pp.1085－1100.

의 評價模型을 開發하고 實證的으로 檢證을 하였다. 이를 살펴보기 위해 3次積率의 資本資産價格決定模型의 投資決定 行動에 관한 理論的 展開에 앞서 다음과 같은 條件을 定義하기로 한다.[34]

投資者의 위험자산의 포트폴리오의 收益率은 非對稱分布라 假定한다. 이 때, 投資者의 期末의 富의 確率分布를 나타내는 3次積率의 母數는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\overline{w} = \Sigma_i q_i \bar{r}_i + q_f r_f$$

$$\sigma_w = \Sigma_i q_i \beta_{ip} \sigma_p$$

$$m_w = \Sigma_i q_i \gamma_{ip} m_p$$

여기서,

$r_i = 1 +$ 危險資産 i의 期待收益率

$r_f = 1 +$ 無危險資産의 收益率

$q_i =$ 投資者의 危險資産 i의 保有量

$q_f =$ 投資者의 無危險資産의 保有量

$\sigma_p = [E[(\tilde{r}_p - \bar{r}_p)^2]]^{1/2}$

$\beta_{ip} = E[(\tilde{r}_i - \bar{r}_i)(\tilde{r}_p - \bar{r}_p)]\sigma_p^2$ (危險資産 i의 β係數)

$m_p = [E[(\tilde{r}_p - \bar{r}_p)^3]]^{1/3}$ (危險資産 포트폴리오 收益率의 非對稱度의 立方根)

$\gamma_{ip} = E[(r_i - \bar{r}_i)(r_p - \bar{r}_p)^2] / m_p^3$

$= m_{ipp} / m_p^3$ (危險資産 i의 감마係數)

가. 個別投資者의 均衡方程式의 導出

投資者는 3次元의 母數 $\phi(\overline{w}, \sigma_w, m_w)$에 의해 投資意思決定을 하지만, 실질적으로는 借入, 貸出의 可能額 및 投資額이 豫算制約을 받기 때문에 다음과 같은 目的函數와 制約條件으로 표시할 수 있다.

$$\text{Max.}: \phi(\overline{w}, \sigma_w, m_w)$$

$$\text{Sub. to.}: \Sigma_i q_i + q_f = w_o$$

단, w_o : 期初의 投資者의 富

여기서, 期末의 富에 대한 投資者의 期待效用을 最大로 하기 위해 Lagrangu乘數를 도입하면,

$$L = \phi(\overline{w}, \sigma_w, m_w) - \lambda(\Sigma_i q_i + q_f - w_o) \quad \text{⑰}$$

式⑰은 q_i, q_f에서 편미분하고 λ를 소거하면, 投資者의 均衡方程式을 구할 수 있다.

34) Ibid., p. 1087.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial \phi(\overline{w}, \sigma_w, m_w)}{\partial q_i} - \lambda$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial \overline{w}} \cdot \frac{\partial \overline{w}}{\partial q_i} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_w} \cdot \frac{\partial \sigma_w}{\partial q_i} + \frac{\partial \sigma_w}{\partial q_i} + \frac{\partial \phi}{\partial m_w} \cdot \frac{\partial m_w}{\partial q_i} - \lambda$$

$$= \phi_{\overline{w}} \, \overline{r}_i + \phi\sigma_w \beta_{ip} \sigma_p + \phi m_w \gamma_{ip} m_p - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_f} = \frac{\partial \phi(\overline{w}, \sigma_w, m_w)}{\partial q_f} - \lambda$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial \overline{w}} \cdot \frac{\partial \overline{w}}{\partial q_f} - \lambda$$

$$= \phi_{\overline{w}} \, r_f - \lambda$$

여기서, $\partial L/\partial q_i=0$, $\partial L/\partial q_f=0$로 두고 λ를 소거하면,

$$\phi_{\overline{w}} \overline{r}_i + \phi\sigma_w \beta_{ip} \sigma_p + \phi m_w \gamma_{ip} m_p = \phi_{\overline{w}} r_f$$

$$\phi_{\overline{w}}(\overline{r}_i - r_f) = -\phi\sigma_w \beta_{ip} \sigma_p - \phi m_w \gamma_{ip} m_p \qquad \text{⑱}$$

에서 다음과 같은 投資者의 均衡方程式이 導出된다.[35]

$$\overline{r}_i - r_f = -(\phi\sigma_w/\phi_{\overline{w}})\beta_{ip}\sigma_p - (\phi m_w/\phi_{\overline{w}})\gamma_{ip} m_p \qquad \text{⑲}$$

(모든 i에 대해)

여기서, $-(\phi\sigma_w/\phi_{\overline{w}}) = \partial\overline{w}/\partial\sigma_w$: 期待收益과 標準偏差사이의 限界代替率

$-(\phi m_w/\phi_{\overline{w}}) = \partial\overline{w}/\partial m_w$: 期待收益과 非對稱度간의 限界代替率

이때, 期末의 富의 期待效用은 一定하게 유지하고 있다고 한다.[36] 均衡方程式 式⑲가 의미하는 바를 살펴보자.

각 個別資産의 危險프레미엄은 (a) 포트폴리오의 標準偏差에 대한 個別資産의 限界貢獻度(marginal contribution)에 期待收益과 標準偏差간의 限界代替率을 곱한 것과 (b) 포트폴리오의 非對稱度에 대한 個別資産의 限界貢獻度에 期待收益과 非對稱度간의 限界代替率을 곱한것을 合한 값과 같은 경우에, 投資者의 포트폴리오를 형성하는 危險資産과 無危險資産의 分配가 最適이 된다는 것을 나타낸다.

그런데, 式⑲는 個別投資者에 대한 均衡方程式이기 때문에 效率的 포트폴리오는 個別投資者에 따라 相異한 最適構成比率을 가지게 된다. 따라서 式⑲의 危險프레미엄은 全體 投資者에 대해 共通的인 構成比가 되지 않기 때문에 一般均衡方程式은 아니다. 따라서 一般均衡狀態를 만족시

35) Ibid., p. 1087.
36) Ibid., p. 1087.

키기 위해 3次元에 있어서도 最適포트폴리오상의 각 投資者가 차지하는 危險資産의 構成比가 항상 동일하게 되는 條件을 고찰해야 한다.

먼저, 一般均衡을 성립시키기 위해 同質的 期待의 假定을 導入할 수 있고 모든 投資者가 유일한 最適포트폴리오를 共有하기 위해, 이를 구성하는 危險資産의 구성비는 富의 規模 또는 無危險資産에의 投資額에 관계없이 各 危險資産에게 一定하게 되어야 하는 分離定理가 성립되어야 한다. 따라서, 3次元에 있어서 最適포트폴리오의 構成比가 동일하게 되는 條件을 구하기 위해 一般的인 分離定理를 고려하고 그 결과 유도되는 3次效用函數를 특정화 시켜야 할 것이다. 이러한 效用函數를 Rubinstein은[37] 分離可能한 3次效用函數(separable cubic utility function)라 하고 있다. 이 函數가 특정화되는 경우에, 3개의 母數가 동시에 고려되고 投資者의 最適投資行動이 파악되면은 Jean의 理論的 問題는 명확히 해결 될 것으로 본다.

다음에, 分離可能한 3次效用函數를 고찰하기로 하자.

나. 3次積率 포트폴리오의 分離定理

2次元의 경우와 마찬가지로, 3次元의 投資決定에 있어서 一般的인 市場均衡狀態로 이행될 때 一般的인 分離定理를 따르는 選好條件을 구할 수 있다. 따라서 投資者의 3次效用에 대한 必要充分條件을 명확히 하여야 한다.

이에 대해 Hakansson은[38] 그 必要條件을 證明해 내고 Cass와 Stiglitz는[39] 그 充分條件을 證明하였다. 이들에 의하면 分離定理의 必要充分條件은 각 投資者의 危險許用限度(risk tolerance)가 모든 投資者에 대해 共通의 동일한 注意性(cautiousness) β를 가지고 다음과 같은 富의 1次線型關係이어야 한다고 하였다.[40]

$$-u_i'(w_i)/u_i''(w_i) = \alpha_i + \beta w_i \qquad ⑳$$

단, α_i, β : 定數

Mossin은 이 式을 危險許用函數(risk tolerance function)라 하고[41] 絶對的 危險回避度의 逆數이며, 線型危險許用(linear risk tolerance: LRT) 函數로써 사용하고 있다.[42]

이 경우 一般均衡關係를 도출하기 위해, 同質的 期待의 假定과 同一한 注意性등의 假定이 중요한 前提條件이 된다.

37) M. E. Rubinstein. "The Fundmental Theorem of Parameter-Preference Security Valuation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jan. 1973, pp.62-72.

38) N. H. Hakansson. 'Risk Disposition and the Separation Property in Portfolio Selection", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Dec. 1969, p.401-416.

39) D. Cass, J. E. Stiglitz, "The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds", *Journal of Economic Theory*, Jun. 1970, pp.122-160.

40) Ibid., pp.144-147.

41) J. Mossin, *Theory of Financial Market* (New-York: McGraw-hill, 1973), p.113.

42) R. R. Grauer, "Generalized Two Parameter Asset Pricing Models", *Journal of Financial Economics*, Jun. 1978, pp.11-14.

언급한 危險許用函數에 대하여 명확히 展開하여 보자. 그런데 分離定理의 展開에 있어서는 狀態選好接近法(state-preference approach)을 이용한다.[43] 그런데 Jensen은[44] 狀態選好接近法은 理論的 問題를 검토하는데는 우수한 프레임을 제공하나, 實證的인 단계에서는 檢證하기 어려운 문제점을 지적하였지만, 狀況의 事象이나 그의 部分的 集合에 수반되는 確率을 직접 측정하는 것에서 確率의 資料가 간소화되는 잇점이 있다.[45] 또한 여기서는 未來의 狀況을 도입한 것이라 할 수 있고 期間에 있어서 確率에 결부되는 事象이나 그 部分集合이 달라진 狀況이기 때문에 현저한 長點을 살릴 수 있는 것같다. 사실, 狀態選好接近法은 成長-最適의 프레임 또는 Option價格形成의 프레임 웍 등의 多角的 의미를 갖는 문제에 이용이 많이 되고 있다.[46]

여기서는 狀態選好法에 의한 分離定理를 展開함에 있어서, 市場에서의 資金配分의 最適條件을 구하여 分離可能한 效用函數의 특정화 이론을 展開하려 한다.

Mossin에 의하면,[47] 投資對象이 되는 企業이 狀況에 수반되는 지불을 하면 投資者가 얼마를 받아들이는 가를 決定하는 것에서 Pareto最適의 條件이 구하여져 最適의 一定 構成比率을 갖는 포트폴리오의 선택이 행하여 진다고 한다. 따라서, Pareto最適을 구하기 위해 市場에서의 投資者의 收益을 할당하는 最適 分配規則(sharing rule)을 살핀다.

企業의 지불 $x_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$에 대한 각 投資者의 割當이 一連의 收益函數에 의해 나타난다고 假定하여, 다음과 같은 分配規則의 函數를 정한다.

$W^i_{1e} = g_i(x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_n)$

단, e : x_i가 발생하는 狀況

이상의 分配規則을 均衡狀態에서 市場의 期末의 富의 總額(W^M_{1e})이 각 投資者에 대해 어떻게 분배되어지는가 하는 條件을 의미하며, e狀況에서의 총수익을 $W^M_{1e} = \Sigma_i X_{ie}$ 라 하면 다음 條件을 만족시켜야 한다.[48]

$\Sigma_i W^i_{1e} = W^M_{1e}$ (모든 e에 대해) ·· ㉑

43) J. Hirshleifer, *Investment, Interest and Capital* (New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1970), pp. 215-241.

44) M. C. Jensen, "Capital Market: Theory and Evidence", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Autumn 1972, pp.357-358.

45) W. H. Sharpe, *Portfolio Theory and Capital Market* (New York: McGraw-Hill Inc., 1970), pp. 202-211.
M. Rubinstein, "The Fundamental Theorem of Parameter-Preference Security Valuation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jan. 1973, p.61.

46) J. Mossion, "Optimal Multiperiod Portfolio Polices", *Journal of Business*, Apr. 1968, pp.215-229.
D. T. Breeden, R. Litzenberger, "Pricies of State Contigent Claims Implicit in Option Pricies", *Journal of Business*, Oct. 1978, pp. 621-651.

47) J. Mossin (1973), pp. 102-125.

48) Ibid., p. 107.

投資者는 收益에 대한 危險을 고려하면서 資產을 획득하고 危險을 分配하기 때문에, 收益의 分配와 함께 최소한의 Pareto最適을 구하는 의미에서 危險의 分配에 대해서도 最適의 選擇條件을 만족시키는 分配規則이 있어야 한다.

危險의 最適分配는 式㉑의 條件하에서 投資者의 一定한 忍耐의 정도(k_i)로 加重하여 期待效用 $E(u_i)$를 最大로 하는 것이라 한다면, 投資者의 期待效用은,

$$E(u_i)=\Sigma_e\psi_e u_i(W^i_{1e})\ (\text{모든 } i\text{에 대해}) \cdots\cdots ㉒$$

단, ψ_e=e狀況에서의 確率分布函數

式㉑을 制約條件으로 하고 式㉒를 最大化시키면,

$$\text{Max.}: E(u_i)=\Sigma_e\psi_e u_i(W^i_{1e})$$

$$\text{Sub. to.}: \Sigma_i W^i_{1e}=W^M_{1e}$$

이를 풀기위해 Lagrangu乘數를 도입하면,

$$L=\Sigma_i k_i E(u_i)+\lambda_e[W^M_{1e}-\Sigma W^i_{1e}] \cdots\cdots ㉓$$

式㉓은 W^i_{1e}로 微分하고, 0로 두면,

$$\partial L/\partial W^i_{1e}=k_i u'_i(W^i_{1e})\,\psi_e-\lambda_e=0 \cdots\cdots ㉔$$

(모든 i, e에 대해)

式㉔를 Pareto最適을 위한 형태로 전환하면,[49]

$$k_i u'_i(W^i_{1e})=k_1 u'_1(W^1_{1e})$$
$$=u'_i(W^1_{1e}) \cdots\cdots ㉕$$

단, $k_1=1$, k_i=임의의 正의 整數($i=2,\cdots\cdots$)

市場에 있어서 投資者의 행위에 따라 式㉕가 어떠한 Pareto最適 條件을 제공하는가를 살펴본다.

먼저, 危險에 대해 中立的 投資者의 경우에는 우변의 $u'_1(W^1_{1e})$는 一定이며 모든 e에 대해 同一하나, 좌변은 $i\neq 1$에서의 一定을 의미하지 않기 때문에 式㉕는 성립되지 않는다고 할 수 있다.

投資者가 危險에 대해 中立이 아닌 경우에, 投資者는 對數效用函數 $u_i(W^i_1)=\log(W^i_1)$을 갖는다고 假定하면, 式㉕는,

49) Ibid., pp. 103－104.

$u_i'(u_1^i) = 1/w_1^i$ 에서
$k_i/w_1^i = 1/w_1^1$
$\therefore w_1^i = k_i w_1^1$ .... ㉖

式㉖에 Σi 를 곱하고, 式㉑을 이용하면

$$\Sigma_i w_1^i = w_1^1 \Sigma k_i = w_1^M \quad \text{㉗}$$

式㉖의 w_1^1에 대해 정리하여 式㉗에 代入하면 다음과 같은 最適分配規則의 條件을 도출할 수 있다.[50]

$$w_1^i = (k_i/\Sigma_i k_i)\, w_1^M \quad \text{㉘}$$

式㉘의 의미는, Pareto最適을 얻기 위해서는 全體企業의 總收益의 구성과 관계없이 각 投資者의 總收益의 分配比($k_i/\Sigma_i k_i$)는 一定하게 되는것을 나타낸다.

또, 投資者가 2次型의 效用函數 $u_i(W_1^i) = W_1^i - c_i W_1^{i2}$ 을 갖는다고 假定하면,
式 ㉕는
$u_i'(w_1^i) = 1 - 2C_i w_1^i$ 에서,
$k_i(1 - 2C_i w_1^i) = 1 - 2C_1 w_1^1$ 이 되며,
$w_1^i = (1/2C_i) - (1/2C_i k_i)(1 - 2C_1 w_1^1)$ .... ㉙

가 된다. 式㉙에서 Σ_i를 곱하고 式㉑을 이용하면,

$$\Sigma_i w_1^i = \Sigma_i 1/2C_i - (1 - 2C_1 w_1^1)\Sigma_i (1/2C_1 k_i) = w_1^M \quad \text{㉚}$$

式㉚에서 $c_1 w_1^1$에 대해 정리하고 式㉙에 代入하면,

$$w_1^i = \frac{1}{2C_i} - \frac{1/C_i k_i}{\Sigma_i 1/C_i k_i}\left(\Sigma_i \frac{1}{2C_i} - w_1^M\right) \quad \text{㉛}$$

式㉛은 式㉘과 같이 W_1^i가 W_1^M의 1次函數로 되어 있고 Pareto最適을 얻기 위해서는 각 投資者의 總收益率의 分配比가 一定하게 됨을 나타낸다.

그런데, 式㉘은 W_1^i의 線型條件이 $W_{1e}^i = \alpha_i + \beta_i W_{1e}^M$이라 하면 $\alpha_i = 0$인 경우기 때문에 無危險資產이 存在하는 경우는 적용되기 어렵다고 할 수 있으나, 式㉛의 경우는 α_i가 一定이므로 無危險資產의 存在가 고려되고 危險資產에 대해서는 全體企業의 總收益의 構成에 관계없이 一定한 分配規則에 의해 각 投資者에게 分配를 행한다고 할 수 있다. 즉, pareto最適條件은 個別投資者의 收益이 市場포트폴리오의 總收益과 線型關係를 갖는다고 볼 수 있다. 여기서 最適의 分配規

50) Ibid., p.108.

則이 線型이 되는 條件은 式㉕의 最適條件과 $W^i_{1e} = \alpha_i + \beta_i W^M_{1e}$의 線型條件에 대한 必要充分條件을 구하는 것이라 할 수 있다. 단, α_i. β_i는 W^M_{1e}에 관계없이 k_i에 의존한다고 할 수 있다.[51)] 그리하여, 式㉕의 最適條件을 W^M_{1e} 및 k_i에 있어 微分을 하면,

$$k_i\, u_i''(w^i_{1e})\beta_i = u_1''(w^1_{1e})\beta_i \quad \cdots\cdots \quad ㉜$$

$$u_i'(w^i_{1e}) + k_i\, u_i''(w^i_{e})(\alpha_{ii} + \beta_{ii}\, w^M_{1e})$$
$$= u_1''(w^1_{1e})(\alpha_{1i} + \beta_{1i}\, w^M_{1e}) \quad \cdots\cdots \quad ㉝$$

式㉜, ㉝을 $W^M_{1e} = (W^i_{1e} = \alpha_i)/\beta_i$를 使用하여 정리하면, 線型危險許用函數의 형태가 도출된다.

$$-u_i'(w^i_{1e})/u_i''(w^i_{1e}) = \alpha_i + \beta_i w^i_{1e} \quad \cdots\cdots \quad ㉞$$

윗式에서 最適分配規則은 線型이라는 條件은 명확해 진다.

다음에 最適分配規則을 만족시키는 效用函數를 검토하기 위해 式㉞의 양변을 積分하고, 投資者의 富의 效用函數 $u_i(W^i_{1e})$를 구한다. 그리고 이 效用函數가 正의 線型變換을 하는 것에서 母數 βi의 값에 따라 다음과 같이 된다.

$$\beta_i = 0:\ u_i'(w^i_{1e}) \sim e^{-w^i_{1e}/\alpha_i} \quad \cdots\cdots \quad ㉟$$

$$\beta_i \neq 0:\ u_i'(w^i_{1e}) \sim (\alpha_i + \beta_i w^i_{1e})^{-1/\beta_i} \quad \cdots\cdots \quad ㊱$$

단, 여기서 tilt(～)는 效用函數 u_i가 正의 線型變換까지 一意的임을 나타낸다.

指數型 式㉟의 경우에 式㉕에서 $k_i e^{-w^i_{1e}/\alpha_i} = e^{-w^1_1 e/\alpha_1}$의 線型이 되고 式㊱의 경우에는 동등한 β_i를 가지며 $k_i(\alpha_i + \beta_i W^i_{1e})^{-1/\beta_i} = (\alpha_i + \beta_i W^1_{1e})^{-1/\beta_1}$의 線型이 된다. 따라서 Pareto最適을 형성시키는 最適分配規則은 線型이라 할 수 있고, 따라서 均衡에서는 $\beta_i = \beta$가 되어 전체 投資者는 동일한 기울기를 갖는다고 볼 수 있다.

다음에 포트폴리오의 分離可能한 效用函數의 형태를 살펴보자. 分離可能한 效用函數는 式⑳의 條件이 만족된다면 도출할 수 있지만, 均衡狀態에서는 全體 投資者가 동일한 기울기의 線型函數를 가진다는 假定에서 β의 값에 따라 어떠한 效用函數의 형태를 나타내는 가를 살핀다.

$\beta_i = 0$인때, 式㉟의 양변을 積分하면,

$$u_i(w^i_{1e}) \sim -\alpha_i e^{-w_i/\alpha_i}$$

$\beta_i \neq 0$, 1인때, 式㊱의 양변을 積分하면,

$$u_i(w^i_{1e}) \sim \frac{1}{\beta - 1}(\alpha_i + \beta w_i)^{1 - \frac{1}{\beta}}$$

51) Ibid., p. 114.

$\beta = 1$ 인때, $u_i'(w_{1e}^i) \sim (\alpha_i + w_i)^{-1}$ 에서,
$u_i(w_{1e}^i) \sim \ln(\alpha_i + w_i)$

따라서 線型危險許用 效用函數는 指數型, 對數型, 累乘型으로 정리할 수 있다.

(a) $-\alpha_i e^{-w_i/\alpha_i}, (\beta = 0)$
(b) $\ln(\alpha_i + w_i), (\beta = 1)$
(c) $\frac{1}{\beta - 1}(\alpha_i + \beta w_i)^{1-\frac{1}{\beta}}, \quad (\beta \neq 0, 1)$

線型危險許用의 3次效用函數가 이용된 경우에는 각 投資者의 富는 그들의 富와 관계없이 일정한 동일한 危險資産의 구성비를 갖는 市場포트폴리오와 無危險資産으로 分配되는 分離定理가 성립되는 것이다. 따라서 線型危險許用函數를 사용한 3次元의 評價模型의 경우에는 一般的인 分離定理가 존재하므로 一般均衡의 3次積率내지 3次元의 評價模型을 도출할 수 있다고 보는 것이다.

다. 期待收益과 危險의 均衡關係

Kraus와 Litzenberger는 線型危險許用의 效用函數를 사용하여 資産의 期待收益과 危險의 均衡關係를 명확히 하는 3次積率의 一般均衡狀態를 유도하였다.[52]

市場均衡狀態에서는 式⑲의 포트폴리오 P는 市場포트폴리오 M으로 전환된다. 그런데 均衡狀態에서 市場포트폴리오에 대한 收益率은 非對稱的인 分布를 갖는다고 假定하면, 個別資産의 危險프레미엄의 상대적인 危險의 관계에 따라 다음과 같은 과정을 거쳐 式㊳과 같은 均衡方程式이 도출된다.

$$r_i - r_f = -(\phi\sigma_w/\phi_{\bar{w}})\beta_{ip}\sigma_p - (\phi m_w/\phi_{\bar{w}})\cdot\gamma_{ip}m_p \quad \cdots\cdots ⑲$$

式⑲의 2개의 偏微分 項에 있어서 L을 微分하고 0로 두면,

$$dL(=0) = \partial\phi/\partial\bar{w}\,d_{\bar{w}} + \partial\phi/\partial\sigma_w d\sigma_w + \partial\phi/\partial m_w dm_w$$
$dm_w = 0$ 면,
$$d\bar{w}/d\sigma_w = -\partial\phi/\partial\sigma_w/\partial\phi/\partial\bar{w}$$
$d\sigma_w = 0$ 면,
$$d\bar{w}/dm_w = -\partial\phi/\partial m_w/\partial\phi/\partial\bar{w}$$

여기서 式⑲의 P를 M으로 轉換하여 展開하면 다음과 같은 市場均衡方程式이 도출된다.

$$\bar{r}_i - r_f = (d\bar{w}/d\sigma_w)\beta_{iM}\sigma_M + (d\bar{w}/dm_w)\gamma_{iM}m_M$$
$$= (d\bar{w}/d\sigma_w)\sigma_M\cdot\beta_{iM} + (d\bar{w}/dm_w)m_M\gamma_{iM} \quad \cdots\cdots ㊲$$

52) A. Kraus, R. Litzenberger, op. cit., pp. 1085–1100.

式㊲을 變換하면,

$$\bar{r}_i - r_f = b_1 \beta_{iM} + b_2 \gamma_{iM} \quad \cdots\cdots ㊳$$

$\beta_{iM} = \sigma_{iM} / \sigma^2_M$(市場 beta 또는 危險資產 i의 體系的 危險)
$\gamma_{iM} = m_{iMM} / m^3_M$ (市場 gamma또는 危險資產 i의 體系的 非對稱度)
$b_1 = (d\bar{w} / d\sigma_w)\sigma_M$
$b_2 = (d\bar{w} / dm_w) m^3_M$ (모든 投資者에 대해)
σ_M : 市場포트폴리오의 標準偏差
m_M : 非對稱度의 立方根($3\sqrt{m^3_M}$)

式㊳은 市場의 變動性은 2개의 體系的 危險要因에서 기인한다는 것을 나타내고있다. 이는 모든 投資者에게 적용되기 때문에, b_1 및 b_2는 全體投資家에게 一定이다. b_1은 β危險低減의 市場價格인데, 危險 1單位의 低減에 의한 期待收益의 減少를 의미한다. b_2는 γ危險의 市場價格($m_M \neq 0$의 假定)이다.[53] b_2의 경우에는 絶對的 危險回避의 감소원칙에 의하면, $d\bar{w}/dm_w$의 부호가(－)가 된다. 즉,

$$\partial\phi/\partial m_w > 0, \ \partial\phi/\partial\bar{w} > 0 \text{에서}$$
$$d\bar{w}/dm_w = -(\partial\phi/\partial m_w)/(\partial\phi/\partial\bar{w}) < 0$$

따라서, b_2는 m_M의 부호와 역의 부호를 가진다. 이는 3次元의 危險프레미엄은 分散과 正의 관계에 있으나 非對稱度와는 역의 관계에 있다고 주장한 Arditti의 견해와[54] 일치한다.

포트폴리오의 경우, 體系的 危險β 및 體系的 非對稱度 γ는 加算的 성질을 갖다.

$\beta_{PM} = \Sigma_i x_i \beta_{iM}$
$\gamma_{PM} = \Sigma_i x_i \gamma_{iM}$

여기서 危險資產의 配分比 $x_i = q_i / w_0$이다.

市場포트폴리오에 대해서 $\beta_{MM}=1$, $\gamma_{MM}=1$이기 때문에 市場포트폴리오의 危險프레미엄은,

$$\bar{r}_M - r_f = b_1 + b_2 \quad \cdots\cdots ㊴$$

이러한 결과는, 市場의 危險프레미엄자체는 3次元에서는 危險의 市場尺度 b_1, b_2에 의해 영향을 받아 市場자체의 움직임과 한사람의 投資者의 행동이 동일시 되는것을 나타낸다.

요컨데 投資者의 공통적 선호에 의해 危險의 市場尺度 b_1, b_2가 나타나는 것에서 b_1, b_2는 投資者의 效用函數의 파라메타와 函數的 형태의 특정화에 의해 유일하게 결정된다고 할 수 있다.

53) Ibid., p. 1088.
54) F. Arditti, op. cit., p. 21.

log效用函數는 絶對的 危險回避의 減少와 相對危險回避의 一定의 특징을 갖고 있기 때문에[55] 이때 모든 投資者가 log效用函數를 갖고 있는 경우를 고려해 보자.

Taylor展開를 이용한 log效用函數를 사용하면 均衡評價模型에 있어서 b_1과 b_2는 다음과 같다.

$$b_1 = \frac{\sigma_M^2}{\bar{r}_M} / \left(1 + \frac{\sigma_M^2}{\bar{r}_M^2} - \frac{m_M^3}{\bar{r}_M^3}\right) \quad \cdots\cdots \text{⑳}$$

$$b_2 = \frac{m_M^3}{\bar{r}_M^2} / \left(1 + \frac{\sigma_M^2}{\bar{r}_M^2} - \frac{m_M^3}{\bar{r}_M^3}\right) \quad \cdots\cdots \text{㉑}$$

Kraus와 Litzenberger에 의하면 式⑳, ㉑의 b_1, b_2가 多期間에 있어서 一般的 均衡狀態를 설명하고 있다고 주장하고 있다.[56] 즉, 式 ⑳과 ㉑은 期間t의 市場收益率의 積率로서의 $\bar{r}_M$, σ_M^2, m_M^3과 期間 t의 β危險低減市場價格과 γ市場價格으로 해석한다.

또 이들은 證券特性線의 형태를 특정화함으로서 3次積率의 資本資産價格決定模型과 傳統的 資本資産價格決定模型 사이의 函數的 關係를 명확히 하였다.[57] 즉, 線型特性線은 傳統的 理論과 일치하고, 2次特性線은 3次積率 資本資産價格決定模型과 일치한다고 보고 2次特性線을 다음과 같이 表現하였다.

$$\tilde{r}_i - r_f = C_{0i} + C_{1i}(r_M - r_f) + C_{2i}(\tilde{r}_M - \bar{r}_M)^2 + \tilde{e}_i \quad \cdots\cdots \text{㉒}$$

여기서, $\tilde{e}_i$는 等分散을 가지며, 市場포트폴리오의 超過收益率($r_M - r_f$)와 $(\tilde{r}_M - \bar{r}_M)^2$과는 獨立이며 $E(e_i)=0$인 誤差項이다.

이때, i 危險資産의 β 및 γ 係數는,

$$\beta_{iM} = C_{1i} + C_{2i}(m_M^3 / \sigma_M^2)$$
$$\gamma_{im} = C_{1i} + C_{2i}\{[k_M^4 - (\sigma_M^2)^2] / m_M^3\}$$

$k_M^4 = E[(\tilde{r}_M - \bar{r}_M)^4]$이고, 이는 市場포트폴리오의 收益率의 4次中心積率이다. $C_{2i}=0$를 갖는 線型特性線을 갖는 危險資産은 $\beta_{iM}=\gamma_{iM}$이 된다. 모든 危險資産이 線型特性線을 갖는다면 3次積率 資本資産價格決定模型 式⑱은 傳統的 Sharpe-Lintner模型으로 되돌아 간다고 보고 있다. 단, 이러한 결과는 市場포트폴리오의 收益率이 非對稱分布를 가질때 맞아들어 간다. 이때, 포트폴리오 p는 $C_{0p}=\Sigma_i X_i C_{0i}$, $C_{1p}=\Sigma_i X_i C_{1i}$, $C_{2p}=\Sigma_i X_i C_{2i}$가 되며 市場포트폴리오에 대해서는 $C_{0M}=0$, $C_{1p}=1$, $C_{2p}=0$가 된다.

Kraus와 Litzenberger는 포트폴리오 자체보다 포트폴리오를 구성하는 普通株에 대해 檢定可能한 假說을 유도하였다.[58]

55) A. Kraus, R. Litzenberger, "Market Equilibrium in a Multiperiod State Preference Model with Logarithmic Utility", *Journal of Finance*, Dec. 1975, pp. 1213-1227.
56) A. Kraus, R. Litzenberger (1976), op. cit., p.1089.
57) Ibid., pp. 1090-1091.
58) Ibid., pp. 1091-1098.

즉, 資產의 危險프레미엄은 β체계적 위험과 陽으로 관련되고, γ체계적 위험과 역으로 관련된다는 假說을 式㊸으로 推定하여 檢定하였다.

$$\bar{r}_{it} = \hat{b}_{0t} + b_{1t}\,\hat{\beta}_{it} + b_{2t}\,\hat{\gamma}_{it} + e_i \qquad ㊸$$

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T}\ \Sigma_i^T \frac{r_{it} - r_{ft}}{r_{ft}}$$

檢定結果는, $b_{0t}=-0.109$, $\hat{b}_{1t}=-1.119$, $\hat{b}_{2t}=-0.212$, $t(\hat{b}_{0t})=-0.322$, $t(\hat{b}_{1t})=2.230$, $t(\hat{b}_{2t})=-1.905$, Avg. $\bar{R}^2=0.451$로 나타났다.

이러한 實證的 증거는 설정한 3次積率의 資本資產價格決定模型과 일치하는 것이다. 즉 投資者는 分散을 회피하고 正의 非對稱度를 선호한다고 할 수 있다. 또한, Friend와 Blume,[59] Black, Jensen 및 Scholes,[60] Fama와 MacBeth[61] 등의 2次積率의 資本資產價格決定模型의 否定的 硏究의 理論的 SML과 實證的 SML의 불일치, 收益率의 豫測値의 불일치등은 體系的 非對稱度를 고려하지 않은 것에서 결론지어 진것이라는 것을 암시하고 있다. 그리고 資本資產價格決定模型이 體系的 非對稱度를 포함하여 擴張될 때, 模型의 豫測機能이 확립되고 超過收益의 공간에서 SML의 절편이 0을 가지는 것이 검증된다고 하고 있다.

그러나, Kraus와 Litzenberger는 log效用函數가 아닌 다른 效用函數의 특정화에 의한 評價模型의 展開 및 特定化된 函數와 危險의 市場尺度와의 函數關係는 충분히 설명하지 못하고 있다. 또 이러한 이들의 模型은 Friend와 Westerfield의 檢定에 의해 반박되었다.[62] 이들은, Kraus와 Litzenberger의 模型으로 1952年부터 1976年까지 NYSE의 株式과 債權을 대상으로 危險과 收益의 均衡關係를 檢定한 결과, 投資者들의 포트폴리오의 期待收益이 陽의 非對稱度를 선호한다는 것을 증명했으나, 3次積率의 資本資產價格決定模型에서 처럼 個別資產의 價格決定에 非對稱度가 어떤 영향을 미치는가에 대한 증거는 찾지 못했다. 이들은, Kraus와 Litzenberger의 檢定結果는 이들이 선택한 特定期間과 特定檢定節次에 국한된 것이라고 결론을 내리고 있다.

이렇게 본다면, 3次積率의 資本資產價格決定模型은 投資者의 선택기준을 명확히 설명하여 平均－分散의 2次積率基準의 한계를 해결할 수 있는 중요한 실마리를 제시해 준 것은 분명하지만, 다만 實證的 측면서 완전히 성숙되지 않았다고 할 수 있다.

---

59) I. Friend, M. Blume, op. cit., pp. 561－575.
60) F. Black, M. Jensen, M. Scholes, op. cit., pp. 79－121.
61) E. Fama, J. MacBeth, op. cit., pp. 607－636.
62) I. Friend, R. Westerfield, "Co-Skewness and Capital Asset Pricing", *Journal of Finance*, Sep. 1980, pp. 897－913.

V. 結　　論

지금까지, 平均－分散基準의 2次積率의 資産評價模型이 實證的으로 나타난 結果와 모순된 原因의 하나는, 分散보다도 더 높은 次數의 積率을 무시한 결과라고 하는 해석하에서 非對稱度를 포함한 3次積率의 市場均衡模型이 展開가 되었다.

이러한 3次積率의 資本資産價格決定模型을 도출하기 위해, 3次積率의 성질, 이에 대응하는 效用函數의 型, 그리고 3次元의 效率的 프론티어를 구하는 幾何學的인 分析, 마지막으로 非對稱度의 評價模型의 效用등을 고찰하면서 3次積率의 均衡方程式을 유도하였다. 이러한 市場均衡方程式에 있어서 kraus와 Litzenberger는 分離定理가 성립가능한 一般的인 效用函數를 채택하여 危險資産의 評價模型을 개발하고 實證的으로 模型을 檢定하였는데, 특히 期待收益에 대한 적절한 危險의 尺度는 3次積率인 非對稱度 그 자체보다는 市場의 體系的 非對稱度인 gamma係數를 설정하여 이러한 體係的 非對稱度가 資産의 價格決定을 보다 정확히 설명한다 것을 명확히 하였다.

이러한 理論的 배경은 無危險收益率에 의한 借入의 制約, 또 借入과 貸出利子率이 다른데 대한 SML의 現實的 모순,[63] 즉 實證的 SML의 기울기는 理論的 SML 보다 낮고 절편은 높다는 결과 및 理論에서의 收益率의 豫測値의 相異함 등은 體系的 非對稱度를 포함함으로서 일시에 해결된다고 보고 있다. 그리하여 이러한 實證의 結果는 2次回歸模型의 절편의 Zero豫測이 부정되는 것이 아니라는 것을 일단 명백히 하였다.

살펴보았듯이, 3次積率에 있어서 포트폴리오分析의 理論的 論理는 결코 부인할 수 없다고 본다. 따라서 만일 確率分布에 非對稱度가 存在한다면 이를 무시해서는 안된다고 할 수 있다. 그러나 非對稱度는 實證的으로 測定하기는 어렵고 投資決定時 非對稱度의 중요성을 결정하기는 어렵다. 언급했듯이 Friend와 Westerfield의 硏究에 의하면[64] 投資者들의 포토폴리오期待收益의 正의 非對稱度의 選好의 證據는 명확히 했으나 價格決定의 非對稱度의 영향의 證據를 찾지 못한 것에서 이를 암시하고 있다. 또한 Francis등에 의하면,[65] 連續的으로 複合된 收益率(continuously compounded rate of return)이 사용되었다면 實證結果는 달라졌을지 모른다고 지적하고, 非線型函數가 도입되면 또 다른 結果가 유도될 가능성도 있다고 보고 있다.

따라서 새로운 說明變數인 非對稱度의 추가로 인한 資本資産價格決定模型의 擴張은 投資者의

63) M. Brennan, "Capital Market Equilibrium with Divergent Borrowing and Lending Rates", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Dec. 1971. pp. 1109－1137.

64) I. Friend, R. Westerfield, op. cit., pp. 607－636.

65) J. C. Francis, S. H. Archer, op. cit., p. 381.

資産의 選擇基準을 보다 적절히 說明함으로써 2次積率의 限界를 극복하면서 市場均型模型을 찾는 계기를 마련하고 있다고 보지만 實證的으로는, 非對稱度의 效果에 대한 理論的 結論에 부합되는 부가적인 硏究가 필요하다고 본다. 따라서 이러한 여러가지 實行的인 問題가 해결될 때 만이 3次元 내지 3次積率의 市場均型理論의 보다 명확한 實證的 檢證이 개발되는 것이 可能할 것이다.

우리나라의 경우에도 投資者들의 포토폴리오의 구성은 理論보다 낮은 分散投資를 하고 있음은 사실이다. 이러한 관점에서, 不完全分散投資의 原因을 說明해주는 變數로서 收益率의 非對稱度가 理論과 같이 적절한가의 여부를 우리나라 資本市場을 대상으로 多變量分析을 實證的으로 行하고자 하는데 이는 後續硏究에서 계속하고자 한다.

Summary

A Study on the Market Equilibrium Model of the First Three Moments

Ahn Seung-chul

Markowitzś normative theory provides the basis for the positive theory of the valuation of risk asset developed by Sharpe and Lintner. The two parameter capital asset pricing model has been subject to numerous applications including performance measurement, tests of capital markets.

Recently, several scholars have published empirical results which are inconsistent with the first two moments of the Sharpe-Lintner model. These studies suggest that the slope of the capital asset pricing model is lower and the intercept higher than predicted by the traditional theory.

The first two moments of the return are sufficient information about the return distribution when it is a normal distribution or the utility function of investor is quadratic. But the distribution of the return is not normal and the utility function is not quadratic. So, more and higher moments of the return are necessary and because most of the information about any probability distribution is contained in its first three moments, the first three moments are take into consideration. And investors prefer the security with high positive skewness and avert the behavior which reduces the positive skewness.

In these point of viewes, this paper extends the capital asset pricing model(market equilibrium model) to incorporate the effect of skewness on valuation. And market equilibrium model introduced in this paper shows that systematic skewness, rather than skewness, is relevant to market valuation.